Vlastimir Nikolić,
Žarko Ćojbašić
Danijela Pajović

AUTOMATSKO UPRAVLJANJE
Analiza sistema

Glava 7

Dva ispitna pitanja za usmeni deo ispita

7. ODZIV PROMENLJIVIH STANJA I IZLAZA I POSTUPCI ZA ODREDJIVANJE MATRICE PRELAZA STANJA

7.1 ODZIV PROMENLJIVIH STANJA AUTONOMNOG SISTEMA

Linearni stacionarni sistem opisan je jednačinom stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\,. \tag{7.1}$$

Sistem na koji ne deluje ulazna (upravljačka) veličina ($\mathbf{u}(t) = 0$) je autonoman. Iz (7.1) proizilazi da je jednačina stanja autonomnog sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)\,. \tag{7.2}$$

Odgovarajuća jednačina stanja sistema prvog reda je oblika

$$\dot{x}(t) = ax(t)\,. \tag{7.3}$$

Integracijom leve i desne strane ove jednačine dobija se

$$x(t) = x(0) + \int_0^t ax(\tau)d\tau\,. \tag{7.4}$$

Kako je

$$x(\tau) = x(0) + \int_0^\tau ax(\tau)d\tau\,,$$

jednačina (7.4) za $x(t)$ se transformiše na oblik

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a\left[x(0) + \int_0^\tau ax(\tau)d\tau\right]d\tau = x(0) + x(0)\int_0^t ad\tau + \int_0^t a\int_0^\tau ax(\tau)d\tau d\tau.$$

Nastavkom ovog procesa zamene t sa τ dolazi se do izraza za $x(t)$

$$x(t) = x(0)\left(1 + \int_0^t ad\tau + \int_0^t a\int_0^\tau ad\tau d\tau + \int_0^t a\int_0^\tau a\int_0^\tau ad\tau d\tau d\tau + \cdots\right). \tag{7.5}$$

Iz (7.5) se dobija rešenje diferencijalne jednačine (7.3) u obliku

$$x(t) = \left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \cdots\right)x(0) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^kt^k}{k!}x(0) = e^{at}x(0). \tag{7.6}$$

Na anologan način može se doći do rešenja homogene jednačine (7.2). To rešenje ima oblik

$$\begin{aligned} \mathsf{x}(t) &= \left[\mathsf{I}_n + \mathsf{A}t + \frac{\mathsf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathsf{A}^3t^3}{3!} + \cdots\right]\mathsf{x}(0) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathsf{A}^kt^k}{k!}\mathsf{x}(0) = e^{\mathsf{A}t}\mathsf{x}(0) = \Phi(t)\mathsf{x}(0), \end{aligned} \tag{7.7}$$

gde je $\Phi(t)$ matrica prelaza stanja (fundamentalna matrica) sistema, definisana izrazom

$$\Phi(t) = \mathsf{I}_n + \mathsf{A}t + \frac{\mathsf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathsf{A}^3t^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathsf{A}^kt^k}{k!} = e^{\mathsf{A}t}. \tag{7.8}$$

Ako je početni vektor stanja poznat u trenutku t_0, a ne u trenutku $t=0$, rešenja jednačina (7.3) i (7.2) su

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x(t_0), \tag{7.9}$$

$$\mathsf{x}(t) = e^{\mathsf{A}(t-t_0)}\mathsf{x}(t_0) = \Phi(t-t_0)\mathsf{x}(t_0). \tag{7.10}$$

7.2 SVOJSTVA MATRICE PRELAZA STANJA

Očigledno je da matrica prelaza stanja ima veoma važnu ulogu u analizi sistema u prostoru stanja. Zato se pre rešavanja nehomogene jednačine sta-nja ukazuje na neka vrlo važna svojstva ove matrice.

1. Svojstvo početnog stanja

$$\Phi(t)\big|_{t=0} = e^{\mathrm{A}t}\big|_{t=0} = \Phi(0) = \mathrm{I}_n . \tag{7.11}$$

Dokaz ovog svojstva sledi neposredno iz relacije (7.8).

2. Svojstvo stepena

$$\text{Š}\Phi(t)\text{Ć}^n = \text{Š}e^{\mathrm{A}t}\text{Ć}^n = e^{\mathrm{A}(nt)} = \Phi(nt). \tag{7.12}$$

3. Svojstvo inverzije

$$\text{Š}\Phi(t)\text{Ć}^{-1} = e^{-\mathrm{A}t} = \Phi(-t). \tag{7.13}$$

4. Svojstvo grupe

$$\Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1),\ \ t_1 \in (t_0, t_2), \tag{7.14}$$

