NUMERIČKI METODI I PROGRAMIRANJE

I Aritmetičke operacije, izrazi i simbolička izračunavanja u *Mathematici.*

1. Izračunati u Mathematici izraze:

   a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{9}$
   b) $2^{40} + 3^{50}$
   c) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; $e^{\pi\sqrt{163}}$;
   d) $10a^3 - \frac{b}{10^{15}}$
2. Neka je $a = 2+3i$ i $b = 7+8i$. Naći: $a-b$, $\overline{ab}$, $\frac{a}{a+b}$, $|a+b|$, $\arg(a^3-b^3)$, $\mathrm{Re}(a+b)$.
3. Napisati u *Mathematici* sledeće izraze:
   a) $y = \frac{x^2-3}{2}$, $z = \frac{x-1}{x^2-4}$, $g = \sqrt{2x+5}$, $h = 3\cos 2x - e^{-x^2} - 1$
4. Nacrtati grafik funkcije
$$y = \frac{x-1}{x^2-4}$$
   i sa grafika utvrditi njene karakteristike.
5. Ispitivanje funkcija i crtanje grafika: $f(x) = (x^2+1)/(x^4+1), g(x) = xe^{-1/x^2}$, $h(x) = e^x/(1-x^2)$.
6. Pomoću programskog paketa *Mathematica* nacrtati grafik funkcije
$$f(x) = \frac{e^x}{(1-x^2)}$$
   i odrediti njene karakteristike: nule funkcije, znak, asimptote, rašćenje, opadanje i ekstremne vrednosti.
7. Nacrtati grafike funkcija $y = 5\pi + \sin x$ i $z = 10\arctan x$. Prikazati oba grafika zajedno i utvrditi da jednačina $5\pi + \sin x = 10\arctan x$ ima beskonačno mnogo rešenja.
8. Napisati program za izračunavanje izraza
$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1, \quad g(x) = x^2/(\sqrt{x^2+1}+1)$$
   za različite vrednosti argumenta $x = 10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-15}$. Uporediti rezultate.

II Elementi programiranja pomoću *Mathematice*

1. Napisati program kojim se učitavaju koeficijenti polinoma P i vrednost z_0 a kao rezultat se dobijaju vrednosti $P(z_0), P'(z_0)$ i $P''(z_0)$.
2. Napisati program za izračunavanje zbira ili proizvoda:
$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{10} n^2, \quad \prod_{i=1}^{20} \left(i + \frac{1}{i}\right).$$
2. Napisati program za izračunavanje zbira
$$S = \sum_{k=0}^{n} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n.$$

Testirati program uzimajući različite vrednosti za q i n.

3. Napisati program za izračunavanje zbira

$$u = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i} d_j = d_1 + d_1 d_2 + \cdots + d_1 d_2 \cdots d_n.$$

4. Koristeći prethodni program, napisati program za izračunavanje

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=1}^{i} b_j.$$

III Rešavanje nelinearnih jednačina i sistema nelinearnih jednačina pomoću *Mathematica*-e.

1. Koristeći programski paket *Mathematica* naći rešenja jednačina:
   a) $x^5 + x^2 - 1 = 0$,
   b) $x^6 - 64 = 0$,
   c) $3x^2 + 6y = 4, x - y = 3$.
2. Lokalizovati korene jednačine $e^x - 3x = 0$ nalaženjem presečnih tačaka grafika funkcija $y = 3x$ i $y = e^x$.
3. Grafički lokalizovati nule funkcija
   a) $f(x) = x^2 - e^x$, b) $g(x) = x + 4\cos x - 0.5$, c) $h(x) = \ln(x + 3) - \sin x$.
4. Napisati program za izračunavanje vrednosti polinoma

   $$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = a_n + x(a_{n-1} + x(\cdots (a_1 x + a_0) \cdots))$$

   prema Hornerovoj šemi za različite vrednosti parametra x. Testirati program na primeru polinoma

   $$P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$$

   uzimajući sledeće vrednosti: $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.
5. Dat je polinom $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$. Izvršiti lokalizaciju nula polinoma znajući da važi $r \leq x_i \leq R$, gde su

