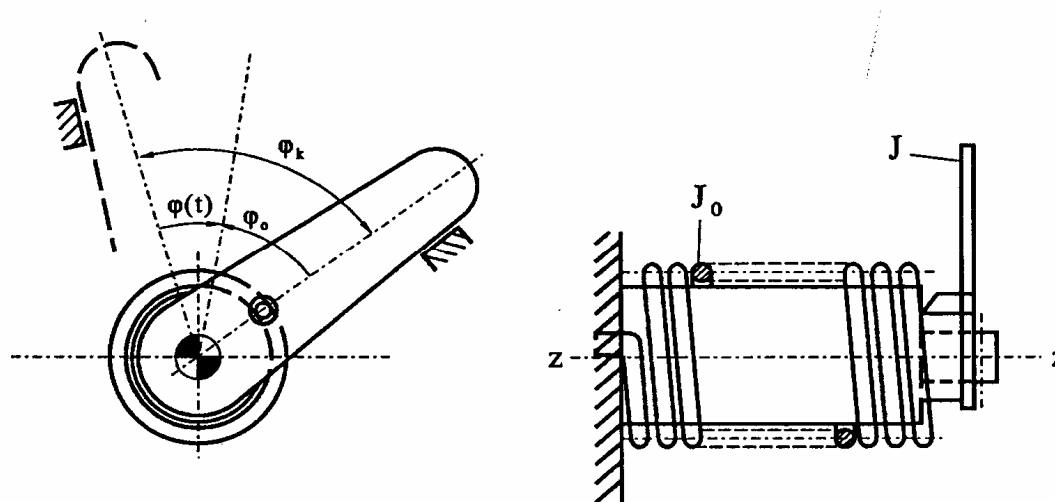


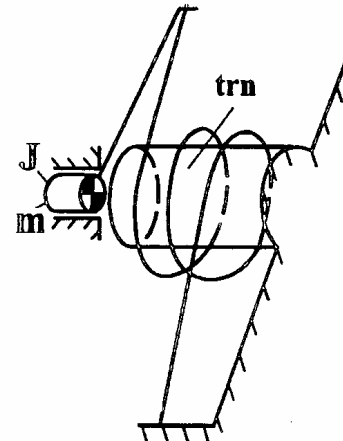
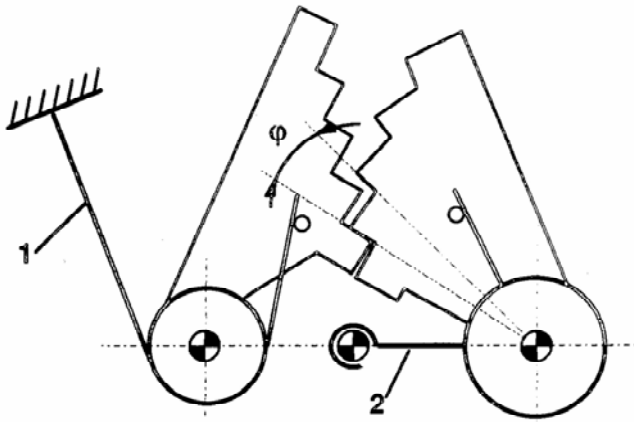
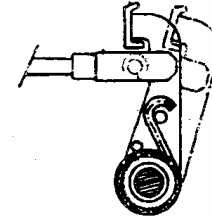
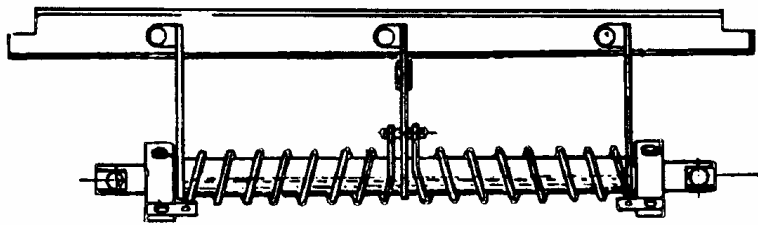
# Uvrtne zavojne opruge

Uvrtne opruge se koriste uglavnom za realizovanje obrtnog kretanja elemenata konstantnog ili promenljivog momenta inercije za osu opruge  $J$ .

Zadatak opruge je da realizuje zahtevano ugaono pomeranje elementa  $\varphi_k$  u vremenskom intervalu  $t_k$ .



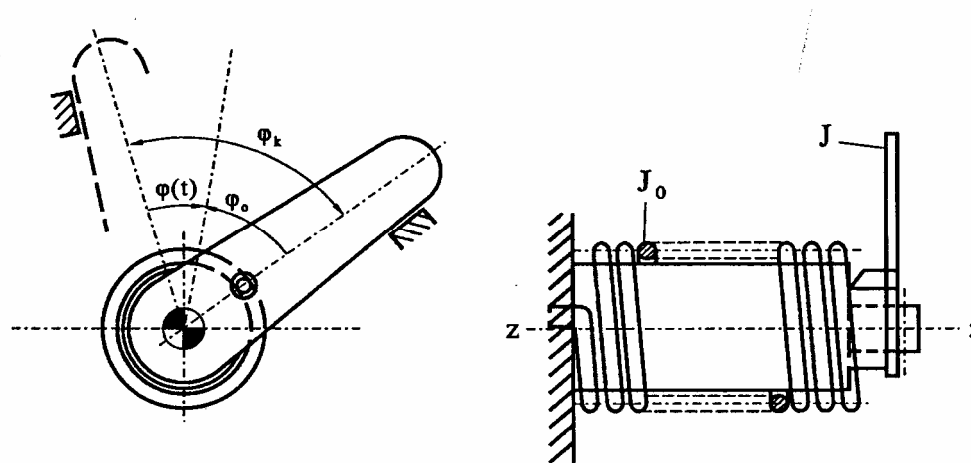
# Primeri primene uvrtnih zavojnih opruga kao pogonskih elemenata



