JEDNAČINA SA TOTALNIM DIFERENCIJALOM

Neka je data diferencijalna jednačina:

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0.$$

Ako je ispunjen uslov:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

pa je leva strana date jednačine totalni diferencijal *du* neke funkcije dve nezavisno promenljive, tada je:

$$du = P\, dx + Q\, dy = 0$$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\quad Q = \frac{\partial u}{\partial y},$$

a opšti integral je:

$$u(x, y) = C.$$

$$u = C = \int P\, dx + \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P\, dx \right] dy.$$

Na primer, kod jednačine:

$$(3x^2 + 6xy^2)\, dx + (6x^2 y + 4y^2)\, dy = 0$$

je

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy = \frac{\partial P}{\partial y},$$

pa je opšti integral:

$$C = \int (3x^2 + 6xy^2)\, dx + \int \left[6x^2 y + 4y^2 - \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + 3x^2 y^2) \right] dy =$$

$$= x^3 + 3x^2 y^2 + \int [6x^2 y + 4y^2 - 6x^2 y]\, dy = x^3 + 3x^2 y^2 + 3x^2 y^2$$

$$+ \frac{4y^3}{3} - 3x^2 y^2 = x^3 + 3x^2 y^2 + \frac{4y^3}{3}.$$

Ponekad jednačina $P\, dx + Q\, dy = 0$

nije jednačina sa totalnim diferencijalom, ali to postane posle množenja nekim *integracionim faktorom* $\lambda(x, y)$.

Dobijena parcijalna jednačina po λ može biti još teža od polazne. Ipak, za specijalne oblike λ, kada, na primer, λ zavisi samo od x ili samo od y, ovaj postupak može voditi cilju.

Na primer, za jednačinu:

Primer. Data je diferencijalna jednačina

$$(x-y^2)dx+2xydy=0.$$

naći njen opšti integral.

Rešenje. Ovde je

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2y\wedge\frac{\partial Q}{\partial x}=2y$$

odnosno

$$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Kako je

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{-2y-2y}{2xy}=-\frac{2}{x},$$

to se može naći integracioni faktor $\lambda(x)$, jer je

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=-\frac{2}{x}dx \text{ odnosno } \lambda=\frac{1}{x^2}.$$

Jednačina

$$\frac{1}{x^2}[(x-y^2)dx+2xydy]=0,$$

je totalni diferencijal neke funkcije $U(x,y)=C$. U ovom slučaju je

$$U(x,y)=\int\frac{2y}{x}dy+\psi(x)$$

odnosno

$$U(x,y)=\frac{y^2}{x}+\psi(x),$$

gde je $\psi(x)$ neka funkcija od x. Kako je

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{x-y^2}{x^2},$$

to je

$$\frac{x-y^2}{x^2}=-\frac{y^2}{x^2}+\psi'(x).$$

Odavde je

$$\psi'(x)=\frac{1}{x} \text{ odnosno } \psi(x)=\ln|x|.$$

Opšti integral zadate diferencijalne jednačine je

$$\frac{y^2}{x}+\ln|x|=C.\blacklozenge$$

Kleroova i Lagranževa diferencijalna jednačina

Jednačina po nepoznatoj funkciju y oblika

$$y = xy' + f(y'), \tag{20}$$

gde je f data diferencijabilna funkcija naziva se *Kleroova diferencijalna jednačina.* Razume se da ova jednačina nije ekplicitno rešena po y. Stavljajući $y' = p$ u (20), dobiće se

$$y = xp + f(p), \tag{21}$$

odakle, diferenciranjem po x, izlazi

$$(x + f'(p))p' = 0$$

Ako je $p' = 0$, biće $p = C$ (C je proizvoljna konstanta) i prema (21) dobiće se opšte rešenje jednačine (20) u obliku

$$y = Cx + f(C).$$

Ako je $x + f'(p) = 0$, tada se eliminacijom p iz jednačina

$$x + f'(p) = 0 \wedge y = xp + f(p),$$

~~prema prethodnom odeljku,~~ dobija obvojnica familije pravih

$$\mathfrak{P} : y = Cx + f(C),$$

koja je sigularno rešenje Kleroove jednačine

Primer. Rešiti Kleroovu diferencijalnu jednačinu

$$y = xy' + \frac{a}{y'}. \tag{$*$}$$

Rešenje.