   $$r = \frac{|a_n|}{a + |a_n|}, \quad R = 1 + \frac{A}{|a_0|},$$

   i $a = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}$, $A = \{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$. Testirati na primerima
   a) $P(x) = 3.24x^8 - 2.42x^7 + 10.37x^6 + 11.01x^2 + 47.98$.
   b) $P(x) = x^8 - 36x^7 + 546x^6 - 453x^5 + 22449x^4 - 67284x^3 + 118124x^2 - 109584x + 40320$.
6. Primeniti metod proste iteracije na rešavanje jednačine $x^2 - 2x - 3 = 0$ birajući različite iterativne funkcije. Ograničiti broj iteracija.
7. Napisati program za nalaženje nula funkcije $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ pomoću metoda sečice sa početnim vrednostima $x_0 = 2$ i $x_1 = 1$. Predvideti najviše 20 iterativnih koraka a sa izračunavanjem prekinuti kada je $f(x_n) - f(x_{n-1})$ dovoljno malo.

8. Grafički lokalizovati korene jednačine $\log(x+3) - \sin(x) = 0$ u intervalu širine 10^{-2}. Dobijenu aproksimaciju iskoristiti za dobijanje tačnije vrednosti traženog korena pomoću programskog paketa *Mathematica*.
9. a) Pokazati da formula za nalaženje kvadratnog korena

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$$

predstavlja specijalan slučaj Newtonovog metoda.
b) Primeniti metod za $a = 2$ ($x_0 = 1$, 5 iterativnih koraka).
10. Iterativni postupak za nalaženje k-tog korena iz a dat je formulom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{k x_n^{k-1}}.$$

Primeniti ovaj metod za nalaženje kubnog korena iz 2 ($x_0 = 1$, 5 iterativnih koraka).

IV Vektori, matrice i sistemi linearnih jednačina

1. Zadavanje vektora i matrica u *Mathematici* i osnovne operacije s njima. Nalaženje inverzne matrice.
2. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 4 & 11 & 8 \end{bmatrix}$.
   a) Naći $det(A)$, $B = A^{-1}$, $A \cdot B$, $C = A^T$.
   b) Rešiti matričnu jednačinu $A + X = 2I$, gde je I jedinična matrica.
2. Rešavanje sistema linearnih jednačina. Primeri: knjiga - str. 86, zadaci 1,2,3.
3. Napisati program za ispitivanje dijagonalne dominantnosti date matrice.
4. Sledeći brojevi predstavljaju neke od racionalnih aproksimacija proja π:

$$\frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113}, \quad \frac{104348}{33215}, \quad \frac{1148183}{365478}, \quad \frac{1252531}{398693}.$$

Napisati program kojim se ovi brojevi učitavaju kao koordinate vektora a zatim za svaku izračunava apsolutna i relativna greška. Za svaku vrednost štampati dobijene vrednosti.
5. Napisati program kojim će se za dato n ($n \leq 20$) obrazovati matrica

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & & \\ 2 & 5 & 3 & 0 & & \\ 0 & 2 & 5 & 3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 2 & 5 & 3 & 0 \\ & & 0 & 2 & 5 & 3 \\ & & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Zatim formirati vektor $b = \{1, 2, \ldots, n\}$ i naći rešenje sistema linearnih jednačina $Ax = b$. Testirati program za različite vrednosti $n = 2, 3, \ldots, 10$ i štampati dobijene rezultate.

