# V GLAVA

# ELEMENTI DIFERENCIJALNE GEOMETRIJE I TEORIJE POLJA

## 1. ELEMENTI VEKTORSKE ANALIZE

### 1.1. Vektorska funkcija jedne promenljive, granična vrednost i neprekidnost

**1.1.1. Definicija.** Neka je $T$ podskup skupa realnih brojeva i $E^3$ euklidski trodimenzionalni vektorski prostor. Svako jednoznačno preslikavanje $\vec{r}$ sa skupa $T$ u $E^3$ predstavlja jednu vektorsku funkciju $\vec{r} = \vec{r}(t)$ sa domenom $T$ i kodomenom u $E^3$.

U ovoj definiciji u zavisnosti od vrste razmatranog zadataka pod vektorom $\vec{r}$ može se podrazumevati slobodni vektor ili vektor sa početkom u jednoj fiksnoj tački(*radius vektor*). Kako je uobičajeno da se vektor $\vec{r}$ iz $E^3$ predstavlja kao uredjena trojka ili linearna kombinacija baznih vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ to će nadalje vektorska funkcija biti predstavljena u obliku

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in T$$

ili

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in T. \tag{1}$$

U daljem tekstu skup $T$ predstavljaće neki odsečak $[a, b]$ realne prave. Dužina vektora $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ označavaće se sa

$$|\vec{r}| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}, \tag{2}$$

skalarni poizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ sa $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , a vektorski proizvod sa $\vec{a} \times \vec{b}$.

Ako promenljiva $t$ "prolazi" interval $[a, b]$ i vektor $\vec{r}(t)$ je vezan za koordinatni početak $O$, onda se geometrisko mesto tačaka njegovih krajeva naziva *hodografom* vektorske funkcije $\vec{r}(t)$ (videti sliku 1).

**1.1.2. Definicija.** Neka je vektorska funkcija $\vec{r}(t)$ definisana u nekoj okolini tačke $t_0$, izuzev, može biti, u samoj tački $t_0$, i neka je $\vec{a}$ neki vektor. Vektor $\vec{a}$ naziva se graničnom vrednošću ( limesom ) funkcije $\vec{r}(t)$ kada $t \to t_0$ i piše se $\vec{a} = \lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)$ ako za svako $\epsilon > 0$ egzistira $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tako da je za sve $t \neq t_0$ za koje je $|t - t_0| < \delta$, zadovoljena nejednakost

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| < \epsilon.$$

Polazeći od relacije

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| = \sqrt{[x(t) - a_1]^2 + [y(t) - a_2]^2 + [z(t) - a_3]^2}$$

i ako je $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ , $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, neposredno se primećuje da bi važila jednakost

$$\vec{a} = \lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)$$

potrebno je i dovoljno da je

$$a_1 = \lim_{t\to t_0} x(t), \quad a_2 = \lim_{t\to t_0} y(t), \quad a_3 = \lim_{t\to t_0} z(t)$$

Pri rešavanju zadataka koriste se sledeća svojstva limesa vektorskih funkcija

(1) $$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \Rightarrow \lim_{t\to t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{a}|,$$

(2) $$\lim_{t\to t_0} [\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)] = \lim_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \pm \lim_{t\to t_0} \vec{r}_2(t),$$

(3) $$\lim_{t\to t_0} f(t)\vec{r}(t) = \lim_{t\to t_0} f(t) \lim_{t\to t_0} \vec{r}(t),$$

(4) $$\lim_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t) = \lim_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \lim_{t\to t_0} \cdot \vec{r}_2(t),$$

(5) $$\lim_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t) = \lim_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \times \lim_{t\to t_0} \vec{r}_2(t).$$

**1.1.3. Definicija.** Vektorska funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$, definisana u nekoj okolini tačke $t_0$, je *neprekidna* u tački $t_0$, ako je

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0).$$

Vektorska funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$ je *neprekidna* ako je neprekidna u svakoj tački oblasti definisanosti.

Ako je vektorska funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$, data u obliku $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, lako se dokazuje, da je neprekidna onda i samo onda ako su neprekidne funkcije $x(t), y(t), z(t)$. Prema datim svojstvima limesa vektorske funkcije, takodje se lako dokazuje, da je za dve neprekidne vektorske funkcije, neprekidna funkcija koja je, suma, skalarni i vektorski proisvod kao i funkcija koja je proizvod neprekidne skalarne i neprekidne vektorske funkcije.

## 1.2. Izvod i diferencijal vektorske funkcije, viši izvodi i diferencijali. Tejlorova formula

**1.2.1. Definicija.** Neka je vektorska funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$ definisana u nekoj okolini tačke $t_0$. Ako egzistira limes

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t},$$

onda se on naziva *prvim izvodom* date vektorske funkcije u tački $t_0$ i označava se sa $\vec{r}\,'(t_0)$. Vektor $\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ je *priraštaj* vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ u tački $t_0$ i označava se sa $\Delta\vec{r}$.

Pravac vektora $\vec{r}\,'(t_0)$ je tangenta hodografa u tački $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, smer odgovara rašćenju argumenta $t$, a modul je

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right|.$$

Vektorska funkcija $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$, definisana u nekoj okolini tačke $t_0$, ima prvi izvod u tački $t_0$ onda i samo onda ako u ovoj tački imaju prve izvode funkcije $x(t), y(t), z(t)$ i pri tome je

$$\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)),$$

$$|\vec{r}\,'(t_0)| = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0)}. \tag{3}$$

**1.2.2. Definicija.** Vektorska funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$, definisana u nekoj okolini tačke $t_0$, naziva se *diferencijabilnom* u toj tački , ako je njen priraštaj $\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ dat formulom

$$\Delta\vec{r} = \vec{a}\Delta t + \vec{\epsilon}(\Delta t)\Delta t, \tag{4}$$

pri čemu je

$$\lim_{\Delta t \to 0} \vec{\epsilon}(\Delta t) = \vec{0}.$$

Linearna vektorska funkcija $\vec{a}\Delta t$ naziva se *diferencijalom* vektorske funkcije $\vec{r}(t)$ u tački $t_0$ i označava se sa $d\vec{r} = \vec{a}\Delta t$ :

$$\Delta\vec{r} = d\vec{r} + \vec{\epsilon}(\Delta t)\Delta t. \tag{5}$$

Iz formule (5) predhodne definicije, neposredno se primećuje, da je svaka diferencijabilna vektorska funkcija neprekidna. Šta više, vektorska funkcija $\vec{r}(t)$ ima prvi izvod u tački $t_0$ onda i samo onda ako je diferencijabilna u tački $t_0$.

**1.2.3. Teorema.** *Neka su* $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$, $f(t)$ *neprekidne, diferencijabilne funkcije argumenta* $t$. *Tada je*

$1^0$ $[a(\vec{t}) \pm b(\vec{t})]' = a'(\vec{t}) \pm b'(\vec{t})$,

$2^0$ $[f(t)\vec{a}(t)]' = f'(t)\vec{a}(t) + f(t)\vec{a}\,'(t)$,

$3^0$ $[\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)]' = a'(\vec{t}) \cdot b(\vec{t}) + a(\vec{t}) \cdot b'(\vec{t})$,

$4^0$ $[\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)]' = a'(\vec{t}) \times b(\vec{t}) + a(\vec{t}) \times b'(\vec{t})$,

$5^0$ $\vec{a}[f(t)]' = a'[\vec{f}(t)]f'(t)$.

$6^0$ *Ako je* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *konstanta ( priraštaj* $\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t) = \vec{0}$*), onda je* $\vec{r}\,' = \vec{0}$

**Dokaz.** Ovde se daje dokaz svojstva $3^0$, preostala svojstva, dokazuju se analogno postupku koji se daje u matematičkoj analizi. Prema definiciji izvoda

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \cdot \vec{b})' &= \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\Delta t} \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{(\vec{a} + \Delta\vec{a})(\vec{b} + \Delta\vec{b}) - \vec{a} \cdot \vec{b}}{\Delta t} \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{b}\Delta\vec{a} + \vec{a}\Delta\vec{b} + \Delta\vec{a}\Delta\vec{b}}{\Delta t} \\
&= \vec{b} \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t} + \vec{a} \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta\vec{b}}{\Delta t} + \lim_{t \to t_0} \Delta\vec{a} \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta\vec{b}}{\Delta t}.
\end{aligned}$$

Kako je

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}=\vec{a}\,', \quad \lim_{t\to t_0}\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta t}=\vec{b}\,',$$

a zbog neprekidnosti funkcije $\vec{a}(t)$ je

$$\lim_{\Delta t\to t_0}\Delta\vec{a}=0,$$

pa je

$$[\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)]'=\vec{a'(t)}\cdot\vec{b(t)}+\vec{a(t)}\cdot\vec{b'(t)}.\blacksquare$$

**1.2.4. Posledica.** Neposrednom primenom svojstva $2^0, 3^0$ i $6^0$ može se zaključiti da :

(a) Ako je $\vec{r}(t)$ vektor konstantnog pravca, onda je on kolinearan sa izvodnim vektorom $\vec{r}\,'(t)$.