Ako se uvede parametar $y' = p$ i jednačina $(*)$ diferencira po x, dobiće se:

$$p = p + [x - \frac{a}{p^2}]p', \qquad (**)$$

odavde je

$$[x - \frac{a}{p^2}]p' = 0.$$

Jednačina (2) biće zadovoljena ako je:

1^o. $p' = 0$, odakle je $p = C$. Zamenom vrednosti $p = C$ u jednačinu $(*)$ dobiće se opšti integral jednačine $(*)$:

$$y = Cx + \frac{a}{C}.$$

2^o. $x - \frac{a}{p^2} = 0$, odavde je $p = \pm\sqrt{\frac{a}{x}}$, odnosno posle zamene u jednačinu $(**)$ $y^2 = 4ax$, i to pretstavlja singularno rešenje jednačine $(*)$. Do istog rezultata se dolazi eliminisanjem konstante C iz jednačina

$$\begin{aligned} y - Cx - \frac{a}{C} &= 0 \\ -x + \frac{a}{C^2} &= 0 \end{aligned}$$

što znači da je singularni integral $y^2 = 4ax$ obvojnica pravih linija pretstavljenih opštim integralom.♦

Jednačina oblika

$$y = xf(y') + g(y'), \qquad (22)$$

gde su f i g date diferencijabilne funkcije, naziva se *Lagranževa* diferencijalna jednačina.

Ova jednačina rešava se istom metodom kao i Kleroova jednačina. Uzimajući da je $y' = p$ i posle diferenciranja dobija se

$$(f(p) - p)\frac{dx}{dp} + f'(p)x = -g'(p). \qquad (23)$$

Primer. Rešiti Lagrangževu diferencijalnu jednačinu

$$y = 2xy' + {y'}^2. \tag{$*$}$$

Rešenje.

Ako stavimo $y' = p$ dobićemo jednačinu

$$y = 2xp + p^2. \tag{$**$}$$

Diferenciranjem jednačine (2) po x dobijamo

$$p = 2p + 2(x+p)p',$$

odnosno ako se x posmatra kao funkcija od p

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - 2 \tag{$***$}$$

i to je linearna jednačina po x. Njeno opšte rešenje dobijamo smenom $x = uv$, gde su u i v funkcije od p.

Zamenom $x = uv$ i $x'_p = u'v + uv'$ u jednačinu dobijamo

$$u'v + u\big(v' + \frac{2v}{p}\big) = -2.$$

Kako je za $v = \frac{1}{p^2}$, faktor uz u jednak nuli, to je

$$u'\frac{1}{p^2} = -2,$$

odavde je $u = -\frac{2}{3}p^3 + C$, pa je opšte rešenje linearne jednačine $(***)$

$$x = uv = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}, \tag{$****$}$$

ako se $(****)$ unese u jednačinu $(**)$ dobija se

$$y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}.$$

Opšte rešenje jednačine $(*)$ u parametarskom obliku

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}$$
$$y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}.$$

($y = 0$ je takođe rešenje diferencijalne jednačine.)♦

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA

OPŠTE I PARTIKULARNO REŠENJE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA

Opšti oblik diferencijalne jednačine drugog reda je

$$F(x, y, y', y'')=0,$$

ili

$$y''=f(x, y, y').$$

Definicija 1. *Opštim rešenjem diferencijalne jednačine drugog reda naziva se funkcija* $y=y(x, C_1, C_2)$, *koja sadrži dve proizvoljne konstante* C_1 *i* C_2, *takva da:*

