IV G L A V A

VIŠESTRUKI INTEGRALI

1. INTEGRABILNE FUNKCIJE I OSNOVNA SVOJSTVA

1.1. Definicija, egzistencija i osnovna svojstva integrala

Definicija, egzistencija, osnovna svojstva i geometrijska interpretacija integrala za funkciju $f(x)$ neprekidnu na odsečku $[a, b]$ data je u predhodnom kursu Matematika I. Integral u formi kako će ovde biti dat, odnosi se uglavnom na funkcije neprekidne na zatvorenim i ograničenim podskupovima sadržanim u Euklidskom n-dimenzionom prostoru E^n.

1.1.1. Definicija. Za odsečak $[a, b]$, $(a < b)$ familija odsečaka

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots , [x_{n-1}, x_n]$$

naziva se *podela* ili *particija* odsečka $[a, b]$ ako je

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Svaka podela odredjuje strogo rastući niz

$$a = x_0, x_1, \ldots , x_{n-1}, x_n = b$$

i obrnuto, takav niz odredjuje jednu podelu odsečka $[a, b]$. Data podela odsečka $[a, b]$ označava se sa $\mathcal{P}$ i zapisuje sa

$$\mathcal{P} : a = x_0, x_1, \ldots , x_n = b.$$

Tačke $x_0, x_1, \dots, x_n$ nazivamo podeonim tačkama, a odsečke

$$[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

podeonim odsečcima podele $\mathcal{P}$.

1.1.2. Definicija. Podela $\mathcal{P}_1$ odsečka $[a, b]$ je *finija* od podele $\mathcal{P}_2$ ovog odsečka ako su sve podeone tačke podele $\mathcal{P}_2$ istovremeno podeone tačke podele $\mathcal{P}_1$, tj. ako je svaki podeoni odsečak podele $\mathcal{P}_1$ sadržan u nekom podeonom odsečku podele $\mathcal{P}_2$.

Za dve podele $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ odsečka $[a, b]$ uvek egzistira treća podela $\mathcal{P}$ finija od obe. To je, na primer, podela $\mathcal{P}$ koju čine sve podeone tačke podela $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$.

Ova podela $\mathcal{P}$ naziva se *superpozicija* podela $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$.

Podela n-dimenzionog pravougaonika. Pojmovi dati za odsečak lako se proširuju na slučal n-dimenzionog pravougaonika.

1.1.3.Definicija. Neka je

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

n-dimenzioni pravougaonik, a $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ podele odsečaka

$$[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$$

. Familija svih n-dimenzionih pravougaonika oblika

$$[x^1_{i(1)}, x^1_{i(1)+1}] \times [x^2_{i(2)}, x^2_{i(2)+1}] \times \ldots \times [x^n_{i(n)}, x^n_{i(n)+1}]$$

gde je $[x^j_{i(j)}, x^j_{i(j)+1}]$ podeoni interval podele $\mathcal{P}_j$ naziva se *podela* n-dimenzionog kvadra A i označava sa

$$(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n).$$

1.1.4.Definicija. Neka su $\mathcal{P}^1 = (\mathcal{P}^1_1, \dots, \mathcal{P}^1_n)$ i $\mathcal{P}^2 = (\mathcal{P}^2_1, \dots, \mathcal{P}^2_n)$ dve podele n-dimenzionog kvadra A. Kaže se da je podela $\mathcal{P}^1$ *finija* od podele $\mathcal{P}^2$ ako je za svako i podela $\mathcal{P}^1_i$ finija od podele $\mathcal{P}^2_i$. Podela

$$\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n),$$

je superpozicija podela $\mathcal{P}^1$ i $\mathcal{P}^2$ ako je za svako i $\mathcal{P}_i$ superpozicija podela $\mathcal{P}^1_i$ i $\mathcal{P}^2_i$.

1.1.5.Definicija. Zapremina pravougaonika $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ odnosno pravougaonika $\mathring{A} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, definiše se kao broj $v(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$.

1.1.6.Definicija. Neka je $f : A \longrightarrow R$ ograničena funkcija , na n-dimenzionom pravougaoniku A i neka je $\mathcal{P}$ podela pravougaonika A. Za podeoni pravougaonik $\triangle$ podele $\mathcal{P}$, neka je

$$m_\triangle(f) = \inf\{f(x) : x \in \triangle\},$$

$$M_\triangle(f) = \sup\{f(x) : x \in \triangle\},$$

a $v(\triangle)$ zapremina pravougaonika $\triangle$.

Donja, odnosno *gornja* suma funkcije f po podeli $\mathcal{P}$ definiše se kao broj

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{\triangle \in \mathcal{P}} m_\triangle(f) v(\triangle)$$

odnosno

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{\triangle \in \mathcal{P}} M_\triangle(f) v(\triangle)$$

gde sumiranje ide po svim podeonim pravougaonicima podele $\mathcal{P}$.

Sledećim tvrdjenjima data su osnovna svojstva ove dve sume.

1.1.7.Teorema. *Neka je podela $\mathcal{P}^1$ finija od podele $\mathcal{P}$ n-dimnzionog pravougaonika A i neka je $f : A \longrightarrow R$ ograničena funkcija. Tada je*

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}^1) \wedge S(f, \mathcal{P}^1) \leq S(f, \mathcal{P}).$$

Dokaz. Neka je $m = \inf\{f(x) : x \in A\} \wedge M = \sup\{f(x) : x \in A\}$. Tada je za bilo koju podelu $\mathcal{P}^*$

$$mv(A) \leq s(f, \mathcal{P}^*) \leq S(f, \mathcal{P}^*) \leq Mv(A).$$

Ako se ovaj zaključak primeni na svaki pravougaonik "grublje" podele $\mathcal{P}$ dobiće se zaključak teoreme koji se može iskazati na sledeći način: Pri finijoj podeli donja suma se ne umanjuje, a gornja suma se ne uvećava.$\blacksquare$