# Uvrtne zavojne opruge

Oprugu treba tako dimenzionisati da sopstvena kružna frekvenca sistema  $\omega_1$  i početni otklon  $\varphi_p$ , za zadate vrednosti parametara opterećenja i uslove oslanjanja nepokretnog kraja opruge, zadovolje zahtev:

$$\varphi_k = \varphi_p (1 - \cos \omega_1 t_k)$$

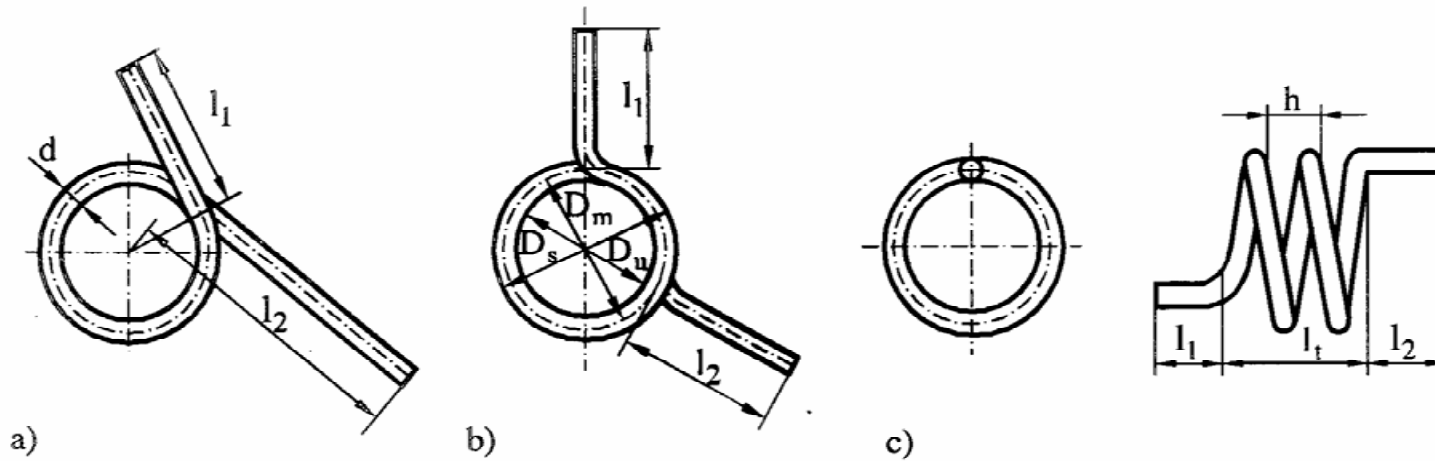


# Uvrtne zavojne opruge – model prostorno zakrivljenog štapa izloženog savijanju

Uvrtne zavojne opruge se izrađuju s korakom koji i pri početnom otklonu obezbeđuje zazor između zavojaka opruge čime se eliminiše uticaj trenja među zavojcima na karakteristiku opruge.

Opruga je jednoznačno definisana izborom vrednosti prečnika žice  $d$ , srednjeg prečnika opruge  $D_m$ , broja zavojaka  $n$ , dužina krakova  $l_1$  i  $l_2$  i izborom materijala od koga će opruga biti izrađena.

# Uvrtne zavojne opruge – model prostorno zakrivljenog štapa izloženog savijanju



Tangencijalno (a), radijalno (b) i aksijalno (c) izvođenje krakova

# Uvrtne zavojne opruge – model prostorno zakrivljenog štapa izloženog savijanju

$$\sigma_{df} = 0.7\sigma_M$$

$$a + d > \frac{D_m}{4} \Rightarrow l_t = n\sqrt{(D_m\pi n)^2 + (a + d)^2}$$

$$\sigma_{fp} = 0.4\sigma_M < \sigma_{df}$$

$$\varphi_p \leq \frac{M_p}{c_\varphi} = \frac{0.8\sigma_M}{Ed} (D_m\pi n + l_1 + l_2)$$

$$M_p = \sigma_{fp} \frac{\pi d^3}{32}$$

$$c_\varphi = \frac{EI_z}{L} = \frac{E\pi d^4}{64L}$$

$$L = l_t + l_1 + l_2$$

$$L = D_m\pi n + l_1 + l_2$$

$\sigma_{df}$  - dopušteni napon na savijanje

$\sigma_M$  - zatezna čvrstoća

$\sigma_{fp}$  - napon na savijanje pri početnom otklonu

$M_p$  - moment savijanja pri početnom otklonu

$c_\varphi$  - krutost uvrtnje zavojne opruge

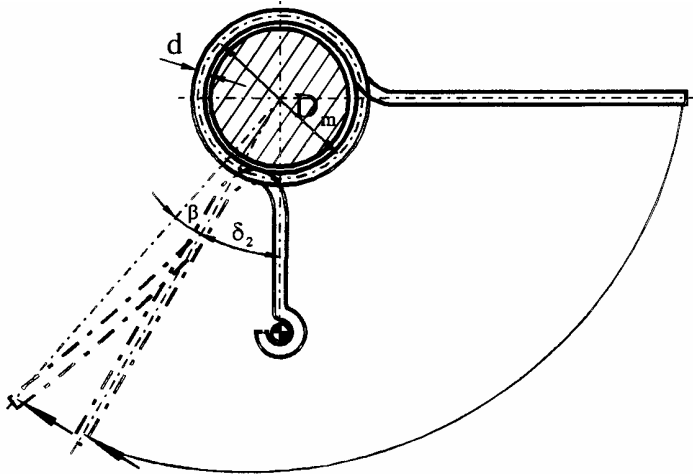
$E$  - modul elastičnosti čelične žice za opruge

$n$  - broj zavojaka opruge

$a$  - zazor između zavojaka

# Uvrtne zavojne opruge – model prostorno zakrivljenog štapa izloženog savijanju

Sa smanjenjem broja zavojaka i povećanjem dužine krakova opruge raste i uticaj ugla savijanja krakova na ugaono zakretanje pokretnog kraja opruge.