1° *Zadovoljava diferencijalnu jednačinu za proizvoljne vrednosti konstanata* C_1 *i* C_2;

2° *Za date početne uslove*

$$y\,|_{x=x_0}=y_0, \quad y'\,|_{x=x_0}=y_0'$$

moguće je odrediti vrednosti konstanata C_1 *i* C_2, *tako da funkcija* $y=y(x, C_1, C_2)$ *predstavlja rešenje koje zadovoljava uslove*

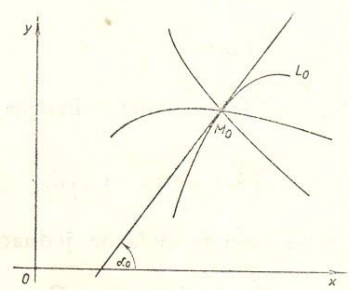
$$y_0=y(x_0, C_1, C_2), \quad y_0'=y'(x_0, C_1, C_2).$$

Pri tome x_0, y_0, y_0', treba da pripadaju skupu vrednosti respektivno za x, y, y' za koje su ispunjeni uslovi teoreme o egzistenciji i jedinosti rešenja. U navođenje ovih uslova i analizu pitanja egzistencije nećemo ulaziti u ovome kursu.

Relacija oblika

$$\Phi(x, y, C_1, C_2)=0,$$

koji implicitno definiše opšte rešenje jednačine drugog reda naziva se *opštim integralom* date diferencijalne jednačine. Svaka funkcija dobijena iz opšteg rešenja, dajući konstantama C_1 i C_2 konkretne vrednosti naziva se *partikularnim rešenjem* diferencijalne jednačine.



Sl. 8.3.1a

Geometrijska interpretacija. Geometrijski, opšte rešenje predstavlja skup integralnih krivih i ono zavisi od dva nezavisna parametra C_1 i C_2. Zato uopšte kroz jednu tačku $M_0(x_0, y_0)$ prolazi ne jedna, već familija integralnih krivih. Za određivanje jedne fiksirane krive L_0 treba, pored tačke M_0, poznavati koeficijent pravca tangente na tu krivu u tački M_0, tj.

$$\operatorname{tg}\alpha_0=y_0'.$$

Na taj način iz sistema jednačina

$$y_0=y(x_0, C_1, C_2), \quad y_0'=y'(x_0, C_1, C_2)$$

možemo odrediti konstante C_1 i C_2 i doći do partikularnog rešenja $y=\Psi(x)$, koje zadovoljava datu diferencijalnu jednačinu i date početne uslove

$$y\,|_{x=x_0}=y_0, \quad y'\,|_{x=x_0}=y_0'.$$

Određivanje integralne krive L_0 na izloženi način predstavlja rešenje tzv. *Cauchyevog problema.*

Diferencijalne jednačine koje ne sadrže y

Najpre razmatramo jednačine oblika

$$F(x, y', y'') = 0. \tag{25}$$

Uvođenjem nove nepoznate funkcije z smenom $y' = z$ i $z' = y''$ diferencijalna jednačina (25) dobija oblik

$$F(x, z, z') = 0, \tag{26}$$

a to je diferencijalna jednačina prvog reda. Ako je opšte rešenje jednačine (26)

$$z = f(x, C_1),$$

prema uvedenoj smeni biće

$$y' = f(x, C_1). \tag{27}$$

Integracijom jednačine (27) dobiće se opšte rešenje jednačine (25)

$$y = \int f(x, C_1)dx + C_2.$$

Primer. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$xy'' + y' = 4x.$$

Rešenje:

$$xy'' + y' = 4x / : x$$
$$y'' + \frac{1}{x}y' = 4.$$

Posle smene $y' = z$, odnosno $y'' = z'$ dobiće se linearna jednačina $z' + \frac{1}{x}z = 4$ pa je

$$z = e^{-\int \frac{dx}{x}}(C_1 + 4\int e^{\int \frac{dx}{x}}dx)$$
$$= \frac{C_1}{x} + 2x.$$