1.1.8.Teorema. *Neka su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}^1$ ma koje dve podele n-dimenzionog pravougaonika A i $f : A \longrightarrow R$ ograničena funkcija. Tada je*

$$s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}^1).$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{P}^*$ superpozicija podela $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}^1$. Razume se da je $\mathcal{P}^*$ finija od $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}^1$, pa je prema prethodnoj teoremi

$$s(f,\mathcal{P}) \leq s(f,\mathcal{P}^*) \wedge S(f,\mathcal{P}^*) \leq S(f,\mathcal{P}^1),$$

i pošto je $s(f,\mathcal{P}^*) \leq S(f,\mathcal{P}^*)$, to je

$$s(f,\mathcal{P}) \leq s(f,\mathcal{P}^*) \leq S(f,\mathcal{P}^*) \leq S(f,\mathcal{P}^1).\blacksquare$$

Iz ove teoreme može se zaključiti da je svaka donja suma manja od svake gornje sume tj. da je bilo koja gornja suma gornje ograničenje za sve donje sume i da je bilo koja donja suma donje ograničenje za sve gornje sume. Na osnovu toga je

$$\sup\{s(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\} \leq \inf\{S(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\},$$

gde je $\mathfrak{P}$ skup svih podela n-dimenzionog pravougaonika A i $f : A \longrightarrow R$ ograničena funkcija.

1.1.9.Definicija. Broj $\sup\{s(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\}$ naziva se *donji integral* funkcije f nad A i označava se sa

$$\underline{\int_A} f(x)dx,$$

a broj $\inf\{S(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\}$ *gornji integral* funkcije f nad A i označava se sa

$$\overline{\int_A} f(x)dx.$$

Ako su ova dva integrala medjusobno jednaka kaže se da je funkcija f integrabilna na A, a njihova zajednička vrednost označava se sa

$$\int_A f(x)dx$$

i naziva *integral* funkcije f po A.

Ako se želi da se istaknu koordinate ovaj se integral zapisuje na sledeći način.

$$\int f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n.$$

1.1.10.Teorema. *Ograničena funkcija* $f : A \longrightarrow R$ *je integrabilna ako i samo ako za svako* $\varepsilon > 0$ *egzistira podela* $\mathcal{P}$ *pravougaonika* A *takva da je*

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Dokaz. Neka je f integrabilna. Tada je $\sup\{s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\} = \inf\{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\} = I$. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ egzistiraju podele $\mathcal{P}^1$ i $\mathcal{P}^2$ iz $\mathfrak{P}$ takve da je

$$s(f, \mathcal{P}^1) > I - \frac{\varepsilon}{2} \wedge S(f, \mathcal{P}^2) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

ili u ekvivalentnom obliku:

$$I - s(f, \mathcal{P}^1) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge S(f, \mathcal{P}^2) - I < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je $\mathcal{P}$ superpozicija podela $\mathcal{P}^1$ i $\mathcal{P}^2$. Tada je

$$s(f, \mathcal{P}^1) \leq s(f, \mathcal{P}) \wedge S(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}^2),$$

pa je tim pre

$$I - s(f, \mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge S(f, \mathcal{P}) - I < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sabiranjem ove dve nejednakosti dobiće se da je za podelu $\mathcal{P}$

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Obrnuto, neka za svako $\varepsilon > 0$ egzistira podela $\mathcal{P}$ takva da je

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Tada je, tim pre,

$$\sup\{s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\} - \inf\{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\} < \varepsilon.$$

Pa je

$$\sup\{s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\} = \inf\{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\},$$

što znači da je f integrabilna funkcija na A.

Oslanjajući se na definiciju lako se dokazuju sledeća dva svojstva koja će se koristiti u daljem radu.■

1.1.11. Teorema. *Neka su $f : A \longrightarrow R$ i $g : A \longrightarrow R$ integrabilne funkcije, gde je A n-dimenzionalni pravougaonik i neka je $\lambda \in R$. Tada su funkcije $f + g$ i λf takodje integrabilne i pri tome je*

$$\int\limits_A (f+g)dx = \int\limits_A f dx + \int\limits_A g dx \wedge \int\limits_A \lambda f dx = \lambda \int\limits_A f dx.$$

1.1.12. Definicija. Skup $S \subset E^n$ je *mere nula* ako za svako $\varepsilon > 0$, egzistira prebrojiva familija $\{A_k\}$ n-dimenzionalnih pravougaonika takvih da je $S \subseteq \cup\{A_k : k \in N\}$ i $\sum_{k=1}^{\infty} v(A_k) < \varepsilon$.

1.1.13. Primer. Neka je $S = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\} \subset E^2$. Tada je S mere nula, jer za $\varepsilon > 0$ neka je $A = [0,1] \times [-\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3}]$. Tada je $S \subset A$ i $v(A) = 2\frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.♦

1.1.14. Teorema. *Neka je $\{S_k : k \in N\}$ prebrojiva familija podskupova od E^n koji su mere nula. Tada je*

$$S = \cup\{S_k : k \in N\}$$

takodje mere nula.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$.Pošto je S_k mere nula, egzistira prebrojiva familija pravougaonika $\{A_i^k : i \in N\}$ takva da je

$$S_k \subseteq \cup\{A_i^k : i \in N\} \wedge \sum_{i=1}^{\infty} v(A_i^k) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Familija $\{A_i^k : (i,k) \in N \times N\}$ je takodje prebrojiva i $S \subseteq \cup\{A_i^k : (i,k) \in N \times N\}$. Šta više,

$$\sum\{v(A_i^k) : (i,k) \in N \times N\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} v(A_i^k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Dakle, S je mere nula.■

Posledice.

1^0 Svaki prebrojiv (konačan) podskup od E^n je mere nula.

2^0 Ako je $T \subset S$ i S je mere nula, tada je T mere nula.

3^0 Neka je $S \subset E^n$ kompaktan i mere nula. Tada za svako $\varepsilon > 0$ gzistira konačno mnogo pravougaonika (n-dimenzionalnih) $A_1, \dots, A_s$ takvih da je

$$S \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_s \wedge v(A_1) + \ldots + v(A_s) < \varepsilon.$$

4^0 Neka je $f : [a, b] \longrightarrow R$ neprekidna funkcvija. Tada je $G_f = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\} \subset E^2$ skup mere nula.