Korigovana vrednost ugaonog zakretanja može se računski odrediti uvođenjem korigovane krutosti opruge:

$$c_{\varphi} = \frac{EI_z}{l_t + \frac{l_1}{3} + \frac{l_2}{3}}$$

# Uvrtne zavojne opruge – model prostorno zakrivljenog štapa izloženog savijanju

$$D_{mp} = D_m \frac{2\pi n}{2\pi n + \varphi_p}$$

$$D_{up} = D_{mp} - d = D_m \frac{2\pi n}{2\pi n + \varphi_p} - d \geq d_t$$

$$\varphi_p \leq 2\pi n \left( \frac{D_m}{d_t + d} - 1 \right)$$

$$n \geq \frac{\varphi_p}{2\pi \left( \frac{D_m}{d_t + d} - 1 \right)}$$

$$d_t \leq 0.95 D_{up}$$

$D_{mp}$  - srednji prečnik opruge pri poč. otklonu

$D_{up}$  – unutr. prečnik opruge pri poč. otklonu

$\varphi_p$  - početni otklon

$d_t$  - prečnik trna

$n$  - broj zavojaka opruge

$d$  - prečnik žice opruge



# Uvrtne zavojne opruge – model prostorno zakrivljenog štapa izloženog savijanju

Približna vrednost sopstvene kružne frekvence:

$$\omega = \frac{1}{t_k} \arccos\left(1 - \frac{\varphi_k}{\varphi_p}\right)$$

Obično se usvajaju vrednosti:  $\frac{\varphi_k}{\varphi_p} \leq 1$

- da bi opruga i nakon realizovanja zahtevanog pomeranja  $\varphi_k$  raspolagala određenim obrtnim momentom,
- da bi se smanjilo oscilovanje opruge po završenom pomeranju

# Uvrtne zavojne opruge – model prostorno zakrivljenog štapa izloženog savijanju

Približna vrednost prečnika žice opruge:

$$d \approx \sqrt[4]{\frac{64LJ}{\pi E} \omega^2}$$

**d** - prečnik žice opruge

**L** - dužina žice opruge

**J** - moment inercije pokretnog elementa

$\omega$  - približna vrednost sopstvene kružne frekvence

**E** - modul elastičnosti čelične žice za opruge

# Uvrtne zavojne opruge – model prostorno zakrivljenog štapa izloženog savijanju

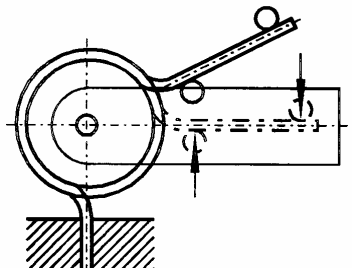
Od izbora vrednosti odnosa  $\varphi_k / \varphi_p$  zavisi i procena broja zavojaka u početnoj fazi proračuna opruge:

$$n \approx 3.18 \frac{\varphi_k}{\left(\frac{\varphi_k}{\varphi_p}\right)^2}$$

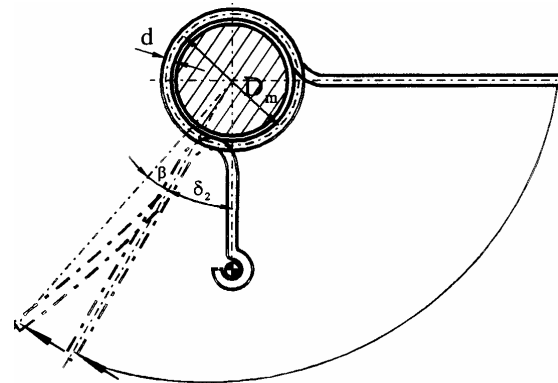
na bazi koje odlučujemo kojim od dva predložena modela dimenzionisati oprugu

# Uvrtne zavojne opruge – model prostorno zakrivljenog štapa izloženog savijanju

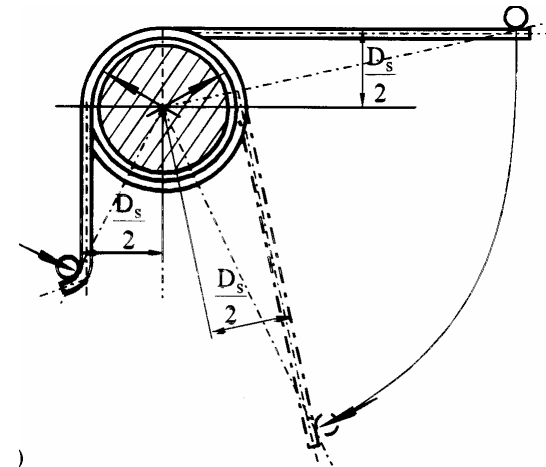
Predviđene su tri varijante veze odgovarajućeg kraka opruge sa nepokretnim referentnim sistemom:



uklještenje



zglobna veza



oslanjanje

# Primer proračuna uvrtnje zavojne opruge – prostorno zakrivljeni štap

Dimenzionisati uvrtnu zavojnu oprugu koja treba da pomeri obrtnu polugu mase  $m = 33\text{g}$  za  $\varphi_k = 15^\circ$  u vremenskom intervalu  $t_k = 5\text{ms}$ . Pomeranje treba realizovati oprugom sa radijalnim kracima, dužine  $l_1 = l_2 = 37.7\text{mm}$ , navučenom na trn prečnika  $d_t = 14\text{mm}$  i vezanom sfernim zglobovom za postolje. Moment inercije poluge za obrtnu osu koja se poklapa sa osom opruge je  $J = 6136\text{gmm}^2$ . Sopstvenu kružnu frekvencu odrediti diskretizacijom mase opruge na 12 diskretnih masa po zavojku ( $\beta = 30^\circ$ ).