Dakle,

$$y = \int (\frac{C_1}{x} + 2x)dx + C_2$$
$$= C_1 \ln x + x^2 + C_2.\blacklozenge$$

Diferencijalne jednačine koje ne sadrže x

Kao i u prethodnom odeljku najpre razmatrmo jednačine oblika

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{28}$$

Može se uvesti smena $y' = z$. Tada je

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$$

pa jednačina (28) postaje diferencijalna jednačina prvog reda

$$F(y, z, z\frac{dz}{dy}) = 0. \tag{29}$$

Neka je $z = f(y.C_1)$ opšte rešenje jednačine (29). Tada je $y' = f(y, C_1)$ tj. $\frac{dy}{dx} = f(y, C_1)$, a ovo je jednačina što razdvaja promenljive.

$$\frac{dy}{f(y, C_1)} = dx.$$

Integracijom poslednje jednačine dobiće se

$$x + C_2 = \int \frac{dy}{f(y, C_1)},$$

a to je opšte rešenje jednačine (28).

Primer. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$2yy' = y''.$$

Rešenje: Smenom $y' = z, \quad y'' = z\frac{dz}{dy}$ data jednačina postaje

$$2yz = z\frac{dz}{dy} / : z$$
$$dz = 2ydy.$$

Posle intergracije

$$z = y^2 + C_1^2$$
$$y' = y^2 + C_1^2$$
$$\frac{dy}{dx} = y^2 + C_1^2$$
$$dx = \frac{dy}{y^2 + C_1^2}.$$

Integracijom poslednje jednačine dobiće se

$$x + C_2 = \int \frac{dy}{y^2 + C_1^2} = \frac{1}{C_1} \arctan \frac{y}{C_1}.$$

Ili kraće

$$\frac{y}{C_1} = \tan(C_1 x + C_1 C_2) \blacklozenge$$

Jednačine homogrne po $y, y', \ldots, y^{(n)}$

Neka je u jednačini $F(x, y, y', y'') = 0$ funkcija F homogena po y, y', y'' stepena homogeniteta k tj. za funkciju F važi

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^k F(x, y, y', y'').$$

Ako je $t = \frac{1}{y}$ dobiće se jednačina oblika

$$F(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}) = 0$$

Uvođenjem nove nepoznate funkcije $z = z(x)$ smenom $y = e^z, \quad y' = e^z z', \quad y'' = e^z[(z')^2 + z'']$ dobiće se jednačina

$$F[x, 1, z', (z')^2 + z''] = 0.$$

Novom smenom $z' = u, \quad z'' = u'$ poslednja jednačina postaje diferencijalna jednačina prvog reda.

$$F(x, 1, u, u^2 + u') = 0.$$

Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$xyy'' + xy'^2 = yy'.$$

Rešenje: Ako se uvede smena $x = e^z$, tada je

$$y' = \frac{dy}{dz}e^{-z} \wedge y'' = \left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)e^{-2z}.$$

Zamenom y', y'' u zadatoj jednačini dobiće se

$$y\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{dy}{z}\right)^2 = 2y\frac{dy}{dz}.$$

Ova jednačina ne sadrĭ novu nezavisno promenljivu z pa se može rešiti na uobičajeni način smenom:

$$z' = u, \wedge z'' = u\frac{du}{dy}.$$

Međutim ova jednačina se može rešiti i na drugi način. Kako su obe strane date jednačine izvodi po z, tj.

$$\frac{d}{dz}\left(y\frac{dy}{dz}\right) = \frac{d}{dz}(y^2)$$

pa je

$$y\frac{d}{dz} = y^2 + C_1,$$

a ovo je jednačina koja razdvaja promenljive i njeno rešenje je

$$y^2 + C_1 = C_2e^{2z}$$

i posle vraćanja na smenu $x = e^z$

$$y^2 + C_1 = C_2x^2. \blacklozenge$$

Linearna diferencijalna jednačina reda n

Definicija.