5^0 Neka je $A = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Tada je $A \setminus (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ skup mere nula.

1.1.15. Definicija. Neka je $f : A \longrightarrow R$ ograničena na $A \subseteq E^n$ i neka je $\delta > 0$, tad svakoj tački a iz A mogu se korespondirati sledeći brojevi:

$$M(f, a, \delta) = \sup\{f(x) : x \in A \wedge d(x, a) < \delta\}$$
$$m(f, a, \delta) = \inf\{f(x) : x \in A \wedge d(x, a) < \delta\}.$$

Oscilacija funkcije f u tački a definiše se kao broj

$$\mathcal{O}(f, a) = \lim_{\delta \to 0} [M(f, a, \delta) - m(f, a, \delta)]$$

.

U ovoj definiciji $d(x, a)$ je rastojanje izmedju tačaka x i a u prostoru E^n.

Razume se, da ovaj limes uvek postoji jer je $M(f, a\delta) - m(f, a, \delta)$ opadajuća funkcija po δ.

1.1.16. Teorema. *Funkcija $f : A \longrightarrow R$ je neprekidna u tački $a \in A$ ako i samo ako je $\mathcal{O}(f, a) = 0$.*

Ovo tvrdjenje je neposredna posledica definicije oscilacije funkcije u tački.

1.1.17. Teorema. *Neka je A podskup od E^n i $f : A \longrightarrow R$ ograničena funkcija. Za svako $\varepsilon > 0$, skup*

$$\{x \in A : \mathcal{O}(f, x) \geq \varepsilon\}$$

*je zatvoren u A.**

1.1.18. Teorema. *Neka je A n-dimenzionalni pravougaonik i $f : A \longrightarrow R$ ograničena funkcija. Funkcija f je integrabilna na A ako i samo ako je skup*

$$\{x \in A : \mathcal{O}(f, x) > 0\}$$

*Definicija zatvorenog skupa data je u Uvodnoj glavi *skup mere nula.*

1.1.19. Definicija. Za skup $C \subseteq E^n$, njegova *karakteristična funkcija* χ_C se definiše sa

$$\chi_{C(x)} = \begin{cases} 1, & x \in C \\ 0, & x \notin C. \end{cases}$$

Sledeća teorema je "operativnija" za utvrdjivanje integrabilnosti funkcija koje su ograničene na široj klasi skupova nego što su n -dimenzioni pravougao -nici.

1.1.20. Teorema. *Neka je $C \subset E^n$ ograničen skup i A n-dimenzionalni pravougaonik koji sadrži C. Funkcija $\chi_C : A \longrightarrow R$ je integrabilna ako i samo ako je rub ∂C skup mere nula.*

Dokaz. Ako je $x \in intC$, tada egzistira okolina U_x tačke x takva da je $U_x \subseteq C$. Funkcija χ_C uzima vradnost 1 nad U_x, pa je neprekidna u x. Slično, ako $x \in A \backslash \overline{C}$, postoji okolina V_x tačke x takva da χ_C uzima vrednost 0 nad V_x, pa je neprekidna u x. Ako je $x \in \partial C$, u svakoj okolini ove tačke nalaze se tačke iz C i iz $A \setminus C$, pa χ_C uzima nad tom okolinom vrednosti 0 i 1. Dakle,

$$\{x \in C : \chi_C \text{ je prekidna u } x\} = \partial C,$$

pa je ova teorema ekvivalentna sa teoremom 1.1.18.■

1.1.21. Definicija. Ograničen skup $C \subset E^n$ je *merljiv u Žordanovom smislu* ako je rub ∂C skup mere nula.

1.1.22. Definicija. Neka je $C \subset E^n$ skup merljiv u Žordanovom smislu. Funkcija $f : C \longrightarrow R$ je *integrabilna* na C ako je skup

$$\{x \in C : f \text{ je prekidna u } x\}$$

skup mere nula, a njen integral po C se definiše kao broj

$$\int_A f(x)\chi_{C(x)}dx,$$

gde je A ma koji n-dimenzioni pravougaonik koji sadrži C i označava se sa

$$\int_C f(x)dx.$$

1.1.23. Teorema. *Neka je $C \subset E^n$ skup merljiv u Žordanovom smislu i $f : C \longrightarrow R$, $g : C \longrightarrow R$.*

1^0 *Ako su* $f : C \longrightarrow R$ *i* $g : C \longrightarrow R$ *integrabilne funkcije, a* $\alpha, \beta \in R$ *proizvoljne konstante, tada je* $\alpha f + \beta g : C \longrightarrow R$ *integrabilna funkcija i pri tome je*

$$\int\limits_C (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int\limits_C f dx + \beta \int\limits_C g dx.$$

2^0 *Ako su* $f : C \longrightarrow R$ *i* $g : C \longrightarrow R$ *integrabilne funkcije i ako je* $f \leq g$ *tada je* $\int\limits_C f dx \leq \int\limits_C g dx$.

3^0 *Ako je* $f : C \longrightarrow R$ *integrabilna funkcija, tada je* $|f|$ *integrabilna funkcija i*

$$|\int\limits_C f dx| \leq \int\limits_C |f| dx.$$

4^0 *Ako je* $C = C_1 \cup C_2$, *gde su* C_1 *i* C_2 *disjunktni, u Žordanovom smislu merljivi skupovi, i ako je* $f : C \longrightarrow R$ *integrabilna funkcija, tada su* $f|C_1$ *i* $f|C_2$ *integrabilne funkcije i pri tome je*

$$\int\limits_C f dx = \int\limits_{C_1} f dx + \int\limits_{C_2} f dx.$$

5^0 *Neka je funkcija* $f : C \longrightarrow R$ *neprekidna na ograničenoj, zatvorenoj i u Žordanovom smislu merljivoj oblasti* C. *Tada egzistira tačka* $\xi \in C$ *tako da je*