(b) Ako je $\vec{r}(t)$ vektor konstantnog intenziteta, onda su vektori $\vec{r}(t)$ i $\vec{r}\,'(t)$ uzajamno ortogonalni.

(c) Izvod vektorske funkcije $\vec{r}(t)=r(t)\vec{r}_0(t), \quad (\vec{r}_0=ort\vec{r})$ je razložen u dve komponente i to: $\left(\frac{dr}{dt}\right)\vec{r}_0$, komponentu kolinearnu sa vektorom $\vec{r}$ i $r\left(\frac{d\vec{r}_0}{dt}\right)$, komponentu normalnu na nosaču tog vektora.

(d) Ako je jedinični vektor $\vec{a}_0$ vektorska funkcija skalarnog argumenta $t$, tj. $\vec{a}_0=\vec{a}_0(t)$, njegov hodograf je sadržan na sferi poluprečnika 1. Osim toga,

$$|\vec{a}_0(t+\Delta t)|=|\vec{a}_0(t)|.$$

Zato je $\triangle OMN \quad (O(0,0,0), M(\vec{a}_0(t)), N(\vec{a}_0(t+\triangle t)))$ ravnokrak. Priraštaj vektorske funkcije $\vec{a}_0(t)$ je $\Delta\vec{a}_0(t)=\overrightarrow{MN}$. Neka je $\Delta\alpha$ ugao izmedju duži $OM$ i $ON$, pošto je $OM=1$, $|\Delta\vec{a}_0(t)|=|\vec{MN}|=2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}$. Na osnovu toga je

$$\left|\frac{d\vec{a}_0}{dt}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{a}_0|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}=\frac{d\alpha}{dt}.$$

Izvod $\frac{d\alpha}{dt}$ predstavlja ugaonu brzinu rotacije vektora $\vec{a}_0(t)$. Dakle, *modul izvoda jediničnog vektora jednak je ugaonoj brzini rotacije tog vektora.*

Uopšte, ovaj izvod nije jedinični vektor. On će biti jedinični vektor samo tada, ako je $\frac{d\alpha}{dt}=1$.

**1.2.5. Teorema.** *Neka su $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$ diferencijabilne vektorske funkcije. Tada je:*

$1^0$ $d[\vec{a}(t) \pm \vec{b}(t)] = d\vec{a}(t) \pm d\vec{b}(t)$,

$2^0$ $d(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{b} \cdot d\vec{a} + \vec{a} \cdot d\vec{b}$,

$3^0$ $d(\vec{a} \times \vec{b}) = (d\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times d\vec{b})$,

$4^0$ $d[f(t)\vec{a}(t)] = [df(t)]\vec{a}(t) + f(t)[d\vec{a}(t)]$ *gde je* $f(t)$ *diferencijabilna skalarna funkcija.*

Dokaz ove teoreme izvodi se direktnom primenom definicije diferencijala koja je data formulom (4).

Na isti način, kao kod skalarnih funkcija, definišu se pojmovi viših izvoda vektorske funkcije $\vec{r}(t)$ u tački $t_0$ drugog $\vec{r}\,''(t_0)$, trećeg $\vec{r}\,'''(t_0)$, . . . i, uopšte, $n$- tog izvoda $\vec{r}^{\,(n)}(t_0)$. Na isti način se, takodje, uvode pojmovi viših diferencijala: drugog $d^2\vec{r}(t)$, trećeg $d^3\vec{r}(t)$, . . . i, uopšte $n$- tog diferencijala $d^n\vec{r}(t)$. Pri tome važe formule

$$d^n\vec{r}(t) = \vec{r}^{\,(n)}(t_0)dt^n \quad (n \in N),$$

odnosno

$$\vec{r}^{\,(n)}(t_0) = \frac{d^n\vec{r}(t)}{dt^n} \quad (n \in N).$$

Inače, slično kao kod skalarnih funkcija, dokazuje se da iz egzistencije $\vec{r}^{\,(n+1)}(t)$ u nekoj okolini tačke $t_0$ ( to je otvoreni interval koji sadrži tačku $t_0$ ) sledi tačnost *Tejlorove formule:*

$$\vec{r}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\vec{r}^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \epsilon(t)(t-t_0)^n,$$

gde $\epsilon(t) \to 0$, kada $t \to t_0$.

Ova formula neposredno sledi iz razvijanja po Tejlorovoj formuli koordinatnih funkcija $x(t), y(t), z(t)$.

### 1.3. Integral vektorske funkcije

Neodredjeni i odredjeni integral vektorske funkcije definiše se takodje po analogiji sa neodredjenim i odredjenim integralom skalarne funkcije.

**1.3.1. Definicija.** Neka je vektorska funkcija $\vec{r}(t)$ definisana na intervalu $(a, b)$. Funkcija $\vec{R}(t)$ je *primitivna funkcija* funkcije $\vec{r}(t)$ na intervalu $(a, b)$ ako je

$$\forall t \in (a, b) : \frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \vec{r}(t).$$

Ako je $\vec{R}(t)$ primitivna funkcija za $\vec{r}(t)$ onda je $\vec{R}(t) + \vec{C}$ gde je $\vec{C}$ proizvoljna vektorska konstanta takodje primitivna funkcija za $\vec{r}(t)$ (svojstvo $6^0$ u 1.2.3. Teoremi).

**1.3.2. Definicija.** Skup svih primitivnih funkcija $\vec{R}(t) + \vec{C}$ naziva se *neodredjenim integralom* funkcije $\vec{r}(t)$ i označava sa $\int \vec{r}(t)dt$, tj. piše se

$$\int \vec{r}(t)dt = \{\vec{R}(t) + \vec{C}\}.$$

To se, medjutim, zapisuje, jednostavnije, u obliku

$$\int \vec{r}(t)dt = \vec{R}(t) + \vec{C}.$$

Budući da je $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$, izračunavanje neodredjenog vektorskog integrala svodi se na izračunavanje skalarnih integrala oblika

$$\int x(t)dt, \quad \int y(t)dt, \quad \int z(t)dt.$$

Lako se dokazuje da neodredjeni integral ima sledeća svojstva :

$$d\left[\int \vec{r}(t)dt\right] = \vec{r}(t)dt, \tag{1}$$

$$\int d\vec{r}(t)dt = \vec{r}(t) + \vec{C}, \tag{2}$$

$$\forall k \neq 0 \quad \int [k\vec{r}(t)dt] = k\int \vec{r}(t)dt, \tag{3}$$

$$\int [\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)]dt = \int \vec{r}_1(t)dt \pm \int \vec{r}_2(t)dt. \tag{4}$$

Iz poslednja dva svojstva sledi

$$\forall k_1, k_2 \quad \int [k_1\vec{r}_1(t) \pm k_2\vec{r}_2(t)]dt = k_1\int \vec{r}_1(t)dt \pm k_2\int \vec{r}_2(t)dt. \tag{4}$$

Definicija odredjenog integrala u *Rimanovom* smislu za vektorsku funkciju $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$, na segmentu $[a, b]$ identična je definiciji integrala za skalarne funkcije jedne promenljive. U stvari egzistencija odredjenog vektorskog integrala svodi se na egzistenciju integrala funkcija $x(t), y(t), z(t)$, koje predstavljaju projekcije vektora $\vec{r}(t)$ na koordinatne ose.

Neka je $\vec{r}(t)$ ograničena funkcija argumenta $t$ na segmentu $[a, b]$ i neka se ostvari proizvoljna podela ovog segmenta na $n$ delova tačkama

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

na segmente $\sigma_i = [t_{i-1}, t_i]$. Tada se za proizvoljno $\tau_i \in \sigma_i$ i proizvoljnu podelu segmenta $[a, b]$ može formirati integralna suma

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}(\tau_i)(t_i - t_{i-1}).$$

**1.3.3. Definicija.** Ako postoji granična suma kad broj $n$ neograničeno raste, pri čemu najveći od segmenata $\sigma_i$ teži nuli i to za proizvoljnu podelu segmenta $[a, b]$, tada se ova granična vrednost naziva *odredjenim integralom* funkcije $\vec{r}(t)$ u granicama od $a$ do $b$ i označava se simbolički

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \vec{r}(t)dt,$$

pri čemu $max|t_i - t_{i-1}| \to 0$.