# Primer proračuna uvrtnе zavojne opruge – prostorno zakrivljeni štap

Za početni otklon usvojimo vrednost:  $\left( \left( \frac{\varphi_k}{\varphi_p} \right) \leq 1 \right)$

$$\varphi_p = 30^\circ$$

$$\text{Očekivani broj zavojaka je: } n \approx 3.18 \frac{\varphi_k}{\left( \frac{\varphi_k}{\varphi_p} \right)^2} = 3.18 \frac{\frac{\pi}{12}}{\left( \frac{15^\circ}{30^\circ} \right)^2} = 3.33$$

Opruge sa  $n < 8$  treba dimenzionisati modelom prostorno zakrivljenog štapa

# Primer proračuna uvrtnje zavojne opruge – prostorno zakrivljeni štap

a) Približna vrednost sopstvene kružne frekvence:

$$\omega = \frac{1}{t_k} \arccos\left(1 - \frac{\varphi_k}{\varphi_p}\right) = \frac{1}{0.005s} \arccos(1 - 0.5) = 209.44s^{-1}$$

# Primer proračuna uvrtnе zavoјne opruge – prostorno zakrivljeni štap

b) Usvajamo vrednost:  $(d_t \leq 0.95D_{up})$

$$\frac{D_m}{d_t + d} \approx \frac{D_m}{D_{mp}} = 1.025$$

$$\text{Broj zavoјaka opruge: } n \geq \frac{\varphi_p}{2\pi \left( \frac{D_m}{d_t + d} - 1 \right)} = \frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi(1.025 - 1)} = 3.33$$

usvajamo:  $n = 4$



# Primer proračuna uvrtnje zavojne opruge – prostorno zakrivljeni štap

c) Usvajamo srednji prečnik opruge:  $(D_m > d_t)$

$$D_m = 16\text{mm}$$

# Primer proračuna uvrtnje zavojne opruge – prostorno zakrivljeni štap

d) Dužina žice opruge:

$$L = D_m \pi n + l_1 + l_2 = 16\text{mm} \cdot \pi \cdot 4 + 37.7\text{mm} + 37.7\text{mm} = 276.46\text{mm}$$

Prečnik žice opruge:

$$d \approx \sqrt[4]{\frac{64LJ}{\pi E} \omega^2} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 276.46\text{mm} \cdot 6136\text{gmm}^2}{\pi \cdot 2.06 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} \cdot 209.44^2 \text{s}^{-2}} = 1.65\text{mm}$$

Usvajamo:  $d_s = 1.7\text{mm}$

$$D_m - d_s = 16\text{mm} - 1.7\text{mm} = 14.3\text{mm} > d_t (= 14\text{mm})$$

# Primer proračuna uvrtnе zavoјne opruge – prostorno zakrivljeni štap

e) Zatezna čvrstoća:

$$d_s = 1.7\text{mm} \Rightarrow \sigma_M = 1460 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Dopušteni napon na savijanje:

$$\sigma_{df} = 0.7\sigma_M = 0.7 \cdot 1460 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 1022 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

# Primer proračuna uvrtnje zavojne opruge – prostorno zakrivljeni štap

f) Granične vrednosti početnog otklona:

$$\varphi_p \leq \frac{0.8\sigma_M L}{Ed} = \frac{0.8 \cdot 1460 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 276.46\text{mm}}{2.06 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1.7\text{mm}} = 0.922\text{rad} = 52.83^\circ$$

$$\varphi_p \leq 2\pi n \left( \frac{D_m}{d_t + d} - 1 \right) = 2\pi \cdot 4 \cdot \left( \frac{16\text{mm}}{14\text{mm} + 1.7\text{mm}} - 1 \right) = 0.48\text{rad} = 27.52^\circ$$

Usvajamo nižu graničnu vrednost:  $\varphi_{pg} = 27.52^\circ$

# Primer proračuna uvrtnе zavojne opruge – prostorno zakrivljeni štap

g) Masa zavojnog dela opruge:

$$m_o = \rho \frac{d_s^2 \pi}{4} D_m \pi n = 7.85 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3} \frac{1.7^2 \text{mm}^2 \cdot \pi}{4} \cdot 16\text{mm} \cdot \pi \cdot 4 = 3.58\text{g}$$

Sopstveni moment inercije opruge:

$$J_o = m_o \frac{D_m^2}{4} = 3.58\text{g} \frac{16^2 \text{mm}^2}{4} = 229.28\text{gmm}^2$$

# Primer proračuna uvrtnje zavojne opruge – prostorno zakrivljeni štap

Ukupna masa opruge:

$$m_{ou} = \rho \frac{d_s^2 \pi}{4} L = 7.85 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3} \frac{1.7^2 \text{mm}^2 \cdot \pi}{4} \cdot 276.46 \text{mm} = 4.926 \text{g}$$

Ukupni moment inercije opruge:

$$J_{ou} = \frac{m_o}{L} \left( \frac{l_t D_m^2}{4} + \frac{(l_1 + l_2) D_m^2}{4} + \frac{(l_1^2 + l_2^2) D_m}{2} + \frac{l_1^3 + l_2^3}{3} \right) = 1356.94 \text{gmm}^2$$

# Primer proračuna uvrtnje zavojne opruge – prostorno zakrivljeni štap

h) Karakteristična vrednost osnovnog harmonika: **k = 0.00139**

$$I_z = \frac{d_s^4 \pi}{64} = \frac{1.7^4 \text{ mm}^4 \cdot \pi}{64} = 0.40998 \text{ mm}^4$$