$$f(\xi) = \frac{1}{v(C)} \int\limits_C f(x) dx.$$

Pozanato je da za svaku neprekidnu funkciju $f(x), x \in [a, b]$, funkcija $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, x \in [a, b]$, odnosno funkcija $G(x) = -\int\limits_x^b f(u)du, x \in [a, b]$ je primitivna funkcija, tj, izvod integrala po promenljivoj gornjoj granici daje podintegralnu funkciju, a izvod integrala po promenljivoj donjoj granici daje negativnu podintegralnu funkciju. Može se postaviti analogno pitanje za višestruke integrale u smislu razmatranja višestrukih integrala neprekidnih funkcija na merljivim oblastima sadržanim u E^n koje su promenljive zapremine, a u funkciji od zapremine oblasti integracije. Ovde se razmatra pomenuto pitanje za dvojne (dvostruke) integrale, uz napomenu da se dobijeni rezultat bez teškoća , uopštavaju za integrale funkcija koje su neprekidne na merljivim oblastima sadržanim u E^n, za $n \geq 3$.

Neka je funkcija $f(x,y)$, $(x,y)\in G\subset E^2$ neprekidna na merljivoj oblasi G, (x_0,y_0) ma koja tačka iz G, a D proizvoljna kompaktna (zatvorena i ograničena) podoblast oblasti G koja sadrži tačku (x_0,y_0). Sa $P=v(D)$ označimo površinu oblasti D, a sa $\delta = diam(D)$. Razume se da je $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ funkcija od P. Ako se uvede oznaka $\Phi(P)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, onda je $\Phi((x_0,y_0))=0$. Može se potražiti sledeći limes.

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\Phi(P)-\Phi((x_0,y_0))}{P}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\Phi(P)}{P}.$$

Pošto je funkcija $f(x,y)$ neprekidna na D za $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ može se primeniti 5^0 iz prethodne teoreme, pa je

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)P,$$

gde je $(\xi,\eta)\in D$. Takodje, zbog neprekidnosti funkcije $f(x,y),(x,y)\in D$ je $\lim\limits_{\delta\to 0} f(\xi,\eta)=f(x_0,y_0)$, pa je

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\Phi(P)-\Phi((x_0,y_0))}{P}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\Phi(P)}{P}=\lim_{\delta\to 0} f(\xi,\eta)=f(x_0,y_0).$$

Ovako izloženi postupak implicira sledeću teoremu.

1.1.24. Teorema. *Neka je funkcija $f(x,y),(x,y)\in G\subset E^2$ neprekidna u svim tačkama kompaktne oblasti G. Tada je za svaku tačku $(x,y)\in G$*

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\iint\limits_D f(x,y)dxdy}{P}=f(x,y),$$

gde je D zatvorena podoblast oblati G koja sadrži tačku (x,y), $\delta = diam(D)$, a $P=v(D)$ površina oblasti D.

2. IZRAČUNAVANJE I NEKE PRIMENE INTEGRALA

2.1. Izračunavanje višestrukih integrala.

Sledeće svojstvo, poznato kao *Fubinijeva teorema* daje osnovu za izračunavanje integrala. U ovom kursu uglavnom se izračunavaju integrali funkcija dve i tri nezavisno promenljive što će se videti iz daljeg teksta.

2.1.1. Teorema. *Neka je A i-dimenzioni i B j-dimenzioni pravougaonik $(i+j=n)$, a $f : A \times B \longrightarrow R$ integrabilna funkcija. Za $x \in A$ neka je*

$$D(x) = \underline{\int}_B f(x,y)dy, \quad G(x) = \overline{\int}_B f(x,y)dy.$$

Tada su $D : A \longrightarrow R$ i $G : A \longrightarrow R$ integrabilne funkcije i pri tome je

$$\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_A (\underline{\int}_B f(x,y)dy)dx = \int_A (\overline{\int}_B f(x,y)dy)dx.$$

Dokaz. Neka su $\mathcal{P}_A$ i $\mathcal{P}_B$ podele pravougaonika A i B, a $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B)$ podela pravougaonika $A \times B$. Tada je

$$\begin{aligned} s(f,\mathcal{P}) &= \sum_{\mathcal{P}} m_{\triangle_A \times \triangle_B}(f) v(\triangle_A \times \triangle_B) \\ &= \sum_{\mathcal{P}_A} (\sum_{\mathcal{P}_B} m_{\triangle_A \times \triangle_B}(f) v(\triangle_B)) v(\triangle_A). \end{aligned}$$

Lako se može zaključiti da je $\forall x \in \triangle_A$

$$m_{\triangle_A \times \triangle_B}(f) \leq \inf\{f(x,y) : y \in \triangle_B\}$$

pa je $\forall x \in \triangle_A$

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathcal{P}_B} m_{\triangle_A \times \triangle_B}(f) v(\triangle_B) \leq \sum_{\mathcal{B}} \inf\{f(x,y) : y \in \triangle_B\} v(\triangle_B) \\ &\leq \underline{\int}_B f(x,y)dy = D(x), \end{aligned}$$

odnosno

$$\sum_{\mathcal{P}_B} m_{\triangle_A \times \triangle_B}(f) v(\triangle_B) \leq \inf\{D(x) : x \in \triangle_a\} = m_{\triangle_A}(D).$$

Tako se dobija nejednakost

$$s(f, \mathcal{P}) \leq \sum_{\mathcal{P}_A} m_{\triangle_A}(D) v(\triangle_A) = s(D, \mathcal{P}_A).$$

Prema definiciji gornje sume slično se dokazuje nejednakost

$$S(f, \mathcal{P}) \geq S(G, \mathcal{P}_A),$$

pa ukupno imamo:

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(D, \mathcal{P}_A) \leq S(D, \mathcal{P}_A) \leq S(G, \mathcal{P}_A) \leq S(f, \mathcal{P})$$

$$\wedge$$

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(D, \mathcal{P}_A) \leq s(G, \mathcal{P}_A) \leq S(G, \mathcal{P}_A) \leq S(f, \mathcal{P}).$$