(a) Diferencijalna jednačina oblika

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = F(x), \tag{30}$$

gde su $f_i(x)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i $F(x)$ date funkcije promenljive x, naziva se *linearna diferencijalna jednačina n-tog reda.*

(b) Ako je $F(x) \equiv 0$, jednačina (30) je *homogena* ; ako je $F(x) \neq 0$, jednačina (30) je *nehomogena* .

(c) Ako su funkcije $f_1, \ldots, f_n$ konstante, jednačina (30) naziva se *linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima* .

Teorema. *Neka je poznato opšte rešenje homogene jednačine*

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = 0. \tag{31}$$

Tada se može odrediti opšte rešenje nehomogene jednačine

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = F(x). \tag{32}$$

Dokaz. Neka je $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$ opšte rešenje jednačine (31). Može se predpostaviti da su $C_1, \ldots, C_n$ diferencijabilne funkcije od x.

Tada je

$$y = C_1(x)y_1 + \cdots + C_n(x)y_n$$

opšte rešenje jednačine (32).■

Postupak kojim je dokazana ova teorema poznat je kao *Lagranžev metod varijacije konstanata*, a u nekim udžbe nicima se sama teorema naziva *medod varijacije konstanata.*

Linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima

To je jednačina oblika

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = \begin{cases} 0 \\ f(x) \end{cases} \tag{36}$$

gde su a_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ realne konstante. Najpre razmatramo homogenu jednačinu:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{37}$$

Smenom $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^n e^{kx}$ jednačina (37) transformiše se u

$$e^{kx}(a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_n) = 0,$$

pa se zadatak svodi na rešavanje algebarske jednačine po k oblika

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{38}$$

Jednačina (38) poznata je kao *karakteristična jednačina* jednačine (37). Neposredno se proverava da je e^{kx} rešenje jednačine (37) u slučaju kada je k koren karakteristične jednačine.

ЛИНЕАРНА НЕХОМОГЕНА ДЈ
СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n y(x) = f(x),\ n \geq 1$$

одговарајућа хомогена

$$\boxed{a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n y(x) = 0} \quad \dots (*)$$

решење хомогене ДЈ тражимо у облику: $y = e^{kx}$

$y' = ke^{kx}$

$y'' = k^2 e^{kx}$

$\vdots$

$y^{(n)} = k^n e^{kx}$

$(*)\quad e^{kx}(a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n) = 0$

КЈ: $\boxed{a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0}$ (алгебарска једначина по k)

$\Rightarrow$ (основна теорема алгебре) има тачно n реалних или комплексних нула

(I) $k_1, \dots, k_n$ реални и различити

$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}$

опште решење

(II) k неки корен реалан са вишеструкошћу r тада њему одговара r партикуларних решења и део општег решења који одговара овим партикуларним решењима гласи:

$y(x) = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} + \dots + C_r x^{r-1} e^{kx}$

(III) $k_1 = a + ib$ корен са вишеструкошћу r

$\Downarrow$

$\Rightarrow$ $k_2 = a - ib$ корен са вишеструкошћу одговарају им партикуларна решења

$y_1 = e^{ax}\cos bx$

$y_2 = x e^{ax}\cos bx$

$\vdots$

$y_r = x^{r-1} e^{ax}\cos bx$

$y_{r+1} = e^{ax}\sin bx$

$y_{r+2} = x\, e^{ax}\sin bx$

$\vdots$

$y_{2r} = x^{r-1} e^{ax}\sin bx$

Primer Linearna homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$y''+3y'-10y=0$$

ima karakterističnu jednačinu

$$k^2+3k-10=0.$$

Ovde je $\Delta=\frac{49}{4}>0$, te su koreni jednačine $k_1=2$, $k_2=-5$.