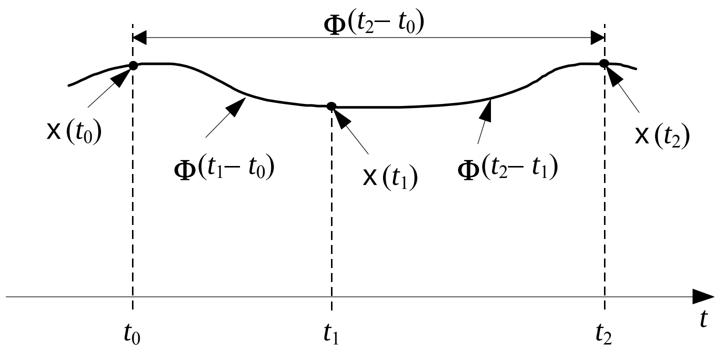
ili

$$\Phi(t + \tau) = \Phi(t)\Phi(\tau). \tag{7.15}$$

Ovo svojstvo se lako može dokazati na sledeći način:

$$\Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1) = e^{\mathrm{A}(t_1 - t_0)}e^{\mathrm{A}(t_2 - t_1)} = e^{\mathrm{A}(t_2 - t_0)} = \Phi(t_2 - t_0) .$$

Slika 7.1 pokazuje da je prelaz od $t = t_0$ do $t = t_2$ identičan prelazu od t_0 do t_1 i zatim od t_1 do t_2. Generalno svojstvo grupe se svodi na činjenicu da je prelazni proces moguće podeliti na više sekvencijalnih prelaza.



Slika 7.1

5. Svojstvo rešenja diferencijalne jednačine

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{d}{dt}\left[e^{\mathrm{A}t}\right] = \mathrm{A}\Phi(t) . \tag{7.16}$$

Ovo svojstvo može se dokazati iz relacije (7.8) ili zamenom izraza za $x(t)$ (7.7) i relacije $\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t)x(0)$ u jednačini stanja autonomnog sistema.

6. Svojstvo Laplasove transformacije

$$\mathcal{L}\{\Phi(t)\} = \Phi(s) = (sI_n - A)^{-1}, \tag{7.17}$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI_n - A)^{-1}\}. \tag{7.18}$$

7.3 ODZIV PROMENLJIVIH STANJA I IZLAZA NEAUTONOMNOG SISTEMA

Multivarijabilni sistem opisan je jednačinom stanja i jednačinom izlaza

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{7.19}$$

$$y(t) = Cx(t). \tag{7.20}$$

Rešenje jednačine stanja se pretpostavlja u obliku

$$x(t) = \Phi(t)z(t), \tag{7.21}$$

gde je $z(t)$ novi vektor stanja dimenzija $n\times 1$.

Zamenom izraza (7.21) u jednačini (7.19) dobija se

$$\dot{\Phi}(t)z(t) + \Phi(t)\dot{z}(t) = A\Phi(t)z(t) + Bu(t). \tag{7.22}$$

Na osnovu svojstva matrice prelaza stanja

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t),$$

i svojstva inverzije, relacija (7.22) se transformiše na oblik

$$\dot{z}(t) = \Phi(-t)Bu(t). \tag{7.23}$$

Iz (7.23) se integracijom dobija

$$z(t) = z(0) + \int_0^t \Phi(-\tau)Bu(\tau)d\tau, \tag{7.24}$$

gde τ predstavlja samo promenljivu integracije.

Iz jednačine (7.21) sledi da je $x(0)=z(0)$, jer je $\Phi(0)=I_n$. Zamenom $x(0)=z(0)$ u izraz (7.24) i množenjem tako dobijene jednačine matricom $\Phi(t)$ dobija se

$$\mathrm{x}(t) = \Phi(t)\mathrm{z}(t) = \Phi(t)\mathrm{x}(0) + \Phi(t)\int_0^t \Phi(-\tau)\mathrm{Bu}(\tau)d\tau . \qquad (7.25)$$

Pošto matrica prelaza stanja $\Phi(t)$ ne zavisi od τ može se uvesti pod znak integrala. Na osnovu svojstva (7.15) u obliku $\Phi(t)\Phi(-\tau) = \Phi(t-\tau)$, izraz za odziv vektora stanja se transformiše i postaje

$$\mathrm{x}(t) = \Phi(t)\mathrm{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathrm{Bu}(\tau)d\tau . \qquad (7.26)$$

Zamenom dobijenog izraza za $\mathrm{x}(t)$ u jednačini izlaza (7.20), dobija se odziv vektora izlaza

$$\mathrm{y}(t) = \mathrm{C}\Phi(t)\mathrm{x}(0) + \mathrm{C}\int_0^t \Phi(t-\tau)\mathrm{Bu}(\tau)d\tau . \qquad (7.27)$$

Ako je početni vektor stanja poznat u trenutku t_0, a ne u trenutku $t=0$, zamenom $t=t_0$ u (7.25) nalazi se vektor stanja $\mathrm{x}(0)$

$$\mathrm{x}(0) = \Phi(-t_0)\mathrm{x}(t_0) - \Phi(-t_0)\int_0^{t_0} \Phi(t_0-\tau)\mathrm{Bu}(\tau)d\tau . \qquad (7.28)$$

Dalje se zamenom izraza za $\mathrm{x}(0)$ u (7.26) i (7.27) dobijaju novi izrazi za odziv vektora stanja i vektora izlaza, koji odgovaraju slučaju kad je početni vektor stanja poznat u trenutku $t=t_0$, u obliku

$$\mathrm{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathrm{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)\mathrm{Bu}(\tau)d\tau , \qquad (7.29)$$

$$\mathrm{y}(t) = \mathrm{C}\Phi(t-t_0)\mathrm{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{C}\Phi(t-\tau)\mathrm{Bu}(\tau)d\tau . \qquad (7.30)$$

| Primer 7.1. Razmatra se sistem

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\mathrm{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t), \quad \mathrm{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathrm{x}(t) .$$

Treba odrediti odziv vektora stanja $\mathrm{x}(t)$ i odziv izlaza $\mathrm{y}(t)$ za $t \geq 0$, ako je ulaz $u(t)$ jedinična odskočna funkcija ($u(t) = 1(t)$).