Pošto je f integrabilna funkcija, iz dve dve nejednakosti sledi da su D i G takodje integrabilne i da je

$$\int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A D(x) dx = \int_A G(x) dx.$$

Na sličan način dokazuje se jednakost

$$\int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_B \left(\underline{\int}_A f(x, y) dx \right) dy = \int_B \left(\overline{\int}_A f(x, y) dx \right) dy.$$

Ako je f neprekidna umesto donjih i gornjih integrala dolaze integrali pa je

$$\int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_B (\int_A f(x, y) dx) dy = \int_A (\int_B f(x, y) dy) dx. \blacksquare$$

2.1.2. Primer. Neka su $y_1 : [a, b] \longrightarrow R$ i $y_2 : [a, b] \longrightarrow R$ dve neprekidne funkcije takve da je

$$\forall x \in [a, b] \Rightarrow y_1(x) \leq y_2(x)$$

i neka je $C = \{(x, y) : x \in [a, b] \wedge y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, a

$$f : C \longrightarrow R$$

neprekidna funkcija. Izračunati $\int\limits_C f(x, y)dxdy$ (ili kako se obično piše $\iint\limits_C f(x, y)dxdy$).

Rešenje. Skup

$$C = \{(x, y) : x \in [a, b] \wedge y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

je merljiv u Žordanovom smislu i neka je

$$c = \inf\{y_1(x) : x \in [a, b]\}, \quad d = \sup\{y_2(x) : x \in [a, b]\}.$$

(videti sliku 1)

Slika 1

Tada je

$$C \subseteq [a, b] \times [c, d] = A.$$

Neka je $f : C \longrightarrow R$ neprekidna funkcija. Tada je, podefiniciji integrala po C,

$$\iint\limits_C f(x, y)dxdy = \iint\limits_A f(x, y)\chi_{C(x,y)}dxdy.$$

Prema Fubinijeovoj teoremi (Teorema 1.2.1) biće

$$\iint\limits_C f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b (\int\limits_c^d f(x, y)\chi_{C(x,y)}dy)dx.$$

Za $x \in [a, b]$ je

$$\int\limits_c^d f\chi_C dy = \int\limits_c^{y_1(x)} f\chi_C dy + \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f\chi_C dy + \int_{y_2(x)}^d f\chi_C dy.$$

Funkcija χ_C je nula u prvom i trećem integralu, a jedan u drugom, pa je

$$\int\limits_c^d f\chi_C dy = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f dy.$$

Prema tome je

$$\iint\limits_C f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b (\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy)dx. \blacklozenge \tag{1}$$

Žordanova mera skupa C je njegova površina tj.

$$v(C) = \iint\limits_C 1dxdy = \int_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} 1dy \right) dx = \int\limits_a^b [y_2(x) - y_1(x)]dx.$$

2.1.3. Primer. Izračunati $\iint\limits_D (2x+y)dxdy$, ako je $D = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$

Rešenje. Prema formuli (1),

$$\iint\limits_D (2x+y)dxdy = \int\limits_{-1}^1 dx \int_0^2 (2x+y)dy$$

$$= \int\limits_{-1}^1 \left[2xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx = \int\limits_{-1}^1 (4x+2)dx = 4.$$

2.1.4. Primer. Izračunati $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ ako je D deo ravni $R \times R$ ograničen kružnicama $\mathcal{K}_1 = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\} \wedge \mathcal{K}_2 = \{(x,y) : x^2 - 2x + y^2 = 0\}$.

Rešenje. Ovde je $D = D_1 \cup D_2$ gde je

$$D_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \wedge -\sqrt{2x - x^2} \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}\}$$

$$D_2 = \{(x,y) : \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \wedge -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

Prema 1.1.23. (4^0) i formuli (1)

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \iint\limits_{D_1} (x+y)dxdy + \iint\limits_{D_2} (x+y)dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} (x+y)dy \right] dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)dy \right] dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}. \blacklozenge$$

2.1.5. Primer. Neka je C skup iz primera 2.1.2, a $z_1 : C \longrightarrow R$ i $z_2 : C \longrightarrow R$ dve neprekidne funkcije takve da je $(\forall (x,y) \in C) z_1(x,y) \le z_2(x,y)$ i neka je $D = \{(x,y,z) : (x,y) \in C \wedge z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$, a $f : D \longrightarrow R$ neprekidna funkcija. Izračunati

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz.$$

Rešenje. Skup $D = \{(x,y,z) : (x,y) \in C \wedge z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$ je merljiv u Žordanovom smislu. Neka su

$$m = \inf\{z_1(x,y) : (x,y) \in C\} \wedge M = \sup\{z_2(x,y) : (x,y) \in C\}.$$

Pošto je

$$D \subset C \times [m, M] \subset A \times [m, M]$$

gde je $A = [a,b] \times [c,d]$ (videti primer 2.1.2), prema Fubinijevoj teoremi imamo

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_A (\int_m^M f\chi_D dz) dxdy.$$

Iz $\int_m^M f\chi_D dz = \int_m^{z_1(x,y)} f\chi_D dz + \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\chi_D dz + \int_{z_2(x,y)}^{M} f\chi_D dz$, i činjenice da je χ_D nula u prvom i trećem, a jedan u drugom integralu na desnoj strani ove jedakosti, biće

$$\int_m^M f\chi_D dz = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f dz.$$

Izraz $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f dz$ je funkcija promenljivih x i y, pa prema formuli (1) u primeru 2.1.2, imamo

$$\begin{aligned}\iiint\limits_D f dxdydz &= \iint\limits_A \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f dz \right) dxdy \\ &= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx.\blacklozenge\end{aligned} \tag{2}$$

Žordanova mera skupa D je njegova zapremina tj.

$$v(D) = \iiint\limits_D dxdydz = \int\limits_a^b (\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} (\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz)dy)dx$$