Tačna vrednost sopstvene kružne frekvence osnovnog harmonika:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{8EI_z}{D_m^3 m_{ou}}} k = \sqrt{\frac{8 \cdot 2.06 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 0.41 \text{ mm}^4}{16^3 \cdot \text{mm}^3 \cdot 4.926 \text{ g}}} \cdot 0.00139 = 215.847 \text{ s}^{-1}$$

# Primer proračuna uvrtnje zavojne opruge – prostorno zakrivljeni štap

i) Početni otklon:

$$\varphi_p = \frac{\varphi_k}{1 - \cos(\omega_1 t_k)} = \frac{0.2618}{1 - \cos(215.8s^{-1} \cdot 0.005s)} = 0.4958\text{rad} = 28.41^\circ$$

$$28.41^\circ = \varphi_p > \varphi_{pg} = 27.52^\circ$$

$$d_t = 13.9\text{mm}$$

$$d_s = 1.7\text{mm}$$

$$D_m = 16\text{mm}$$

$$n = 4$$

$$\varphi_p = 28.41^\circ$$

$$\omega_1 = 215.85s^{-1}$$

$$d_t = 14\text{mm}$$

$$d_s = 1.7\text{mm}$$

$$D_m = 17\text{mm}$$

$$n = 4$$

$$\varphi_p = 30.29^\circ$$

$$\omega_1 = 208.32s^{-1}$$



# Uvrtne zavojne opruge – model šupljeg cilindra izloženog uvijanju

Kod uvrtnih opruga sa više od osam zavojaka i trnom uticaj vrste veze krajeva opruge sa postoljem i obrtnim elementom se može zanemariti.

Sopstvena kružna frekvenca se u tom slučaju može lakše odrediti modelom torziono elastičnog šupljeg cilindra čija je dužina jednaka dužini opruge, krutost pri uvijanju jednaka krutosti uvrtno opruge, a jednaki su i aksijalni momenti inercije mase po jedinici dužine ose opruge.

# Uvrtne zavojne opruge – model šupljeg cilindra izloženog uvijanju

$$\varphi_p = \frac{M_p}{c_\varphi} = \frac{2L}{Ed} \sigma_{fp}$$

$$\omega_1 = k_1 \sqrt{\frac{c_\varphi}{J_o}} = k_1 \sqrt{\frac{E\pi d^4}{64LJ_o}}$$

$$J_o = m_o \frac{D_m^2}{4} = \frac{\rho\pi^2 d^2 n D_m^3}{16}$$

$$1 - \frac{\varphi_k}{\varphi_p} = \cos(\omega_1 t_k)$$

$\varphi_p$  - početni otklon

$M_p$  - moment savijanja pri početnom otklonu

$c_\varphi$  - krutost uvrtnje zavojne opruge

$L$  - dužina žice opruge

$\sigma_{fp}$  - napon na savijanje pri početnom otklonu

$E$  - modul elastičnosti čelične žice za opruge

$d$  - prečnik žice opruge

$n$  - broj zavojaka opruge

$m_o$  - masa zavojnog dela opruge

$D_m$  - srednji prečnik opruge

$\rho$  - gustina materijala žice opruge

$\varphi_k$  - ugaono pomeranje elementa

$t_k$  - vremenski interval

# Uvrtne zavojne opruge – model šupljeg cilindra izloženog uvijanju

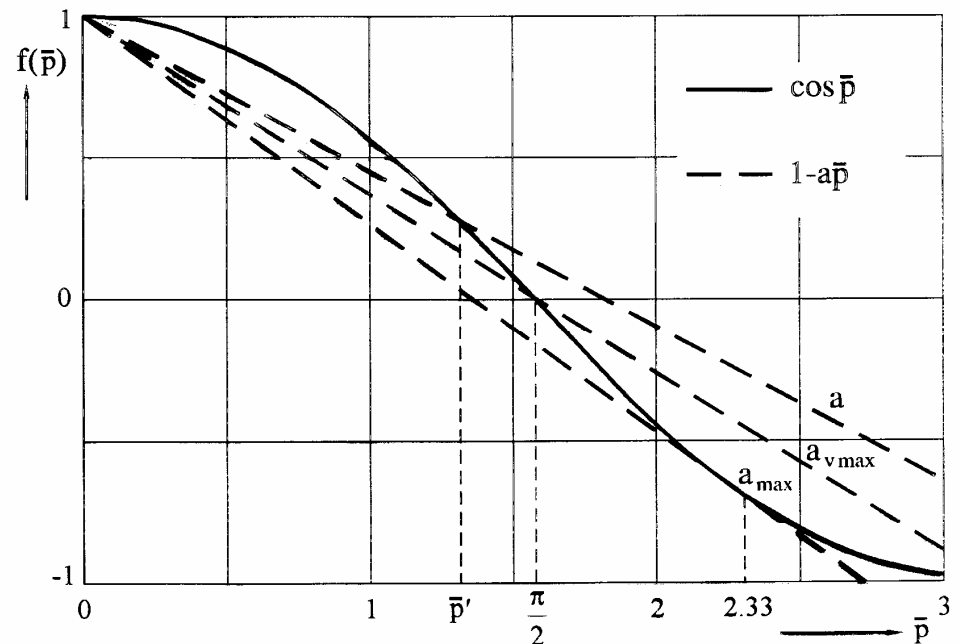
$$1 - \frac{\varphi_k}{2\pi} \frac{E}{\sigma_{fp}} \frac{d}{D_m^2 n} = \cos \left( k_1 \frac{t_k}{2\pi D_m^2 n} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right)$$

$$\bar{p} = k_1 \frac{t_k}{2\pi D_m^2 n} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$a = \frac{1}{k_1 \sigma_{fp}} \sqrt{E\rho} \frac{\varphi_k}{t_k}$$