Prema formuli (1) lako se dokazuje da je vektorska funkcija

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t)),$$

integrabilna na segmentu $[a, b]$ onda i samo onda ako su funkcije

$$x(t), y(t), z(t),$$

integrabilne na ovom segmentu.

Svojstva odredjenog vektorskog integrala analogna su svojstvima odredjenog integrala skalarne funkcije jedne promenljive.

Ako je $\vec{R}(t)$ primitivna funkcija od $\vec{r}(t)$, tada i ovde važi *Njutn-Lajbnicova* formula

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \vec{R}(t)\Big|_a^b = \vec{R}(b) - \vec{R}(a).$$

**1.3.4. Primer.** Naći

$$\int_0^\pi [\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)]dt,$$

ako je

$$\vec{r}_1(t) = t\vec{i} + \cos t\vec{j} + \sin t\vec{k},$$

$$\vec{r}_2(t) = \cos t\vec{i} + t\vec{j} - \sin t\vec{k}.$$

**Rešenje:** Kako je

$$\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & \cos t & \sin t \\ \cos t & t & -\sin t \end{vmatrix} =$$

$$= -(\sin t \cos t + t \sin t)\vec{i} + (t \sin t + \sin t \cos t)\vec{j} + (t^2 - \cos^2 t)\vec{k},$$

to je

$$\int_0^\pi [\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)]dt =$$

$$= -\vec{i} \int_0^\pi (\sin t \cos t + t \sin t)dt$$

$$+ \vec{j} \int_0^\pi (t \sin t + \sin t \cos t)dt \quad \blacklozenge$$

$$+ \vec{k} \int_0^\pi (t^2 - \cos^2 t)dt =$$

$$= -\pi\vec{i} + \pi\vec{j} + \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\vec{k}.$$

## 1.4. Vektorske funkcije više promenljivih

**1.4.1. Definicija.** Vektorska funkcija $n$-promenljivih je svako jednoznačno preslikavanje $\vec{r} : T \longrightarrow E$ sa skupa $T \subset E^n$ u skup vektora $E$, a što se simbolički označava sa

$$\vec{r} = \vec{r}(T) \Longleftrightarrow \vec{r} = \vec{r}(t_1, \dots , t_n).$$

Ovde se ograničavamo na skup $E \subset E^3$ pa je

$$\vec{r}(t_1, \dots , t_n) = x(t_1, \dots , t_n)\vec{i} + y(t_1, \dots , t_n)\vec{j} + z(t_1, \dots , t_n)\vec{k}. \qquad (6)$$

To znači da se definicija pojma vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t_1, \dots , t_n)$ može svesti na definiciju pojma tri skalarne funkcije $n$- promenljivih.

Hodograf vektorske funkcije $n$- promenljivih definiše se na isti način kao i za vektorsku funkciju jedne skalarne promenljive. Razume se, prema formuli (6), da se granična vrednost i neprekidnost vektorse funkcije $n$ promenljivih, definišu preko granične vrdnosti i neprekidnosti funkcija $x(t_1, \dots , t_n), y(t_1, \dots , t_n)$ i $z(t_1, \dots , t_n)$.

**1.4.2. Definicija.** Ako se u vektorskoj funkciji $\vec{r} = \vec{r}(t_1, \dots , t_n)$ $n - 1$ argumenata $t_1, \dots , t_{i-1}, t_{i+1}, \dots t_n$ fiksiraju, a argumentu $t_i$ da priraštaj $\Delta t_i$, tada se granična vrednost količnika priraštaja

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{\vec{r}(t_1, \dots , t_{i-1}, t_i + \Delta t_i, t_{i+1}, \dots t_n) - \vec{r}(t_1, \dots , t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots t_n)}{\Delta t_i}$$
$$= \frac{\partial \vec{r}}{\partial t_i}$$

naziva parcijalnim izvodam prvog reda vektorske funkcije $\vec{r}$ po argumentu $t_i$.

Pošo je $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial t_i}$ vektorska funkcija istih argumenata, i ovde se mogu definisati parcijalni izvodi

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t_i^2}, \ \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t_i \partial t_j}, \ \frac{\partial^3 \vec{r}}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k}, \frac{\partial^3 \vec{r}}{\partial t_i^3}, \dots$$

Neka je $\vec{r} = \vec{r}(T) = \vec{r}(t_1, \dots , t_n)$ vektorska funkcija tačke $T(t_1, \dots , t_n)$ i neka je $A(a_1, \dots , a_n)$ data tačka prostora $E^n$. Priraštaj funkcije $\vec{r}$ je

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(T) - \vec{r}(A)$$

tj.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_1, \dots, t_n) - \vec{r}(a_1, \dots, a_n).$$

**1.4.3. Definicija.** Funkcija $\vec{r} = \vec{r}(T)$ je diferencijabilna u tački $A$ ako se njen priraštaj može prikazati u obliku

$$\Delta\vec{r} = \vec{p}_1(t_1 - a_1) + \ldots + \vec{p}_n(t_n - a_n) + \vec{\omega}(T)\rho(T, A),$$

gde je $\rho(T, A)$ rastojanje izmedju tačaka $T$ i $A$, a $\vec{\omega}(T)$ je neprekidna vektorska funkcija u tački $A$ koja je jednaka nuli u toj tački, tj.

$$\lim_{T\to A} \vec{\omega}(T) = \vec{\omega}(A) = 0.$$

**1.4.4. Definicija.** Diferencijalom vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(T)$ u tački $A$ naziva se linearni deo po priraštajima argumenata $\Delta t_i = h_i = t_i - a_i$ u izrazu za priraštaj $\Delta\vec{r}$, i označava se sa

$$d\vec{r}(T, A) = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i(t_i - a_i).$$

Ako se fiksiraju vrdnosti argumenata $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots t_n$ , a menja se samo argument $t_i$, tada je

$$\rho(T, A) = \sqrt{(t_i - a_i)^2} = |t_i - a_i|,$$

pa će izraz za priraštaj funkcije dobiti oblik

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}(a_1, \dots, a_{i-1}, t_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - \vec{r}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots a_n)\\ &= \vec{p}_i(t_i - a_i) + \vec{\omega}(T)|t_i - a_i|.\end{aligned}$$

Odavde izlzi

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t_i} = \vec{p}_i \pm \vec{\omega}_i(T),$$

pa je

$$\lim_{\Delta t_i\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t_i} = \vec{p}_i \pm \lim_{T\to A} \vec{\omega}_i(T) \Rightarrow \vec{p}_i = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t_i}.$$

Na osnovu toga izraz za diferencijal $d\vec{r}$ dobija oblik

$$d\vec{r}(T, A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\vec{r}}{\partial t_i} dt_i.$$

koji se naziva još i *totalnim diferencijalom* funkcije $\vec{r}$, dok se izrazi

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial t_i} dt_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

nazivaju *parcijalnim diferencijalima.*

# 2. ELEMENTI KRIVIH I POVRŠI I PROSTORU

## 2.1. Pojam krive, dužina luka, prirodni trijedar krivina i torzija

Neka je zadato preslikavanje

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad a \leq t \leq b, \tag{7}$$

nekog odsečka $[a, b]$ u prostor $E^3$. Ako su funkcije $x(t), y(t), z(t)$ neprekidne na odsečku $[a, b]$, preslikavanje (7) naziva se *neprekidnim* . Sa $\vec{r}(t)$ označićemo radius vektor sa početkom u koordinatnom početku i krajem u tački $\vec{r}(t)$. Ranije smo videli da je preslikavanje $\vec{r}(t)$ neprekidno onda i samo onda ako je neprekidna vektor funkcija $\vec{r}(t)$.

**2.1.1. Definicija.** Neprekidno preslikavanje $r(t)$ segmrnta $[a, b]$ u prostor $E^3$ je *ekvivalentno* sa neprekidnim preslikvanjem $\rho(\tau)$ segmenta $[\alpha, \beta]$ u isti prostor, ako egzistira neprekidna strogo monotona funkcija $t = \varphi(\tau)$ koja segment $[\alpha, \beta]$ preslikava na segment $[a, b]$ i za svako $\tau \in [\alpha, \beta]$ važi jednakost

$$r(\varphi(\tau)) = \rho(\tau). \tag{8}$$

Funkcija $\varphi(\tau)$ naziva se *dopustivim preslikavanjem ekvivalencije* preslikavanja $r(t)$ i $\rho(\tau)$.

Ako je neprekidno preslikavanje $r(t), \quad a \leq t \leq b$, segmenta $[a, b]$ u prostor $E^3$ ekvivalentno sa neprekidnim preslikavanjen $\rho(\tau), \alpha \leq \tau \leq \beta$, segmenta $[\alpha, \beta]$ u $E^3$ simbolički zapisujemo sa

$$r(t) \sim \rho(\tau).$$

Neposredno se proverava da je $\sim$ relacija ekvivalencije u skupu neprekidnih preslikavanja zadatih relacijom (7).