2.1.6. Primer. Izračunati $\iiint\limits_D (x^2 - 2xy + z)dxdydz$ ako je

$$D = \{(x,y,z) \in E^3 : -1 \leq x \leq 0; 1 \leq y \leq 3; 0 \leq z \leq 2\}$$

Rešenje. Prema formuli (2) imamo

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_D (x^2 - 2xy + z)dxdydz \\ &= \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^2 (x^2 - 2xy + z)dz \\ &= \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_1^3 (x^2 z - 2xyz + \frac{z^2}{2})\Big|_0^2 dy \\ &= \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_1^3 (2x^2 - 4xy + 2)dy \\ &= \int\limits_{-1}^{0} \left[(2x^2 y - 2xy^2 + 2y)\right]\Big|_1^3 dx \\ &= 13\frac{1}{3}.\blacklozenge\end{aligned}$$

2.1.7. Primer. Izračunat $\iiint\limits_D x^3y^2dxdydz$ ako je D tetraedar ograničen ravnima

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y+z=1.$$

Rešenje. Ovde je

$$D=\{(x,y,z)\in E^3 : 0\le x\le 1; 0\le y\le 1-x; 0\le z\le 1-x-y\}.$$

Prema tome

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_D x^3y^2dxdydz\\
&=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y} x^3y^2dz\\
&=\int\limits_0^1 x^3dx\int\limits_0^{1-x} y^2dy[z]\Big|_0^{1-x-y}\\
&=\int\limits_0^1 x^3dx\int\limits_0^{1-x} (1-x-y)dy\\
&=\int\limits_0^1 x^3\left[\left(\frac{y^3}{3}-x\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)\right]\Big|_0^{1-x}=\frac{1}{12}\int\limits_0^1 x^3(1-x)^4\,dx=\frac{1}{3360}.\blacklozenge
\end{aligned}$$

Na kraju ovog odeljka navodimo nekoliko poznatih formula koje se primenjuju u fizici i mehanici, a koriste dvostruke i trostruke integrale.

Masa tela sa poznatom gustinom.

Neka je dato telo Q sa neprekidnom zapreminskom masom $\mu(x,y,z)$ koja "zauzima" merljiv skup $G\subset E^3$. Masa tela Q izračunava se po formuli

$$m(Q)=\iiint\limits_G \mu(x,y,z)dxdydz.$$

Momenti inercije.

Prdhodno posmatrano telo Q ima kao momente inercije u odnosu na koordinatne ose i koordinatni početak sledeće veličine.

$$I_x = \iint\limits_G (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_y = \iint\limits_G (x^2 + z^2)\mu(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_z = \iint\limits_G (x^2 + y^2)\mu(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_O = \iint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dxdydz.$$

Koordinate centra mase.

Sledećim formulama izračunavaju se koordinate centra mase posmatranog tela Q.

$$x_c = \frac{1}{m(Q)} \iiint\limits_G x\mu(x, y, z)dxdydz,$$

$$y_c = \frac{1}{m(Q)} \iiint\limits_G y\mu(x, y, z)dxdydz,$$

$$z_c = \frac{1}{m(Q)} \iiint\limits_G z\mu(x, y, z)dxdydz.$$

3. ZAMENA PROMENLJIVIH U DVOJNOM I TROJNOM INTEGRALU

3.1. Zamena promenljivih u dvojnom integralu.

Izračunavanje integrala tipa $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ u mnogim slučajevima je dosta olakšano uvodjenjem novih nezavisno promenljivih. Uslovi pod kojima je to moguće sadržani su u sledećoj teoremi.

3.1.1. Teorema. *Neka je funkcija $f(x, y)$ neprekidna na ograničenom, merljivom i zatvorenom skupu D sadržanom u ravni xOy , a neprekidno diferencijabilne funkcije*

$$x = x(u, v) \wedge y = y(u, v)$$

obostrano jednoznačno preslikavaju skup D *na skup* D' *iz* uOv *ravni pri čemu je*

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0,\quad (u,v)\in D'.$$

Tada je

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv. \tag{3}$$

Dokaz. Zbog neprekidnosti funkcija $f(x,y),\ x(u,v),y(u,v)$, parcijalnih izvoda

$$\frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial x}{\partial v}\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial v}$$

i Jakobijana $J=\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$, neposredno sledi neprekidnost podintegralnih funkcija sa leve i desne strane formule (3), pa prema tome i egzistencija ovih integrala. Osim toga, ovi integrali mogu se izračunati po formulama

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\lim_{d\to 0}\sum f(x,y)\triangle s,$$

$$\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv=\lim_{d'\to 0}\sum f(x(u,v),y(u,v))|J|\triangle s',$$

gde je $\triangle s'$ površina podeonog pravougaonika P' bilo koje podele oblasti D' iz ravni uOv, $\triangle s$ površina "krivolinijskog" četvorougla P koji je slika pravougaonika P' pri obostrano jednoznačnom preslikavanju

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),$$

a d' i d su odgovarajući dijametri pravougaonika P' i četvorougla P (vidi sliku 2). Zbog neprekidnosti i obostrane jednoznačnosti preslikavanja

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),$$

zaključujemo da $d\to 0 \iff d'\to 0$.

Slika 2

U širim kursevima matematičke analize dokazuje se sledeća formula koja odredjuje odnos površina $\triangle s'$ i $\triangle s$, a ovde se daje bez dokaza i primenjuje za dokazivanje jednakosti (3). Naime imamo da je

$$|J|=\lim_{d\to 0}\frac{\triangle s}{\triangle s'}.$$

Primenom ove formule, uz neposredno uočavanje da je $\triangle s' = \triangle u \triangle v$, nalazimo

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)dxdy &= \lim_{d\to 0}\sum f(x,y)\triangle s,\\ &= \lim_{d'\to 0}\sum f(x(u,v),y(u,v))|J|\triangle s'\\ &= \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv.\blacksquare\end{aligned}$$

Naponena. Formula (3) važi i u slučaju kada uslovi teoreme nisu ispunjeni na nekom podskupu mere nula skupa D^* .