$$1 - a\bar{p}D_m = \cos \bar{p}$$

$$(aD_m)_{\max} = 0.7246 \Leftrightarrow \bar{p} = 2.33$$



# Uvrtne zavojne opruge – model šupljeg cilindra izloženog uvijanju

$$k_{1g} = \frac{D_m}{0.7246 \cdot \sigma_{fp}} \sqrt{E\rho \cdot \omega_{sr}} = k_{1g}(D_m, \omega_{sr})$$

$$\text{ctg } k_{1g} = \kappa_g k_{1g} \Rightarrow \kappa_g = \kappa_g(\omega_{sr})$$

$$\kappa = \frac{J}{J_0}$$

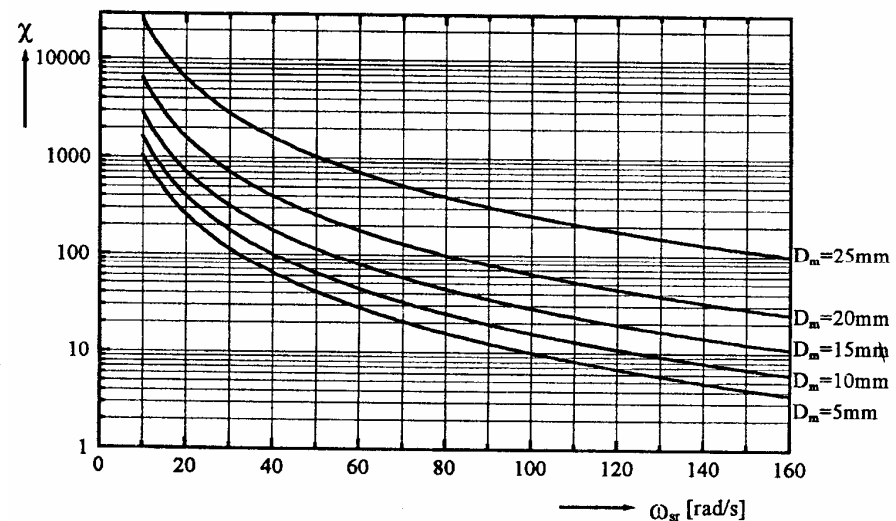
$k_1$  – karakter. vrednost osnovnog harmonika

$\sigma_{fp}$  – napon na savijanje pri početnom otklonu

$E$  - modul elastičnosti

$\rho$  - gustina materijala žice opruge

$\omega_{sr}$  - srednja ugaona brzina



# Uvrtne zavojne opruge – model šupljeg cilindra izloženog uvijanju

Približna vrednost prečnika žice:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16Jp}{D_m \pi^2 \kappa \rho}}$$

**d** - prečnik žice opruge

**J** - moment inercije pokretnog sklopa

**p** – faktor dimenzija opruge

**ρ** - gustina materijala žice opruge

**κ** - odnos momenata inercije pokretnog sklopa i opruge

**D<sub>m</sub>** – srednji prečnik opruge

# Uvrtne zavojne opruge – model šupljeg cilindra izloženog uvijanju

Moment inercije opruge sa:

- tangencijalnim kracima 
$$\mathbf{J}_{ou} = \frac{m_o}{L} \left( \frac{l_t \mathbf{D}_m^2}{4} + \frac{(l_1 + l_2) \mathbf{D}_m^2}{4} + \frac{l_1^3 + l_2^3}{3} \right)$$

- radijalnim kracima

$$\mathbf{J}_{ou} = \frac{m_o}{L} \left( \frac{l_t \mathbf{D}_m^2}{4} + \frac{(l_1 + l_2) \mathbf{D}_m^2}{4} + \frac{(l_1^2 + l_2^2) \mathbf{D}_m}{2} + \frac{l_1^3 + l_2^3}{3} \right)$$

- aksijalnim kracima 
$$\mathbf{J}_{ou} = \frac{m_o}{L} \left( \frac{l_t \mathbf{D}_m^2}{4} + \frac{(l_1 + l_2) \mathbf{D}_m^2}{4} \right)$$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

Primer 3.1: Dimenzionisati uvrtnu zavojnu oprugu, navučenu na trn prečnika  $d_t = 12.9\text{mm}$ , koja treba da pomeri obrtnu polugu mase  $m = 33\text{g}$  za  $\varphi_k = 24^\circ$  u vremenskom intervalu  $t_k = 5\text{ms}$ . Moment inercije poluge za obrtnu osu poluge koja se poklapa sa osom opruge je  $J = 3136\text{gmm}^2$ . Oprugu dimenzionisati modelom šupljeg cilindra izloženog uvijanju.

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

Usvajamo srednji prečnik opruge:

$$D_m = 15\text{mm} > d_t (= 12.9\text{mm})$$



# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

a) Odnos momenata inercije pokretnog sklopa i opruge:

$$\omega_{sr} = \frac{\varphi_k}{t_k} = 83.7758s^{-1} \quad \Rightarrow \kappa_g = 40.2$$

$$D_m = 15\text{mm}$$

Usvajamo:  $\kappa = 21.66$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

b) Za odnose momenata inercije  $\kappa > 5$  dovoljno tačno rešenje frekventne jednačine daje relacija:

$$\mathbf{k}_1 = \sqrt{\frac{3}{3\kappa + 1}} = \sqrt{\frac{3}{3 \cdot 21.66 + 1}} = \mathbf{0.21323}$$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

c) Približna rešenja transcendentne jednačine za dimenzionisanje opruga:

$$1 - a\bar{p}D_m = \cos \bar{p}$$

mogu se odrediti nekim od numeričkih postupaka ili grafički .