Na osnovu relacije (8) sledi da su skupovi koji su slike u $E^3$ ekvivalentnih neprekidnih preslikavanja $r(t), \quad a \leq t \leq b$ i $\rho(\tau), \alpha \leq \tau \leq \beta$, odsečaka $[a, b]$ i $[\alpha, \beta]$ medjusobno jednaki. Na primer, $r(t) = (\cos t, \sin t)$; $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$ i $\rho(\tau) = (\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}, \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}$; $-1 \leq \tau \leq 1$; $\tau = \tan t$ su dva ekvivalentna neprekidna preslikavanja.

**2.1.2. Definicija.** Svaki skup $\Gamma$ neprekidnih ekvivalentnih preslikavanja $r(t)$ segmenta (odsečka) $[a, b]$ u prostor $E^3$ naziva se *parametarski zadata kriva* :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{r(t) : a \leq t \leq b\} \\ &= \{(x(t), y(t), z(t)) : a \leq t \leq b\} \\ &= \{\vec{r}(t) : a \leq t \leq b\}. \end{aligned}$$

Svako iz klase ekvivalencije izabrano preslikavanje naziva se *predstavljanjem* te krive.

Ako su funkcije $x(t), y(t), z(t)$, nekog predstavljanja krive, neprekidno diferencijabilne na odsečku $[a, b]$ kaže se da je kriva *neprekidno diferencijabilna.* Ukoliko je još i izvod $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} \neq 0, \forall t \in [a, b]$ kriva je *glatka.*

Totalna uredjenost brojeva na odsečku $[a, b]$ pomoću datog fiksiranog predstavljanja $r(t)$ krive $\Gamma = \{r(t) | a \leq t \leq b\}$, daje mogućnost za uvOdjenje sasvim prirodnog poretka medju tačkama date krive. Tačka $r(t') \in \Gamma$ je ispred tačke $r(t'') \in \Gamma$ ako je $a \leq t' < t'' \leq b$ (videti sliku 2).

*Slika 2*

Ako se želi da ovakav poredak medju tačkama krive bude zadržan i za neko drugo predstavljanja krive potrebno je da funkvija $\varphi(\tau)$, dopustive transformacije parametara iz 2.1.1. Definicije, bude strogo monotono rastuća.

**2.1.3. Definicija.** Kriva $\Gamma$, definisana klasom ekvivalentnih neprekidnih preslikavanja odsečka u prostor $E^3$, za koja su dopustive transformacije parametara strogo monotono rastuće neprekidne funkcije, naziva se *orjentisanom* krivom.

**2.1.4. Definicija.** Neka je $\Gamma = \{r(t) : a \leq t \leq b\}$ orjentisana kriva i $t = t(\tau)$ strogo monotono opadajuća funkcija sa odsečka $[\alpha, \beta]$ na $[a, b]$ za koju je $t(\alpha) = b, \quad t(\beta) = a$. Kriva, definisana predstavljanjem $r = r(t(\tau)), \alpha \leq \tau \leq \beta$, naziva se kriva suprotno orjentisana od krive $\Gamma$ i označava se $\Gamma^-$.

U daljem tekstu posmatraćemo neprekidne krive

$$\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) : t \in [a, b]\} \tag{9}$$

sa svojstvom da $M_1 \to M_0$ (po krivoj $\Gamma$) $\Leftrightarrow t_1 \to t_0$, gde $t_0$ i $t_1$ označavaju vrednosti parametra $t$ koje odgovaraju tačkama $M_0$ i $M_1$.

Luk neke neprekidne krive (9), sa krajnjim tačkama $A$ i $B$, označićemo sa $\overset{\frown}{AB}$. Pretpostavimo da tačkama $A$ i $B$ odgovaraju vrednosti $a$ i $b$ parametra $t$, kao i da se luk $\overset{\frown}{AB}$ tretiran kao prostorna kriva, može predstaviti u obliku (9).

Neka su $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$ tačke na luku $\overset{\frown}{AB}$ kojima odgovaraju vednosti parametra $t$

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b.$$

Označićemo sa $\widehat{AB}$ izlomljenu liniju sastavljenu od duži

$$\overline{A_0A_1},\quad \overline{A_1A_2},\quad \ldots,\overline{A_{n-1}A_n},$$

tj. stavimo

$$\widehat{AB}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_{k-1}A_k}.$$

Ako sa $s(\overline{A_{k-1}A_k})$ i $s(\widehat{AB})$ označimo dužine duži $\overline{A_{k-1}A_k}$ i izlomljene linije $\widehat{AB}$, imamo

$$s(\widehat{AB})=\sum_{k=1}^{n}s(\overline{A_{k-1}A_k}).$$

**2.1.5. Definicija.** Ako egzistira (konačna) granična vrednost

$$\lim_{max\Delta t_k\to 0}s(\widehat{AB}) \tag{10}$$

(gde je $\Delta t_k=t_k-t_{k-1},\quad k\in\{1,\ldots,n\}$) i ne zavisi od izbora tačaka $t_k$, $k\in\{1,\ldots,n-1\}$ onda se kaže da je luk $\overset{\frown}{AB}$ *ispravljiv (rektifikabilan)* i da je limes (10) njegova *dužina.*

Dužinu luka $\overset{\frown}{AB}$, ukoliko postoji, označavaćemo sa $s(\overset{\frown}{AB})$. Pri tome, imamo

$$s(\overset{\frown}{AB})=\lim_{max\Delta t_k\to 0}s(\widehat{AB}),$$

gde se podela segmenta $[a,b]$ tačkama $t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}$ moze vršiti na proizvoljan način.

**2.1.6. Teorema.** *Neka su funkcije $x(t),y(t),z(t)$ zajedno sa svojim izvodima $x'(t),y'(t),z'(t)$ neprekidne na segmentu $[a,b]$. Tada je luk $\overset{\frown}{AB}$ ispravljiv i njegova dužina izračunava se po formuli :*

$$s(\overset{\frown}{AB})=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt.$$

**Dokaz.** Kako tačkama $A_k,\quad k\in\{0,1,\ldots,n\}$ odgovaraju vrednosti parametara $t_k,\quad k\in\{0,1,\ldots,n\}$, to se dužina duži $\overline{A_{k-1}A_k}$ iračunava po formuli

$$s(\overline{A_{k-1}A_k})=\sqrt{[x(t_k)-x(t_{k-1})]^2+[y(t_k)-y(t_{k-1})]^2+[z(t_k)-z(t_{k-1})]^2}.$$

Primenom Lagranžove formule za funkcije $x(t), y(t), z(t)$ na odsečku $[t_{k-1}, t_k]$ dobiće se

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\xi_k)\Delta t_k,$$
$$y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\eta_k)\Delta t_k,$$
$$z(t_k) - z(t_{k-1}) = z'(\zeta_k)\Delta t_k,$$

pa je

$$s(\overline{A_{k-1}A_k}) = \sqrt{x'^2(\xi_k) + y'^2(\eta_k) + z'^2(\zeta_k)}\Delta t_k.$$

Zamenom ove vrednosti u (10), dobiće se

$$s(\widehat{AB}) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x'^2(\xi_k) + y'^2(\eta_k) + z'^2(\zeta_k)}\Delta t_k,$$

pa je

$$\lim_{max\Delta t_k \to 0} s(\widehat{AB}) = \lim_{max\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x'^2(\xi_k) + y'^2(\eta_k) + z'^2(\zeta_k)}\Delta t_k.$$

Prema poznatim teoremama o egzistenciji integrala (videti glavu Integrali) poslednji limes je

$$\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt,$$

pa je

$$s(\widehat{AB}) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt.\blacksquare$$

**Napomena.** Izraz $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$ naziva se *elementom luka krive.*

**2.1.7. Primer.** Izračunati dužinu luka krive

$$\Gamma = \{a\cos t, a\sin t, \frac{a}{2}t^2 : t \geq 0\}$$

imedju ravni $z = 0$ i $z = \frac{a}{2}$ $\quad (a > 0)$.