3.1.2. Polarne koordinate. Prelazeći sa Dekartovih koordinata x, y tačke u ravni na njene *polarne koordinate* ρ i θ, tj. uvodeći smenu

$$\begin{aligned}x &= \rho\cos\theta\\ y &= \rho\sin\theta\end{aligned}$$

gde je $\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$, imamo da su x i y neprekidne funkcije od ρ i θ, kao i njihovi parcijalni izvodi:

$$\frac{\partial x}{\partial\theta} = -\rho\sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial\theta} = \rho\cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial\rho} = \cos\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial\rho} = \sin\theta.$$

Osim toga

$$J = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\rho}\\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix} = \rho \neq 0$$

za svaku tačku osim koordinatnog početka.

Na taj način, prema formuli (3) iz predhodne teoreme važi formula

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta,$$

gde je D^* oblast ravni $\rho O\theta$, koja odgovara polaznoj oblasti D.

3.1.3. Primer. Izračunati

$$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

ako je

$$D = \{(x, y) : \pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2\}.$$

Rešenje. Uvodeći polarne koordinate ρ i θ, oblast D preslikava se na skup (videti sliku 3)

Slika 3

$$E = \{(\rho, \theta) : \pi \le \rho \le 2\pi \wedge 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Na osnovu toga je

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy \\
&= \iint\limits_E (\sin\rho)\rho d\rho d\theta \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_\pi^{2\pi} \rho\sin\rho d\rho \\
&= 2\pi([\rho\cos\rho]\Big|_{2\pi}^{\pi} + \int\limits_\pi^{2\pi} cos\rho d\rho d\theta) \\
&= -6\pi^2. \blacklozenge
\end{aligned}$$

3.1.4. Uopštene polarne koordinate. Ponovo za Dekartove koordinate x i y u ravni uvodimo smenu

$$\begin{aligned} x &= a\rho\cos^\alpha\theta \\ y &= b\rho\sin^\alpha\theta \end{aligned},$$

gde je $\rho \ge 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$, a konstante a, b i α su specijalno odabrane. Ovde je

$$J = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = ab\rho\alpha\cos^{\alpha-1}\theta\sin^{\alpha-1}\theta.$$

3.1.5. Primer. Izračunati površinu S ravne figure ograničene krivom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}.$$

Rešenje. Data jednačina krive ima svoj ekvivalentni oblik:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{b}{2k}\right)^2=\frac{a^2}{4h^2}+\frac{b^2}{4k^2}.$$

Moguće je uvesti uopštene polarne koordinate po sledećim formulama:

$$\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}=\rho\cos\theta,\quad \frac{y}{b}-\frac{b}{2k}=\rho\sin\theta.$$

Tada je

$$J=\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=ab\rho.$$

$$0\le\rho\le\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}},\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

Prema tome

$$S=ab\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}}\rho d\rho=\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).\blacklozenge$$

Napomena. Granice za θ odredjuju se iz jednačine krive i iz uslova $\rho\ge 0$ što će se videti iz sledećeg primera.

3.1.6. Primer. Izračunati površinu S ravne figure ograničene krivom:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}\quad (x>0,\quad y>0).$$

Rešenje. Ovde je poželjno uvesti uopštene polarne koordinate po formulama

$$x=a\rho\cos^2\theta,\quad y=b\rho\sin^2\theta.$$

Tada jednačina krive kojom je ograničena površina S dobija oblik

$$\rho=\sqrt{\frac{a^2\cos^4\theta}{h^2}-\frac{b^2\sin^4\theta}{k^2}}.$$

Prema primedbi nakon predhodnog primera granice za θ odredjuju se iz uslova

$$\frac{a^2\cos^4\theta}{h^2}-\frac{b^2\sin^4\theta}{k^2}\ge 0.$$

Posle deljenja ove nejednačine sa $\cos^4\theta$, dobiće se sledeći ekvivalentni uslov

$$\tan^4\theta \le \frac{a^2k^2}{b^2h^2} \iff |\tan\theta| \le \sqrt{\frac{ak}{bh}}.$$

Prema uslovu zadatka $x > 0, \quad y > 0$ (površina je u prvom kvadrantu) odredjujemo granice za θ uslovom

$$0 \le \tan\theta \le \sqrt{\frac{ak}{bh}} \Leftrightarrow 0 \le \theta \le \arctan\sqrt{\frac{ak}{bh}}.$$

Prema uvedenoj smeni Jakobijan

$$J = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = 2ab\rho\sin\theta\cos\theta.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
S &= 2ab \int\limits_0^{\arctan\sqrt{\frac{ak}{bh}}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int\limits_0^{\sqrt{\frac{a^2\cos^4\theta}{h^2}-\frac{b^2\sin^4\theta}{k^2}}} \rho d\rho \\
&= ab \int\limits_0^{\arctan\sqrt{\frac{ak}{bh}}} \left(\frac{a^2}{h^2}\cos^5\theta\sin\theta - \frac{b^2}{k^2}\sin^5\theta\cos\theta\right) d\theta \\
&= \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2cos^6\theta}{h^2} + \frac{b^2\sin^6\theta}{k^2}\right)\Big|_{\arctan\sqrt{\frac{ak}{bh}}}^{0} \\
&= \frac{a^4bk(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2}. \blacklozenge
\end{aligned}$$

(Čitalac se podseća na formule: $\cos\arctan\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}, \quad \sin\arctan\theta = \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$).