Za vrednost koeficijenta **a**:

$$a = \frac{1}{k_1 \sigma_{fp}} \sqrt{\rho E} \frac{\varphi_k}{t_k}$$
$$a = \frac{1}{0.213 \cdot 550 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} \sqrt{7.85 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3} \cdot 206000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \frac{0.419 \text{ rad}}{5 \text{ ms}}} = 0.0287 \text{mm}^{-1}$$

i  $D_m = 15\text{mm}$  rešenje jednačine biće:  $\bar{p} = 0.926101$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

d) Faktor dimenzija opruge može se odrediti iz relacije:

$$\frac{d}{D_m^2 n} = p = \sqrt{\frac{\rho}{E} \frac{2p\pi}{k_1 t_k}}$$
$$p = \sqrt{\frac{7.85 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}}{206000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} \frac{2 \cdot 0.9261\pi}{0.213 \cdot 0.005\text{s}}} = 0.001065 \text{mm}^{-1}$$

## Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

e) Približna vrednost prečnika žice može se odrediti iz relacije:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16Jp}{D_m \pi^2 \kappa \rho}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 6136 \text{gmm}^2 \cdot 0.001065 \text{mm}^{-1}}{15 \text{mm} \cdot \pi^2 \cdot 21.66 \cdot 7.85 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}}} = 1.6075 \text{mm}$$

Usvajamo prvu veću standardnu vrednost:  $d_s = 1.7 \text{mm}$

$$d_s = 1.7 \text{mm} \Rightarrow \sigma_M = 1460 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$D_m - d_s = 15 \text{mm} - 1.7 \text{mm} = 13.3 \text{mm} > d_t (= 12.9 \text{mm})$$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

f) Odnos motanja

$$w = \frac{D_m}{d_s} = \frac{15\text{mm}}{1.7\text{mm}} = 8.8$$

$$w = 4 \div 16$$

## Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

g) Broj zavojaka opruge izračunavamo relacijom:

$$\mathbf{n} = \frac{16\mathbf{J}}{\pi^2 \kappa \rho d_s^2 \mathbf{D}_m^3} = \frac{16 \cdot 6136 \text{gmm}^2}{\pi^2 \cdot 21.66 \cdot 7.85 \cdot 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{mm}^3} \cdot 1.7^2 \text{mm}^2 \cdot 15^3 \text{mm}^3} = 5.998$$

Usvajamo prvu veću celobrojnu vrednost: **n = 6**

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

h) Dužina žice opruge:

$$\mathbf{L = D_m \pi n = 15mm \cdot \pi \cdot 6 = 282.743mm}$$

Masa opruge:

$$\mathbf{m_o = \rho \frac{d_s^2 \pi}{4} L = 7.85 \cdot 10^{-6} \frac{kg}{mm^3} \frac{1.7^2 mm^2 \cdot \pi}{4} \cdot 282.743mm = 5.038g}$$

Sopstveni moment inercije opruge:

$$\mathbf{J_o = m_o \frac{D_m^2}{4} = 5.038g \frac{15^2 mm^2}{4} = 283.3819gmm^2}$$



# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

i) Odnos momenata inercije:

$$\kappa = \frac{J}{J_0} = \frac{6136\text{gmm}^2}{283.382\text{gmm}^2} = 21.65 \approx 21.66$$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

j) Sopstvena kružna frekvencija osnovnog harmonika opruge:

$$\omega_1 = k_1 \sqrt{\frac{E\pi d_s^4}{64LJ_0}} = 0.21323 \sqrt{\frac{206000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \pi \cdot 1.7^4 \text{mm}^4}{64 \cdot 282.743 \cdot 283.382 \text{gmm}^2}} = 218.91848 \text{s}^{-1}$$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

k) Početni otklon:

$$\varphi_p = \frac{\varphi_k}{1 - \cos(\omega_1 t_k)} = \frac{0.419}{1 - \cos(218.9\text{s}^{-1} \cdot 0.005\text{s})} = 0.7736\text{rad} = 44.33^\circ$$

$$\varphi_p \leq \frac{0.8\sigma_M L}{Ed} = \frac{0.8 \cdot 1460 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 283.382\text{mm}}{2.06 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1.7\text{mm}} = 0.943\text{rad} = 54.03^\circ$$

$$\varphi_p \leq 2\pi n \left( \frac{D_m}{d_t + d} - 1 \right) = 2\pi \cdot 6 \cdot \left( \frac{15\text{mm}}{12.9\text{mm} + 1.7\text{mm}} - 1 \right) = 1.033\text{rad} = 59.19^\circ$$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

Primer: Dimenzionisati uvrtnu zavojnu oprugu sa radijalnim kracima dužine  $l_1 = 2\text{mm}$  i  $l_2 = 23\text{mm}$ , navučenu na trn prečnika  $d_t = 19.5\text{mm}$ , koja treba da pomeri obrtni disk mase  $m = 50.1\text{g}$  za  $\varphi_k = 29^\circ$  u vremenskom intervalu  $t_k = 9.5\text{ms}$ . Moment inercije poluge za obrtnu osu poluge koja se poklapa sa osom opruge je  $J = 9118\text{gmm}^2$ . Oprugu dimenzionisati modelom šupljeg cilindra izloženog uvijanju. Karakteristike materijala žice opruge su:  $\rho = 8160\text{kg/m}^3$  i  $E = 206000\text{N/mm}^2$ .

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

Usvajamo srednji prečnik opruge:

$$\mathbf{D_m = 22mm > d_t (= 19.5mm)}$$

Usvajamo napon na savijanje pri početnom otkonu:

$$\mathbf{\sigma_{fp} = 500 \text{ N/mm}^2}$$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

a) Odnos momenata inercije pokretnog sklopa i opruge:

usvajamo:  $\kappa = 5.316$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

b) Za odnose momenata inercije  $\kappa > 5$  dovoljno tačno rešenje frekventne jednačine daje relacija:

$$\mathbf{k}_1 = \sqrt{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{3\kappa + 1}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{3 \cdot 5.316 + 1}}} = \mathbf{0.4207}$$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

c) Približna rešenja transcendentne jednačine za dimenzionisanje opruga:

$$1 - a\bar{p}D_m = \cos \bar{p}$$

mogu se odrediti nekim od numeričkih postupaka ili grafički .