**Rešenje:** Kako je $x^2 + y^2 = a^2$, kriva $\Gamma$ leži na cilindru $x^2 + y^2 = a^2$. Presek krive $\Gamma$ sa ravni $z = 0$ je tačka $A$ kojoj odgovara vrednost parametra

$t = 0$, a presek krive $\Gamma$ sa rabni $z = \frac{a}{2}$ je tačka $B$ kojoj odgovara vrednost parametra $t = a$(jednačina $\frac{a}{2}t^2 = \frac{a}{2}$ ima dva rešenja $t = -1$ i $t = 1$, ali zbog uslova $t \geq 0$ $t = -1$ se isključuje). Kako je

$$\begin{aligned} x'(t) &= -a \sin t, \\ y'(t) &= acost, \\ z'(t) &= at, \end{aligned}$$

to je

$$\begin{aligned} s(\widehat{AB}) &= \int_0^1 \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2 t^2}dt \\ &= a \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}dt \\ &= \frac{a}{2}[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] \end{aligned}$$

.♦

Posmatrajmo vektorsku jednačinu krive u prostoru u obliku

$$\vec{r} = \vec{r}(s),$$

*Slika 3*

gde je $s$ luk krive meren od jedne odredjene tačke krive. To je tzv. *prirodna jednačina* krive u prostoru (videti sliku 3).

Radi boljeg razumevanja daljeg teksta korisno je uvesti sledeću oznaku

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{\vec{r}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s}.$$

Modul vektora $\dot{\vec{r}}$ iznosi

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = |\dot{\vec{r}}| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = 1.$$

Što je posledica ekvivalentnosti infinitezimala $|\Delta \vec{r}|$ i $|\Delta s|$ kada $\Delta s \to 0$.

Pošto vektor $\dot{\vec{r}}$ ima pravac tangente na krivoj $\vec{r}=\vec{r}(s)$ u tački $M(\vec{r}(s))$, smer odredjen prema rašćenju luka, a modul jednak jedinici može se zaključiti da izvod vektora položaja tačke na krivoj $\vec{r}=\vec{r}(s)$ po luku predstavlja jedinični vektor tangente na krivoj u tački $M$. Dakle,

$$\frac{d\vec{r}}{ds}=\dot{\vec{r}}=\vec{t}, \quad |\vec{t}|=1$$

Vektor

$$\vec{K}=\dot{\vec{t}}=\frac{d\vec{t}}{ds}=\ddot{\vec{r}}=\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$$

naziva se *vektorom krivine.* Neka je $ort\vec{K}=\vec{n}$, tj. $\vec{K}=|\vec{K}|\vec{n}=|\ddot{\vec{r}}|\vec{n}$. Iz jednakosti

$$\vec{t}\cdot\vec{t}=1 \iff \vec{t}\cdot\dot{\vec{t}}=0 \iff \vec{t}\cdot\vec{K}=0 \iff \vec{t}\cdot\vec{n}=0,$$

šti znači da je nosač vektora $\vec{K}$ normalan na tangenti. Dakle, ovaj nosač predstavlja jednu od normala krive u tački $M$, koja se naziva *glavnom normalom.* Vektor $\vec{n}$ je vektor glavne normale.

Modul vektora $\vec{K}$, u oznaci

$$K=|\vec{K}|=|\ddot{\vec{r}}|,$$

naziva se *fleksijom* ili *prvom krivinom* krive u tački $M$, a recipročna vrednost

$$\rho=\frac{1}{|\vec{K}|}=\frac{1}{|\ddot{\vec{r}}|},$$

naziva se *polupréčnikom fleksije* ili *poluprečnikom prve krivine* u tački $M$. Prema ovim oznakama, razume se da je

$$\vec{K}=K\vec{n}=\frac{\vec{n}}{\rho}, \quad K\geq 0\Rightarrow \rho>0.$$

Jedinični vektor

$$\vec{b}=\vec{t}\times\vec{n},$$

koji sa vektorima $\vec{t}$ i $\vec{n}$ obrazuje pravougli trijedar desne orjentacije, ima za nosač pravu koja se naziva *binomalom* krive u tački $M$.

Trijedar jediničnih vektora $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ sa početkom u tački $M$ krive $\vec{r} = \vec{r}(s)$ naziva se *prirodnim trijedrom* (videti sliku 4).

*Slika 4*

Osnovne ravni prirodnog trijedra su:

$1^0$ *Oskulatorna ravan* tj. ravan odredjena tangentom i glavnom normalom,

$2^0$ *Normalna ravan* tj. ravan odredjena glavnom normalom i binormalom,

$3^0$ *Rektifikaciona ravan* tj. ravan odredjena tangentom i binormalom.

Vektor

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{b}}{ds} = \dot{\vec{b}}$$

naziva se *vektorom torzije* ili *vektorom druge krivine.*

Ako kriva leži u ravni, tada je $\vec{b} = \overrightarrow{const}$, pa je

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{b}}{ds} = 0,$$

oskulatorna ravan krive poklapa se sa ravni koja je sadrži.

Ako je kriva prostorna, vektor torzije $\vec{\tau} = \frac{d\vec{b}}{ds}$ karakteriše odstupanje krive od njene oskulatorne ravni.

Diferenciranjem po luku sledećih jednakosti

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n},$$
$$\vec{b} \cdot \vec{b} = 1,$$

za posledicu, dobijamo sledeće dve jednakosti

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds},$$
$$\vec{b} \cdot \vec{\tau} = 0.$$

Dakle, vektor $\vec{\tau}$ normalan je na vektorima $\vec{t}$ i na $\vec{b}$, znači, on ima za nosač pravu koja se poklapa sa glavnom normalom.

Ako uvedemo oznaku $\tau = |\vec{\tau}|$, onda je

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{b}}{ds} = \pm\tau\vec{n},$$

gde se znak + uzima ako su $\vec{\tau}$ i $\vec{n}$ istog smera, a znak - ako su suprotnog smera.

Veličina

$$R = \pm\frac{1}{\tau},$$

naziva se *poluprečnikom torzije* ili *poluprečnikom druge krivine.* Posle ove formulacije imamo

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{b}}{ds} = \pm\tau\vec{n} = \frac{\vec{n}}{R}.$$

Množenjem skalarno sa $\vec{n}$ ove jednakosti nalazimo

$$\frac{1}{R} = \frac{d\vec{b}}{ds}\vec{n},$$

a kako je

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{t}\times\frac{d\vec{n}}{ds}\wedge\vec{n} = \rho\vec{K},$$

to je

$$\frac{1}{R} = \rho\frac{d\rho}{ds}(\vec{t}\times\vec{K})\cdot\vec{K} + \rho^2\left(\vec{t}\times\frac{d\vec{K}}{ds}\right)\cdot\vec{K},$$

ali kako je $(\vec{t}\times\vec{K})\cdot\vec{K} = 0$, imamo

$$\frac{1}{R} = \rho^2\left(\vec{t}\times\frac{d\vec{K}}{ds}\right).\vec{K} = -\rho^2(\vec{t}\times\vec{K})\frac{d\vec{K}}{ds}.$$

Kako je

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{K} = \ddot{\vec{r}}, \quad \frac{d\vec{K}}{ds} = \dddot{\vec{r}},$$

jednakost kojom su vezani poluprečnici fleksije i torzije, ima oblik :

$$\frac{1}{R} = -\rho^2(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\dddot{\vec{r}}.$$

## 2.2. Prelaz sa prirodnih na parametarske jednačine

Neka je jednačina krive data vektorskom jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(t)$ i neka je $t = t(\xi)$, pri čemu egzistira inverzna funkcija funkcije $t(\xi)$, a osim toga neka je $t(\xi)$ triput diferencijabilna fukcija po $\xi$. Tada je

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t(\xi)).$$

Prva tri izvoda vektorske funkcije $\vec{r}(t(\xi))$ po argumentu $\xi$ imaju sledeće vrednosti:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{r}}{d\xi} &= \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{d\xi},\\
\frac{d^2\vec{r}}{d\xi^2} &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{d\xi}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2t}{d\xi^2},\\
\frac{d^3\vec{r}}{d\xi^3} &= \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\left(\frac{dt}{d\xi}\right)^3 + 3\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d^2t}{d\xi^2}\frac{dt}{d\xi} + \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^3t}{d\xi^3}.
\end{aligned}$$

Ako se najpre prve dve jednakosti pomnože medju sobom vektorski, a zatim se dobijena jednakost pomnoži skalarno trećom, dobiće se jednakosti

$$\begin{aligned}
&\frac{d\vec{r}}{d\xi}\times\frac{d^2\vec{r}}{d\xi^2} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{d\xi}\right)^2,\\
&\left(\frac{d\vec{r}}{d\xi}\times\frac{d^2\vec{r}}{d\xi^2}\right)\frac{d^3\vec{r}}{d\xi^3} = \left(\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)\left(\frac{dt}{d\xi}\right)^6,
\end{aligned}\tag{11}$$

ili u ekvivalentnom obliku

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d\vec{r}}{d\xi}\times\frac{d^2\vec{r}}{d\xi^2}\right)\cdot d\xi^3 = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)\cdot dt^3\\
&\left(\left(\frac{d\vec{r}}{d\xi}\times\frac{d^2\vec{r}}{d\xi^2}\right)\cdot\frac{d^3\vec{r}}{d\xi^3}\right)d\xi^6 = \left(\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)\cdot\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)dt^6.
\end{aligned}\tag{12}$$

Prema tome, vektor odnosno skalar na desnim stranama u (12) *invarijantan* je pri transformaciji argumenta $t$ na proizvoljni argument $\xi$, i obrnuto.