3.1.7. Cilindrične koordinate. Pod *cilindričnim koordinatama* tačke (x, y, z) podrazumevaju se brojevi ρ, θ, z gde su ρ, θ polarne koordinate tačke (x, y) y ravni xOy. Kako je ovde :

$$x = \rho\cos\theta, \; y = \rho\sin\theta, \; z = z,$$

to je Jakobijan posmatranog preslikavanja

$$J(\rho, \theta, z) = \rho.$$

Otuda važi rezultat

$$\iiint_G f(x, y, z) dxdydz = \iiint_E f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho d\rho d\theta dz,$$

gde su ρ, θ, z cilindrične koordinate tačke (x, y, z), E original oblasti G pri preslikavanju

$$x = \rho\cos\theta, \ y = \rho\sin\theta, \ z = z.$$

3.1.8. Primer. Izračunati integral

$$\iiint_G (x^2 + y^2 + z)^{20} dxdydz,$$

gde je G cilindar ograničen površima

$$x^2 + y^2 = 1, \ z = 2, \ z = 3.$$

Rešenje. Prelazkom na cilindrične koordinate

$$x = \rho\cos\theta, \ y = \rho\sin\theta, \ z = z,$$

cilindar G preslikava se na pravougaonik E sa ivicama $0 \le \rho \le 1, \ 0 \le \theta \le 2\pi, \ 2 \le z \le 3$, pa je

$$\begin{aligned}
\iiint_G (x^2 + y^2 + z)^{20} dxdydz &= \iiint_E (\rho^2 + z)^{20} dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_2^3 (\rho^2 + z)^{20} dz \\
&= \frac{2\pi}{21} \int_0^1 [(\rho^2 + 3)^{21} - (\rho^2 + 2)^{21}]\rho d\rho \\
&= \frac{\pi}{462}(4^{22} - 2 \cdot 3^{22} + 2^{22}).\blacklozenge
\end{aligned}$$

Vežbe. Izračunati površine ravnih figura ograničenih sledećim krivim linijama:

1. $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy. \quad (S = a^2)$
2. $x^3+y^3 = axy. \quad (S = \frac{a^2}{6})$
3. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3 = \frac{x^2}{h^2}; y>0, a>0, b>0. \quad (S = \frac{a^5b}{10h^4})$
4. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}. \quad (S = \frac{a^3b^3}{60c^4})$
5. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a}-\frac{y}{b}; y>0. \quad (S = \frac{ab}{12})$

3.2 Zamena promenljivih u trojnom integralu.

3.2.1. Teorema. *Neka je funkcija $f(x,y,z)$ neprekidna na ograničenom, merljivom i zatvorenom skupu V sadržanom u prostoru E^3 sa pravouglim sistemom (O,x,y,z), a neprekidne funkcije*

$$x = x(u,v,w); \quad y = y(u,v,w); \quad z = z(u,v,w)$$

obostrano jednoznačno preslikavaju skup V na skup V^* sadržan u prostoru E^3 sa pravouglim sistemom $(O,' u,v,w)$, pri čemu je

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u,v,w) \in V^*.$$

Tada je

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J|dudvdw. \tag{4}$$

3.2.2. Sferne koordinate. Pod *sfernim koordinatama* tačke $M(x,y,z)$ prostora E^3 sa Dekartovim pravouglim koordinatnim sistemom (O,x,y,z), podrazumevaju se brojevi ρ,φ,θ gde je ρ rastojanje tačke $M(x,y,z)$ od koordinatnog početka $O(0,0,0)$, φ ugao izmedju z ose i odsečka OM, a θ je ugaom koji upravna projekcija OM', odsečka OM zaklapa sa x osom (polarni ugao). Iz trigonometrije je poznata veza izmedju koordinata x,y,z i brojeva ρ,φ,θ data sledećim jednačinama:

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = \rho\cos\varphi,$$

pri čemu je $0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Lako se uočava da je ovde $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ i da je

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \\ \rho\cos\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\varphi.$$

3.2.3. Primer. Izračunati integral

$$I = \iiint_G \frac{dxdydz}{1 + \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

ako je

$$G = \{(x,y,z) \in E^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

(kugla poluprečnika 1 sa centrom u koordinatnom početku)

Rešenje. Za posmatranu kuglu G original je pravougaonik

$$E = \{(\rho,\varphi,\theta) \in E^3 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Otuda je

$$I = \iiint_E \frac{\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta}{1+\rho^3} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^2}{1+\rho^3} d\rho = \frac{4\pi}{3}\ln 2. \blacklozenge$$

3.2.4. Uopštene sferne koordinate. Izračunavanje zapremina tela koja su ograničena nekim delovima sfernih površina ili delovima "deformisanih" sfernih površina dosta je olakšano uvodjenjem uopštenih sfernih koordinata sledećim formulama:

$$x = a\rho\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\theta$$
$$y = b\rho\sin^\alpha\varphi\sin^\beta\theta$$
$$z = c\rho\cos^\alpha\varphi,$$

pri čemu je $0 \leq \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Konstante a, b, c, α, β biraju se prema uslovima zadatka, a Jakobijan

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = abc\alpha\beta\rho^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{2\alpha-1}\varphi\sin^{\beta-1}\theta\cos^{\beta-1}\theta.$$

3.2.5. Primer. Izračunati zapreminu tela koje ograničava površ

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1,$$

pri čemu je $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$.

Rešenje. Ovde se koriste uopštene sferne koordinate pri čemu je $\alpha = \beta = 4$. Prema uslovu zadatka $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$, granice za ρ, φ, θ su respektivno

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Prema tome

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = 16abc \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin^7\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos^3\theta d\theta.$$

Primenom identiteta $\cos^3\alpha = (1 - \sin^2\alpha)\cos\alpha$ dobiće se da je

$$V = \frac{abc}{90}.\blacklozenge$$

Vežbe. Izračunati zapremine tela koja su ograničena sledećim površima.

1. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x}{h}. \quad (V = \frac{\pi a^2 bc}{3h})$
2. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = \frac{z}{k}. \quad (V = \frac{\pi^2}{6}\frac{abc^2}{h})$
3. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}; x > 0, y > 0, z > 0.$
$(V = \frac{abc}{60}\left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right))$
4. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{h} - \frac{y}{k}; x > 0, y > 0, z > 0. \quad (V = \frac{abc}{60}\frac{hk}{ak+bh}\left(\frac{a}{h}\right)^4)$
5. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{h}; x > 0, y > 0, z > 0. \quad (V = \frac{abc}{60}\frac{h(5c+4h)}{(c+h)^2})$
6. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{x^2}{c^2} = \frac{x}{h} - \frac{y}{k}; x > 0, y > 0, z > 0. \quad (V = \frac{\pi abc}{64}\frac{hk}{ak+bh}\left(\frac{a}{h}\right)^4)$

Uputstvo: Zadatke 4, 5, 6 rešavati prema primeru 3.1.6