V Interpolacija i fitovanje krivih

1. Interpolirati listu podataka $a = \{\{.1, 2\}, \{.2, 6\}, \{.3, 9\}, \{.4, 2\}\}$. Prikazati grafički dobijeno rešenje zajedno s listom podataka.
2. Tabelirati vrednosti funkcije $f(x) = \sin(\pi x/2)$ uzimajući za čvorove tačke $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ a zatim interpolirati dobijenu listu podataka. Grafički predstaviti i funkciju f i dobijeni interpolacioni polinom. Ponoviti sa većim brojem čvorova.
3. Interpolirati funkcije $f(x) = 1/(1 + x^2)$ i $g(x) = e^{-x^2}$ uzimajući za čvorove $x = -5, -4, \ldots, 5$. Prikazati grafički dobijene rezultate u oba slučaja.
4. Data je lista podataka $(-2, 2), (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 2)$. Aproksimirati ove podatke a) linearnom funkcijom, b) kvadratnim trinomom. Prikazati grafički listu podataka i aproksimacioni polinom.
5. Isto kao u prethodnom zadatku za listu podataka:
   $(0.24, 0.23), (0.65, -0.26), (0.95, -1.10), (1.24, -0.45), (1.73, 0.27),$
   $(2.01, (0.10), (2.23, -0.29), (2.52, 0.24), (2.77, 0.56), (2.99, 1.00)$
6. Napisati program za nalaženje polinoma koji daje najbolju aproksimaciju u smislu najmanjih kvadrata za datu tabelu podataka. (knjiga str. 236-237, primer 1).

VI Diferenciranje i integracija

1. Koristeći simboličko izračunavanje naći izvode i integrale funkcija:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}, \; g(x) = \frac{1}{(x + 1)\sqrt{1 - x}}, \; h(x) = \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2}.$$

2. Izračunati površinu ograničenu krivom $y = \sin x/(1 + \cos^2 x)$ i pravama $y = 0$ i $x = \pi/2$.
5. Napisati program za numeričko izračunavanje integrala pomoću a) trapeznog pravila, b) Simpsonovog pravila. Testirati programe izračunavanjem integrala:

$$I_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}, \quad I_2 = \frac{1}{\ln 3} \int_1^3 \frac{dx}{x}.$$

   Uzeti $n = 4, 8, 16$ u oba slučaja.
6. Date su funkcije $y = x^4 - 2x^3 + 5, g = 1/x^4, h = x + e^{-x^2}$.
   a) Naći integrale ovih funkcija na intervalu $x \in [1, 3]$ koristeći simboličko ili numeričko izračunavanje u *Mathematici*.
   b) Ponoviti izračunavanje pomoću kvadraturne formule

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{90} \left(7f(0) + 32f(0.25) + 12f(0.5) + 32f(0.75) + 7f(1)\right)$$

   i uporediti sa prethodno dobijenim rezultatima.
7. Nacrtati grafik funkcije $y = \sin 3x/(1 + \cos^2 x)$ na intervalu $[0, \pi/2]$. Zatim naći nulu funkcije y, odnosno tačku gde grafik seče x-osu. Imajući na umu znak funkcije, izračunati površinu ograničenu ovom krivom i pravama $y = 0$ i $x = \pi/2$.

8. Izračunati približno $\ln 2$ primenom Simpsonovog pravila na integral $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ uzimajući $2n = 4$ i odrediti grešku.
9. Primenom uopštene trapezne formule sa devet čvorova izračunati dužinu luka krive $y = \sin x$ na intervalu $(0, \pi)$ i proceniti grešku.

VII Rešavanje diferencijalnih jednačina

1. Naći rešenja sledećih diferencijalnih jednačina sa datim početnim uslovom:
   a) $y' = ay + 5x,\ y(0) = 1,$
   b) $y' = 6x - 1,\ y(1) = 6,$
   c) $y' = (x - y)/2,\ y(0) = 1,$
   d) $y'(x) = y\cos(x + y),\ y(0) = 1.$
2. Napisati program za primenu Ojlerovog metoda za rešavanje datog Košijevog problema. Primeniti program za rešavanje jednačine $y' = 0.12y$ na intervalu $[0, 5]$ sa $y(0) = 1000$. Naći približnu vrednost $y(5)$ uzimajući za korak $h = 1, 1/12, 1/360$.
3. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina
$$x'(t) = t, \quad y'(t) = t^2.$$
4. Data je d.j. $y'' = \cos(y + y')$ sa početnim uslovom $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Ojlerovim metodom naći $y(1)$ uzimajući korak $h = 0.2$