Ako se uzme da je $\xi = s$, gde $s$ označava luk, i zadrže uvedene oznake

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{\vec{r}},\quad \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \ddot{\vec{r}},\quad \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \dddot{\vec{r}},\quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,',\quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}\,'',\quad \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \vec{r}\,''',$$

jednakosti (11) daju

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} &= (\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'') \left(\frac{dt}{ds}\right)^3, \\ (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})\dddot{\vec{r}} &= [(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'') \cdot \vec{r}\,'''] \left(\frac{dt}{ds}\right)^6. \end{aligned} \tag{13}$$

Iz $\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'|$ sledi da je $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\vec{r}'|}$, te jednakosti (13) postaju

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} &= \frac{(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'')}{|\vec{r}'|^3}, \\ (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})\dddot{\vec{r}} &= \frac{[(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'') \cdot \vec{r}\,''']}{|\vec{r}'|^6}. \end{aligned} \tag{14}$$

Iz $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$ sledi da je

$$K\vec{b} = \vec{t} \times K\vec{n} = \vec{t} \times \vec{K} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}},$$

pa je

$$K = |K\vec{b}| = |\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|,$$

a prema prvoj od jednakosti (14) imamo

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}.$$

Ovo je formula za izračunavanje *fleksije i poluprečnika fleksije*, ako je jednačina krive data u obliku $\vec{r} = \vec{r}(t)$, gde je $t$ proizvoljni argument. Zamenom $\rho$ iz ove formule u

$$|\tau| = \frac{1}{|R|} = \rho^2 |(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})\dddot{\vec{r}}|,$$

nalazimo

$$|\tau| = \frac{1}{|R|} = \frac{|(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'')\vec{r}\,'''|}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|^2},$$

a to je obrazac za izračunavanje *apsolutne vrednosti torzije i poluprečnika torzije.*

### 2.3. Jednačine osnovnih ravni i pravaca prirodnog trijedra

$1^0$ *Oskulatorna ravan i binormala.* Neka je $\vec{R}$ vektor položaja proizvoljne tačke oskulatorne ravni odnosno binormale, $\vec{r}$ je vektor položaja tačke $M$ na krivoj $\Gamma$ koja je zadata jednačinom

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(x(t), y(t), z(t)),$$

a $\vec{b}$ jedinični vektor binormale. Prema dobro poznatim jednačinama ravni i prave kroz datu tačku, vektorska jednačina oskulatorne ravni je

$$(\vec{R} - \vec{r}) \cdot \vec{b} = 0,$$

a vektorska jenačina binormale

$$(\vec{R} - \vec{r}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

$2^0$ *Normalna ravan i tangenta.* Vektorska jednačina normalne ravni je

$$(\vec{R} - \vec{r}) \cdot \vec{t} = 0,$$

a vektorska jenačina binormale

$$(\vec{R} - \vec{r}) \times \vec{t} = \vec{0},$$

gde je $\vec{R}$ vektor položaja proizvoljne tačke normalne ravni odnosno tangente, $\vec{r}$ je vektor položaja tačke $M$ na krivoj $\Gamma$ koja je zadata jednačinom

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(x(t), y(t), z(t)),$$

a $\vec{t}$ jedinični vektor tangente.

$3^0$ *Rektifikaciona ravan i glavna normala.* Vektorska jednačina rektifikacione ravni je je

$$(\vec{R} - \vec{r}) \cdot \vec{n} = 0,$$

a vektorska jenačina binormale

$$(\vec{R} - \vec{r}) \times \vec{n} = \vec{0}.$$

Čitaocu se prepušta da izvede odgovarajuće skalarne jednačine u sva tri slučaja.

**2.3.1. Primer.** Naći jedinične vektore tngente, normale i binormale za krivu

$$\vec{r} = (\cos t + \sin^2 t)\vec{i} + \sin t(1 - \cos t)\vec{j} - \cos t\vec{k}$$

u tački $M$ u kojoj je $t = \frac{\pi}{2}$ i napisati u istoj tački jednačine normalne, oskulatorne i rektifikacione ravni.

**Rešenje:** Kako je

$$\vec{r'} = (-\sin t + \sin 2t)\vec{i} + (\cos t - \cos 2t)\vec{j} + \sin t\vec{k},$$

$$\vec{r''} = (-\cos t + 2\cos 2t)\vec{i} + (2\sin 2t - \sin t)\vec{j} + \cos t\vec{k},$$

to je u tački $A$ jedinični vektor tangente

$$\vec{t} = \frac{\vec{r'}(A)}{|\vec{r'}(A)|} = \frac{-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}.$$

Jedinični vektor $\vec{b}$ u pravcu binormale u tački $A$ je

$$\vec{b} = \frac{\vec{r'} \times \vec{r''}}{|\vec{r'} \times \vec{r''}|} = \frac{\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{14}}.$$

Vektor $\vec{n}$ u pravcu glavne normale je

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \frac{-5\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{42}}.$$

Kako tačka $A$ ima koordinate $(1, 1, 0)$ to su jednačine normalne oskulatorne i rektifikacione ravni respektivno

$$\begin{aligned} &-x + y + z = 0, \\ &x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ &-5x - 4y - z + 9 = 0.\blacklozenge \end{aligned}$$

**Vežbe.**

$1^0$ Naći radius krivine za $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, z = a\cos 2t$. ($R = \frac{25}{6}a\sin 2t$)

$2^0$ Naći rastojanje od koordinatnog početka do tangente na krivu $x^2y = a^3$ u tački sa apscisom $x_0$. ($d = \frac{3a^3x_0}{\sqrt{x_0^6+4a^6}}$)

$3^0$ Ddokazati da su sve normale na krivu $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)$ podjednako udaljene od koordinatnog početka.

$4^0$ Dokazati da površina trapeza obrazovanog sa tangentom na krivu $3axy = x^3 + 2a^3$, ordinatom tačke dodira i koordinatnim osama ne zavisi od izbora tačke dodira.

## 2.4. Pojam površi, jednačine tangentne ravni i normale, prva kvadratna forma

Neka je zadato preslikavanje

$$r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in \overline{D}, \tag{15}$$

zatvorene oblasti $\overline{D} \subset E^2$ u prostor $E^3$.

Ako su funkcije $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ neprekidne na $\overline{D}$, preslikavanje (15) naziva se *neprekidnim* . Sa $\vec{r}(u,v)$ označićemo radius vektor sa krajem u tački $r(u,v)$. Ranije smo videli da je preslikavanje $r(u,v)$ neprekidno onda i samo onda ako je neprekidna vektorska funkcija $\vec{r}(u,v)$.

**2.4.1. Definicija.** Neprekidno preslikavanje $f(u,v)$ zatvorene ravne oblasti $\overline{D}$ u $E^3$ je *ekvivalentno* sa neprekidnim preslikvanjem $f_1(u,v)$ zatvorene ravne oblasti $\overline{D}_1$ u isti prostor, ako egzistira homeomorfno preslikavanje $F$ sa $\overline{D}$ na $\overline{D}_1$, pri kojem unutrašnja tačka prelazi u unutrašnju, a granična tačka prelazi u graničnu, i za svaku tačku $M \in D$ važi jednakost

$$f(M) = f_1[F(M)], \tag{16}$$

tj. $f = f_1 \circ F$.

U tom slučaju preslikavanje $F$ naziva se *dopustivim preslikavanjem ekvivalencije* preslikavanja $f$ i $f_1$, a činjenicu da je preslikavanje $f$ ekvivalentno sa preslikavanjem$f_1$ simbolički zapisujemo sa

$$f \sim f_1.$$

Neposredno se proverava da je $\sim$ relacija ekvivalencije u skupu neprekidnih preslikavanja zadatih relacijom (15).

Na osnovu relacije (16) sledi da su skupovi koji su slike u $E^3$ ekvivalentnih neprekidnih preslikavanja zatvorenih oblasti $\overline{D}$ i $\overline{D}_1$ medjusobno jednaki.

**Napomena.** Ovde treba istaći da homeomorfizam izmedju zatvorenih ravnih oblasti $\overline{D}$ i $\overline{D}_1$ ne preslikava unutršnju tačku u unutrašnju. Primera radi, neka je $D = \{(u,v) : u^2 + v^2 < 1\}$, a $D_1 = \{(u,v) : 0 < u^2 + v^2 < 1\}$. Ovde je $\overline{D} = \overline{D}_1$ pa je identično preslikavanje sa $\overline{D}$ na $\overline{D}_1$ homeomorfizam. Medjutim, tačka $(0,0)$ je unutrašnja za $D$, a grnična za $D_1$.