Za vrednost koeficijenta **a**:

$$a = \frac{1}{k_1 \sigma_{fp}} \sqrt{\rho E} \frac{\varphi_k}{t_k}$$
$$a = \frac{1}{0.421 \cdot 500 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} \sqrt{8.16 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3} \cdot 206000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \frac{0.506 \text{ rad}}{9.5 \text{ ms}}} = 0.01038 \text{mm}^{-1}$$

i  $D_m = 22\text{mm}$  rešenje jednačine biće:  $\bar{p} = 0.465221$



# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

d) Faktor dimenzija opruge može se odrediti iz relacije:

$$\frac{d}{D_m^2 n} = p = \sqrt{\frac{\rho}{E} \frac{2p\pi}{k_1 t_k}}$$

$$p = \sqrt{\frac{8.16 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}}{206000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} \frac{2 \cdot 0.465221\pi}{0.4207 \cdot 0.0095\text{s}}} = 0.000146\text{mm}^{-1}$$

## Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

e) Približna vrednost prečnika žice može se odrediti iz relacije:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16Jp}{D_m \pi^2 \kappa \rho}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 9118 \text{gmm}^2 \cdot 0.000146 \text{mm}^{-1}}{22 \text{mm} \cdot \pi^2 \cdot 5.316 \cdot 8.16 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}}} = 1.3126 \text{mm}$$

Usvajamo veću standardnu vrednost:  $d_s = 2.0 \text{mm}$

$$d_s = 2.0 \text{mm} \Rightarrow \sigma_M = 1420 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$D_m - d_s = 22 \text{mm} - 2 \text{mm} = 20 \text{mm} > d_t (= 19.5 \text{mm})$$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

f) Odnos motanja

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{D}_m}{\mathbf{d}_s} = \frac{\mathbf{22mm}}{\mathbf{2mm}} = \mathbf{11}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{4 \div 16}$$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

g) Broj zavojaka opruge izračunavamo relacijom:

$$n = \frac{16J}{\pi^2 \kappa \rho d_s^2 D_m^3} = \frac{16 \cdot 9118 \text{gmm}^2}{\pi^2 \cdot 5.316 \cdot 8.16 \cdot 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{mm}^3} \cdot 2^2 \text{mm}^2 \cdot 22^3 \text{mm}^3} = 8.0$$

Usvajamo celobrojnu vrednost: **n = 8**

## Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

h) Dužina zavojnog dela žice opruge:

$$L_t = D_m \pi n = 22\text{mm} \cdot \pi \cdot 8 = 552.92\text{mm}$$

Masa zavojnog dela opruge:

$$m_o = \rho \frac{d_s^2 \pi}{4} L_t = 8.16 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3} \frac{2^2 \text{mm}^2 \cdot \pi}{4} \cdot 552.92\text{mm} = 14.174\text{g}$$

Sopstveni moment inercije zavojnog dela opruge:

$$J_o = m_o \frac{D_m^2}{4} = 14.174\text{g} \frac{22^2 \text{mm}^2}{4} = 1715.09\text{gmm}^2$$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

i) Odnos momenata inercije:

$$\kappa = \frac{J}{J_0} = \frac{9118 \text{gmm}^2}{1715.09 \text{gmm}^2} = 5.316 \approx 5.316$$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

j) Ukupna dužina žice opruge:

$$\mathbf{L = L_t + l_1 + l_2 = 552.92\text{mm} + 2\text{mm} + 23\text{mm} = 577.92\text{mm}}$$

Ukupni moment inercije opruge:

$$\mathbf{J_{ou} = \frac{m_o}{L} \left( \frac{L_t D_m^2}{4} + \frac{(l_1 + l_2) D_m^2}{4} + \frac{(l_1^2 + l_2^2) D_m}{2} + \frac{l_1^3 + l_2^3}{3} \right)}$$

$$\mathbf{J_{ou} = \frac{14.174}{577.92} \left( \frac{552.92 \cdot 22^2}{4} + \frac{(2 + 23) \cdot 22^2}{4} + \frac{(2^2 + 23^2) \cdot 22}{2} + \frac{2^3 + 23^3}{3} \right) \text{gmm}^2 = 1958.28\text{gmm}^2}$$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

k) Sopstvena kružna frekvencija osnovnog harmonika opruge:

$$\omega_1 = k_1 \sqrt{\frac{E\pi d_s^4}{64L_t J_{ou}}} = 0.4207 \sqrt{\frac{206000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \pi \cdot 2^4 \text{mm}^4}{64 \cdot 552.92 \text{mm} \cdot 1958.28 \text{gmm}^2}} = 162.62 \text{s}^{-1}$$



# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

1) Početni otklon:

$$\varphi_p = \frac{\varphi_k}{1 - \cos(\omega_1 t_k)} = \frac{0.506}{1 - \cos(162.62s^{-1} \cdot 0.0095s)} = 0.5196\text{rad} = 29.77^\circ$$

$$\varphi_p \leq \frac{0.8\sigma_M L}{Ed} = \frac{0.8 \cdot 1420 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 577.92\text{mm}}{2.06 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 2\text{mm}} = 1.593\text{rad} = 91.3^\circ$$

$$\varphi_p \leq 2\pi n \left( \frac{D_m}{d_t + d_s} - 1 \right) = 2\pi \cdot 8 \cdot \left( \frac{22\text{mm}}{19.5\text{mm} + 2\text{mm}} - 1 \right) = 1.169\text{rad} = 66.98^\circ$$

# Primer proračuna cilindrične opruge – elastični šuplji cilindar

Upoređenje modela za oprugu istih dimenzija sa istim parametrima kretanja i opterećenja:

	prostorno zakrivljeni štap	elastični šuplji cilindar
$\omega_1$ [s <sup>-1</sup> ]	164.91	162.62
$\Phi_p$ [°]	29.12	29.77