Fundamentalni sistem partikularnih rešenja je

$$y_1=e^{2x},\ y_2=e^{-5x},$$

te će opšte rešenje date jednačine biti

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}.$$

Primer Za linearnu homogenu diferencijalnu jednačinu

$$y''-4y'+4y=0$$

karakteristična jednačina je

$$k^2-4k+4=0.$$

Ovde je diskriminanta $\Delta=0$, te je njen dvostruki koren $k=2$.

Fundamentalni sistem partikularnih rešenja je

$$y_1=e^{2x},\ y_2=xe^{2x},$$

pa je opšte rešenje jednačine

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}.$$

Primer 3. Za linearnu homogenu diferencijalnu jednačinu s konstantnim koeficijentima

$$y''-4y'+13\,y=0$$

karakteristična jednačina je

$$k^2-4k+13=0.$$

Ovde je diskriminanta $\Delta=-36<0$, te su rešenja ove jednačine

$$k_1=2+3i,\ k_2=2-3i,$$

tj. $\alpha=2$, $\beta=3$, pa je opšte rešenje

$$y=e^{2x}\,(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine.

$$y^{(6)} - 6y^{(5)} + 18y^{(4)} - 6y^{(3)} - 75y'' + 120y' - 52y = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina za datu diferencijalnu jednačinu je sledeći polinom po k

$$k^6 - 6k^5 + 18k^4 - 6k^3 - 75k^2 + 120k - 52 = 0$$

koji se faktoriše u obliku

$$(k-1)^2(k^2-4)(k^2-4k+13) = 0.$$

Dakle, koreni karakteristične jednačine su respektivno

$$k_1 = -2, k_2 = 2, k_3 = k_4 = 1, k_5 = 2+3i, k_6 = 2-3i$$

pa su linearno nezavisna rešenja $y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^x, y_4 = xe^x, y_5 = e^{2x}\cos 3x, y_6 = e^{2x}\sin 3x$. Prema tome, opšte rešenje je

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + C_3e^x + C_4xe^x + C_5e^{2x}\cos 3x + C_6e^{2x}\sin 3x. \blacklozenge$$

Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine.

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}.$$

Rešenje. Odgovarajuća homogena diferencijalna jednačina je

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Karakteristična jednačina ove diferencijalne jednačine je

$$k^2 + 3k + 2 = 0$$

i njeni koreni su

$$k_1 = -2, \quad k_2 = -1.$$

Opšte rešenje homogenog dela date diferencijalne jednačine je

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Prema opisanoj metodi u Teoremi o varijaciji konstanata, smatraće se da su C_1 i C_2 funkcije od x i formirati sledeći sistem:

$$\begin{aligned} C_1' e^{-2x} + C_2' e^{-x} &= 0, \\ -2C_1' e^{-2x} - C_2' e^{-x} &= \frac{1}{1+e^x}, \end{aligned}$$

pa je

$$C_1' = -\frac{e^{2x}}{1+e^x} \wedge C_2' = \frac{e^x}{1+e^x}$$

te je posle integracije

$$\begin{aligned} C_1 &= \ln(e^x + 1) - e^x + D_1, \\ C_2 &= \ln(e^x + 1) + D_2. \end{aligned}$$

Dakle, opšte rešenje polazne jednačine je oblika

$$y = [\ln(e^x + 1) - e^x + D_1] e^{-2x} + [\ln(e^x + 1) + D_2] e^{-x}. \blacklozenge$$