**2.4.2. Definicija.** Svaki skup neprekidnih, medjusobno ekvivalentnih, preslikavanja $r(u,v)$ zatvorene ravne oblasti$\overline{D}$ u prostor $E^3$ naziva se *parametarski zadata površ*, u oznaci

$$\begin{aligned} S &= \{r(u,v) : (u,v) \in \overline{D}\} \\ &= \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : (u,v) \in \overline{D}\} \\ &= \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \overline{D}\}. \end{aligned}$$

Svako iz klase ekvivalencije izabrano neprekidno preslikavanje $r(u, u)$ naziva se *predstavljanjem* parametarsi zadate površi $S$.

**2.4.3. Definicija.** Neka je $S$ parametarski zadata površ i $r(u, v), (u, v) \in \overline{D}$ neko njeno predstavljanje, $D'$ oblast sadržana u $D$. Parametarski zadata površ $S'$, definisana predstavljanjem $r(u, v)(u, v) \in \overline{D'}$ naziva se *podpovrš* površi $S$.

**2.4.4. Definicija.** Homeomorfizam $F$ sa $\overline{D} \subset E^2$ na $\overline{D}_1 \subset E^2$ koji preslikava unutrašnje tačke u unutrašnje, a granične tačke u granične, za koji su $F$ i $F^{-1}$ neprekidno diferencijabilne funkcije naziva se *regularno preslikavanje* sa $\overline{D}$ na $\overline{D}_1$.

Preslikavanje zatvorene oblasti $\overline{D} \subset E^2$ u $E^3$ zadato relacijom (15) je neprekidno diferencijabilno ako je svaka koordinatna funkcija u (15) neprekidno diferencijabilna.

Na potpuno isti način, kao u definiciji 2.4.1., može se uvesti relacija ekvivalencije na skupu neprekidno diferencijabilnih preslikavanja zatvorene olasti $\overline{D} \subset E^2$ u $E^3$ pri čemu je $F$ regularno preslikavanje sa $D$ na $D_1$.

Analogno definiciji 2.4.2., uvodi se pojam parametarski zadate neprekidno diferencijabilne površi $S$. U daljim razmatranjima biće potrebe za korišćenjem ovakvih površi.

Pored pojma parametarski zadata površ, često se koristi i pojam implicitno zadata površ, a koji se ovako definiše.

Ako je funkcija $F(x, y, z)$ neprekidna u nekoj oblati sadržanoj u $E^3$, skup svih tačaka $(x, y, z) \in E^3$ takvih da je

$$F(x, y, z) = 0,$$

naziva se *implicitno zadata površ.*

Na primer, funkcija $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ neprekidna je u $E^3$, a skup tačaka $(x, y, z) \in E^3$ takvih da je

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

je sfera poluprečnika 1 sa centrom u koordinatnom početku.

Neka je

$$S = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in \overline{D}\}, \tag{17}$$

neprekidno diferencijabilna površ. Može se lako zaključiti da je presek svake prave tipa $u = u_0$ ili $v = v_0$ sa zatvorenom oblasti $\overline{D}$ jedan odsečak ili je prazan skup. Neka je, na primer, presek $\overline{D}$ sa pravom $v = v_0$ neprazan skup.

Tada, prema definiciji 1.1.2., skup svih tačaka iz $E^3$ koje su krajnje tačke vektora
$$\vec{r} = \vec{r}(u, v_0), \quad (u, v_0) \in \overline{D}$$
prdstavlja neku neprekidno diferencijabilnu krivu koja se naziva *koordinatna linija (u -linija).* Vektor
$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u)$$
naziva se tangentnim vektorom. Analogno se definiše druga koordinatna linija ($v$ - *linija*) svojim predstavljanjem
$$\vec{r} = \vec{r}(u_0, v), \quad (u_0, v) \in \overline{D}$$
i tangentnim vektorom
$$\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (x_v, y_v, z_v)$$

**2.4.5. Definicija.** Za tačku $r(u, v)$ površi (17) u kojoj su vektori $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ linearno nezavisni kaže se da je *regularna.* Ako su vektori $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ kolinearni (linearno zavisni) tačka $r(u, v)$ površi (17) je *singularna tačka* površi pri datom predstavljanju.

Neka je površ predstavljena sa (17) neprekidno diferencijabilna i neka je tačka $r(u_0, v_0)$, regularna tačka ove površi. Proizvoljna kriva sa površi je neprekidno diferencijabilna i ima prdstavljanje u obliku
$$\begin{aligned} r(u, v) &= r[u(t), v(t)], (u(t), v(t)) \in D, a \le t \le b, \\ \vec{r}(u, v) &= \vec{r}[u(t), v(t)], (u(t), v(t)) \in D, a \le t \le b, \end{aligned} \tag{18}$$
pri čemu je $[u'(t)]^2 + [v'(t)]^2 > 0, (u(t), v(t)) \in D, a \le t \le b.$

Duferenciranjem druge jednakosti u (18) dobiće se
$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv = \vec{r}_u u'(t)dt + \vec{r}_v v'(t)dt. \tag{19}$$
Pošto je tačka $r(u_0, v_0)$ površi (17) regularna, vektor $d\vec{r}$ je ima pravac tangente na krivoj predstavljenoj sa (18). Šta više, iz jednakosti (19) sledi da u tački $r(u_0, v_0)$ površi (17), tangenta na proizvoljnoj krivoj (18) sa te površi, koja prolazi kroz tačku $r(u_0, v_0)$, leži u ravni vektora $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ i $\vec{r}_v(u_0, v_0)$.

**2.4.6. Definicija.** Ravan koja sadrži tačku $r(u_0, v_0)$ površi (17), u kojoj leže sve tangente na krivim (18), koje prolaze kroz ovu tačku, naziva se *tangentna ravan površi* u datoj tački. Tačka $r(u_0, v_0)$ površi (17) naziva tačkom dodira (videti sliku 5).

*Slika 5*

Neka je tačka $r(u_0, v_0)$ površi (17) regularna i neka je $\vec{r}$ vektor položaja proizvoljne tačke tangentne ravni koja prolazi kroz tačku $r(u_0, v_0)$, a $\vec{r}_0$ vektor položaja dodirne tačke. Tada su vektori $\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{r}_u, \vec{r}_v$ komplanarni pa je njihov mešoviti proizvod jednak nuli tj.

$$[\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{r}_u, \vec{r}_v] = 0,$$

što predstavlja vektorsku jednačinu tangentne ravni u tački dodira površi (17).

Ako je $\vec{r} = (x, y, z), \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u), \vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$, jednačina tangentne ravni ima skalarni oblik

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

U slučaju eksplicitno zadate površi

$$z = f(x, y), (x, y) \in \overline{D},$$

imamo da je $u = x, v = y$, pa je

$$\begin{aligned} x_u &= 1, y_u = 0, z_u = f_x, \\ x_v &= 0, y_v = 1, z_v = f_y, \end{aligned}$$

pa jednačina tangentne ravani u ovom slučaju ima oblik

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = 0,$$

a posle razvijanja determinante po elementima prve vrste jednačina tangentne ravni postaje

$$z - z_0 = (x - x_0)f_x + (y - y_0)f_y,$$

gde su $f_x, f_y$ parcijalni izvodi $f_x(x, y)$ i $f_y(x, y)$ u tački $(x_0, y_0)$.

U slučaju implicitno zadate površi jednakošću

$$F(x, y, z) = 0,$$

gde je $F(x, y, z)$ neprekidno diferencijabilna funkcija u nekoj okolini tačke $(x_0, y_0, z_0)$ i pri tome je u ovoj tački $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$ (videti u uvodnoj glavi uslove teoreme o egzistenciji neprekidno diferencijabilne implicitno zadate funkcije), tada jednačina tangentne ravni u tački $(x_0, y_0, z_0)$ ima oblik

$$(x - x_0)F_x + (y - y_0)F_y + (z - z_0)F_z = 0,$$

gde su $F_x, F_y, F_z$ vrednosti parcijalnih izvoda u tački $(x_0, y_0, z_0)$.

**2.4.7. Definicija.** Prava koja prolazi kroz tačku dodira površi i tangentne ravni i normalna je na tangentnij ravni naziva se *normala na površi* u datoj tački.

Svaki nenula vektor koji prolazi kroz datu tačku površi i koji je kolinearan sa normalom na površi naziva se normalnim vektorom površi u datoj tački.

Opšta jednačina normale na površi u tački $(x_0, y_0, z_0)$ ima oblik

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}.$$

U slučaju eksplicitno zadate površi

$$\frac{x - x_0}{f_x} = \frac{y - y_)}{f_y} = -(z - z_0),$$

a u slučaju implicitno zadate površi

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_)}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z}.$$

**2.4.8. Definicija.** Neprekidno diferencijabilna površ koja ne sadrži singularne tačke naziva se *glatka površ.*

Neka je $\vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \overline{D}$ neko predstavljanje glatke površi. Vektori $\vec{r}_u$ i $\vec{r}_v$ u proizvoljnoj tačKi ove površi čine vektorsku bazu za tangentnu ravan sa tačkom dodira u toj tački. Ako sa $d\vec{r}$ označimo vektor koji leži u tangentnoj ravni, a sa $du$ i $dv$ njegove koordinatae u odnosu na bazne vektore $\vec{r}_u$ i $\vec{r}_v$, razume se da je

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv.$$

Kvadrat intenziteta vektora $d\vec{r}$ iznosi

$$|d\vec{r}|^2 = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2 = (\vec{r}_u)^2 (du)^2 + 2\vec{r}_u.\vec{r}_v du.dv + (\vec{r}_v)^2 (dv)^2.$$

Uvedimo oznake

$$E = (\vec{r}_u)^2 = (x_u)^2 + (y_u)^2 + (z_u)^2,$$
$$F = \vec{r}_u.\vec{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$
$$G = (\vec{r}_v)^2 = (x_v)^2 + (y_v)^2 + (z_v)^2,$$

pa je tada

$$|d\vec{r}|^2 = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2 = E(du)^2 + 2F du.dv + G(dv)^2.$$

**2.4.9. Definicija.** Kvadratna forma $E(du)^2 + 2F du.dv + G(dv)^2$ naziva se *prva kvadratna forma površi.*

## 2.5. Izračunavanje dužine luka krivih sa površi i ugla izmedju ovih krivih. Površina površi

Uočimo neprekidno diferencijabilnu krivu sa površi koja je predstavljena na jedan od sledeća dva načina

$$r(u,v) = r[u(t), v(t)], (u(t), v(t)) \in D, a \leq t \leq b,$$
$$\vec{r}(u,v) = \vec{r}[u(t), v(t)], (u(t), v(t)) \in D, a \leq t \leq b,$$

pri čemu je $[u'(t)]^2 + [v'(t)]^2 > 0, (u(t), v(t)) \in D, a \leq t \leq b$. Ranije smo dokazali da je $ds = |d\vec{r}|$, pa je

$$ds^2 = |d\vec{r}|^2 = (d\vec{r})^2 = E(du)^2 + 2F du.dv + G(dv)^2,$$

prema tome

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Na ovaj način, dužina luka $L$ krive (18), izračunava se po formuli

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}dt.$$

**2.5.1. Definicija.** Neka se dve krive sa površi presecaju u nekoj tački. Ugao izmedju ove dve krive jeste ugao izmedju njihovih tangenti u tački preseka.

Neka dve glatke krive, koje leže na datoj površi, imaju presečnu tačku. Diferencijale njihovog predstavljanja u toj tački označimo sa $d\vec{r}$ i $\delta\vec{r}$, a njihove koeficijente razlaganja po vektorima $\vec{r}_u$ i $\vec{r}_v$ sa $du, dv$ za $d\vec{r}$ i $\delta u, \delta v$ za $\delta\vec{r}$. Tada je

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv, \\ \delta\vec{r} &= \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v. \end{aligned}$$

Ako $\varphi$ označava ugao medju krivim, tj. medju vektorima $d\vec{r}$ i $\delta\vec{r}$, prema poznatoj formuli imamo

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{d\vec{r}\delta\vec{r}}{|d\vec{r}||\delta\vec{r}|} \\ &= \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{E(du)^2 + 2Fdu.dv + G(dv)^2}\sqrt{E(\delta u)^2 + 2F\delta u.\delta v + G(\delta v)^2}}. \end{aligned}$$

Neka je

$$S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \overline{D}\},$$

neprekidno diferencijabilna glatka površ, pri čemu se površina zatvorene ravne oblasti $\overline{D}$ može izračunati integracijom tj. konačnom primenom kvadratura. Prema ranije datim teoremama o egzistenciji višestrukih integrala nije teško zaljučiti da egzistira sledeći integral

$$\iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv. \tag{20}$$

**2.5.2. Definicija.** Površina neprekidno diferencijabilne površi predstavljene formulom $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \overline{D}\}$, pri čemu je $\overline{D}$ kvadrabilan skup u $E^2$ definiše se integralom (20).

Za neposredno izračunavanje površine neprekidno diferencijabilne glatke površi koristi se sledeća formula.

$$\mu S = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv.$$

Medjutim, može se dati još jedna formula koja se često primenjuje. Predhodno se moramo podsetiti na neke činjenice iz vektorske algebre. Naime za proizvoljna dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ važe formule

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= |\vec{a}||\vec{b}| \sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}), \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}| \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}), \end{aligned}$$

gde je $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ ugao izmedju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako kvadriramo i medjusobno saberemo ove dve jednakosti dobiće se

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

ili ekvivalentno

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2.$$

Neposrednom primenom poslednje formule na podintegralnu funkciju $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$ u (20) biće

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 = |\vec{r}_u|^2 |\vec{r}_v|^2 - |\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v|^2 = EG - F^2,$$

pa formula za izračunavanje površine ima oblik

$$\mu S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, du dv.$$

Izraz $\sqrt{EG - F^2} du dv$ označava se simbolom $dS$:

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du dv,$$

i naziva *elementom površi.* Koristeći ovu oznaku predhodna formula ima još jedan oblik

$$\mu S = \iint\limits_D dS.$$

**2.5.3. Primer.** Napisati jednačinu tangentne ravni i normale površi

$$S : \begin{cases} x = a \cos u \sin v, \\ y = a \sin u \sin v, & (0 \leq u < 2\pi;\ 0 \leq v \leq \pi) \\ z = a \cos v & . \end{cases}$$

u tački $M_0\big(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{a}{\sqrt{2}}\big)$.

**Rešenje.** Pretpostavimo $a \neq 0$. Vrednosti parametara $u = u_0,\ v = v_0$, odgovarajućih uočenoj tački $M_0$, dobijaju se iz sistema jednačina

$$\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{2}} = a\cos u \sin v, & \\ 0 = a \sin u \sin v, & (0 \leq u < 2\pi;\ 0 \leq v \leq \pi) \\ -\frac{a}{\sqrt{2}} = a\cos v & . \end{cases}$$

Odatle dobijamo (proveriti) da tački $M_0$ odgovaraju vrednosti $u_0 = 0,\ v_0 = \frac{3\pi}{4}$. Kako u tački $(u_0, v_0)$ imamo:

$$x'_u = -a\sin u_0 \sin v_0 = 0,\ y'_u = a\cos u_0 \sin v_0 = \frac{a}{\sqrt{2}},\ z'_u = 0,$$

$$x'_v = a\cos u_0 \cos v_0 = -\frac{a}{\sqrt{2}},\ y'_v = a\sin u_0 \cos v_0 = 0,$$

$$z'_v = -a\sin v_0 = -\frac{a}{\sqrt{2}},$$

to je

$$A = \begin{vmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{a}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -\frac{a^2}{2},\ B = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{a}{\sqrt{2}} & -\frac{a}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 0,\ C = \begin{vmatrix} 0 & \frac{a}{\sqrt{2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{a^2}{2}.$$

Iz prethodnog sledi da je

$$\pi : -\frac{a^2}{2}\big(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\big) + 0(y-0) + \frac{a^2}{2}\big(z + \frac{a}{\sqrt{2}}\big) = 0,$$

odnosno $\pi : x - z - a\sqrt{2} = 0$, i

$$p : \frac{x - \frac{a}{\sqrt{2}}}{-\frac{a^2}{2}} = \frac{y-0}{0} = \frac{z + \frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a^2}{2}},$$

odnosno

$$p : \frac{x - \frac{a}{\sqrt{2}}}{-1} = \frac{z + \frac{a}{\sqrt{2}}}{1}, \quad y = 0,$$

jednačine tangentne ravni i normale naše površi $S$ u uočenoj tački $M_0$.♦

**Vežbe.**

$1^0$ Dokazati da se linije $(2a-x)y^2 = x^3$ i $(x^2+y^2)^2 = b^2(2x^2+y^2)$ seku pod pravim uglom.

$2^0$ Dokazati da ravni koje tangiraju površ

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \pi$$

odsecaju na koordinatnim osama odsečke čiji je zbir konstantan.

$3^0$ Dokazati da tangentne ravni površi

$$xyz = \pi^3$$

grade sa koordinatnim ravnima tetraedar konstntne zapremine.

$4^0$ Naći kosinuse ugla koje gradi tangenta na krivu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = mx$ sa koordinatnim osama.