Partikularna rešenja za nehomogenu jednačinu

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = F(x).$$

Desna strana diferencijalne jed.	Koreni karakteristične jed.	Oblik part. rešenja
$F(x) = P_m(x)$ gde je $P_m(x)$- polinom stepena m	a) broj 0 nije koren karakteristične jednačine	$Q_m(x)$, gde je polinom stepena ne višeg od m
	b) broj 0 je koren karakteristične jednačine reda l	$x^l Q_m(x)$
$F(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$ gde je α- realan broj	a) broj α nije koren karakteristične jednačine	$Q_m(x)e^{\alpha x}$ polinom stepena ne višeg od m
	b) broj α je koren karakteristične jednačine reda l	$x^l Q_m(x)e^{\alpha x}$
$F(x) =$ $P_m(x)\cos\beta x +$ $+Q_m(x)\sin\beta x$, gde su $P_m(x)$ i $Q_m(x)$-polinomi stepena ne višeg od m i jedan od njih ima stepen m	a) broj $i\beta$ nije koren karakteristične jednačine	$u_m(x)\cos\beta x$ $+v_m(x)\sin\beta x$, gde su $u_m(x)$ i $v_m(x)$-polinomi stepena ne višeg od m
	b) broj $i\beta$ je koren karakteristične jednačine reda l	$x^l[u_m(x)\cos\beta x$ $+v_m(x)\sin\beta x]$
$F(x) =$ $e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x$ $+Q_m(x)\sin\beta x]$,	a) broj $\alpha + i\beta$ nije koren karakteristične jednačine	$e^{\alpha x}[u_m(x)\cos\beta x$ $+v_m(x)\sin\beta x]$
	b) broj $\alpha + i\beta$ je koren karakteristične jednačine reda l	$x^l e^{\alpha x}$ $[u_m(x)\cos\beta x$ $+v_m(x)\sin\beta x]$

Primer. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}.$$

Rešenje. Karateristična jednačina date jednačine je

$$k^2 - 3k + 2 = 0.$$

Njeni koreni su $k_1 = 1, \quad k_2 = 2$.

Opšte rešenje homogene jednačine (homogenog dela) date jednačine

$$y_h = C_1 e^x + C2e^{2x}.$$

Prema izloženoj šemi partikularno rešenje y_p biće oblika

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}.$$

Zamenom y_p, y_p', y_p'' u polaznoj jednačini i posle skraćivanja sa e^3x dobiće se sledeći identitet

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) \equiv x^2 + x.$$

Pa je

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -1, \quad C = 1.$$

Prema tome,

$$y_p = (\frac{1}{2}x^2 - x + 1)e^{3x}.$$

Dakle, opšte rešenje date nehomogene jednačine je oblika

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (\frac{1}{2}x^2 - x + 1)e^{3x}. \blacklozenge$$

Ojlerova diferencijalna jednačina

Linearna jednačina oblika

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = F(x)$$

gde su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstante naziva se *Ojlerova* diferencijalna jednačina. Uvođenjem nove nezavisno promenljive smenom $x = e^t$ dobiće se

$$y' = \frac{\dot{y}}{e^t}, \quad y'' = \frac{\ddot{y} - \dot{y}}{e^{2t}}, \quad y''' = \frac{\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}}{e^{3t}}, \ldots$$

gde je

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}, \ \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots, x^k = e^{kt}, \ k \in \{1, \ldots, n\}$$

data jednačina svodi se na linearnu diferencijalnu jednačinu n-tog reda sa konstantnim koeficijentima.

Na isti način rešava se i jednačina oblika:

$$A_0(ax+b)^n y^{(n)} + A_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(ax+b)y' + A_n y = F(x).$$

Naime smenom $ax+b=e^t$ i ova jednačina svodi se na linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

Primer Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 1 + x^2.$$

Rešenje. Posle smene $x = e^t$, $t = \ln x$, $x^2 = e^{2t}$, $y' = \frac{\dot{y}}{e^t}$, $y'' = \frac{\ddot{y}-\dot{y}}{e^{2t}}$ dobija se linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 1 + e^{2t}$$

Opšte rešenje ove diferencijalne jednačine je

$$y = C_1e^t + C_2e^{-2t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2t}.$$

Vraćanjem na smenu $t = \ln x$ dobija se opšte rešnje date jednačine

$$y = C_1x + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2. \blacklozenge$$