Rezolventna matrica $\Phi(s)$ je

$$\Phi(s) = (s\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}.$$

Matrica prelaza stanja $\Phi(t)$ dobija se inverznom Laplasovom transfor-macijom rezolventne matrice $\Phi(s)$, i glasi

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Odziv vektora stanja i izlaza određuje se iz jednačina (7.25) i (7.27):

$$\mathrm{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}\left\{\mathrm{x}(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{\tau} - e^{2\tau} & e^{\tau} - e^{2\tau} \\ 2e^{2\tau} - 2e^{\tau} & 2e^{2\tau} - e^{\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1(\tau)d\tau\right\},$$

$$\mathrm{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}\mathrm{x}(0) + \begin{bmatrix} 0{,}5 - e^{-t} + 0{,}5e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0,$$

$$\mathrm{y}(t) = \mathrm{c}^T\mathrm{x}(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})x_1(0) + (e^{-t} - e^{-2t})x_2(0) + $$
$$+ 0{,}5 - e^{-t} + 0{,}5e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

❖

7.4 POSTUPCI ZA ODREDJIVANJE MATRICE PRELAZA STANJA

Kod većine postupaka za nalaženje matrice prelaza stanja $\Phi(t)$ ona se dobija iz rezolventne matrice $\Phi(s)$, inverznom Laplasovom transformacijom njenih elemenata. Stoga postupci za određivanje rezolventne matrice sistema istovremeno predstavljaju postupke za određivanje matrice prelaza stanja. U primeru 7.1 pokazan je postupak direktnog određivanja matrice $\Phi(s)$ nalaženjem inverzije matrice $(s\mathrm{I}_n - \mathrm{A})$.

7.4.1 Postupak određivanja matrice prelaza stanja iz definicije matričnog eksponencijala

Ovaj postupak polazi od definicije matričnog eksponencijala, odnosno od relacije (7.8) kojom je definisana matrica prelaza stanja. Zbog svoje složenosti on se retko koristi, a u nastavku je pokazano kako se postupak može primeniti na primeru sistema drugog reda, opisanog jednačinom stanja

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\mathrm{x}(t).$$

Odziv vektora stanja određen je izrazom (7.7)

$$\mathrm{x}(t) = \Phi(t)\mathrm{x}(0),$$

gde je

$$\Phi(t) = e^{\mathrm{A}t} = \mathrm{I}_2 + \mathrm{A}t + \frac{\mathrm{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathrm{A}^3 t^3}{3!} + \cdots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \cdots = \begin{bmatrix} 1 & t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \cdots \\ 0 & 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix},$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots, \quad e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \cdots.$$

Tako se dobija

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}.$$

7.4.2 Postupak primene Mejsnove formule i signalnog grafa

Rešenje jednačine stanja autonomnog sistema je

$$\mathrm{x}(t) = \Phi(t)\mathrm{x}(0). \tag{7.31}$$

Laplasovom transformacijom ovog izraza dobija se

$$\mathrm{X}(s) = \Phi(s)\mathrm{x}(0). \tag{7.32}$$

Za sistem n-tog reda je

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_i(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(s) & \Phi_{12}(s) & \cdots & \Phi_{1n}(s) \\ \Phi_{21}(s) & \Phi_{22}(s) & \cdots & \Phi_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{i1}(s) & \Phi_{i2}(s) & \cdots & \Phi_{in}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{n1}(s) & \Phi_{n2}(s) & \cdots & \Phi_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_j(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}. \tag{7.33}$$

Iz relacije (7.33) dobija se kompleksni lik veličine stanja $X_i(s)$

$$\begin{aligned} X_i(s) = {} & \Phi_{i1}(s)x_1(0) + \Phi_{i2}(s)x_2(0) + \cdots + \Phi_{i(j-1)}(s)x_{j-1}(0) + \\ & + \Phi_{ij}(s)x_j(0) + \Phi_{i(j+1)}(s)x_{j+1}(0) + \cdots + \Phi_{in}(s)x_n(0). \end{aligned} \tag{7.34}$$

Ako se pretpostavi

$$x_1(0)=x_2(0)=...=x_{j-1}(0)=x_{j+1}(0)=...=x_n(0)=0,\ \ x_j(0)\neq 0,$$

iz (7.34) se dobija

$$X_i(s)=\Phi_{ij}(s)x_j(0), \tag{7.35}$$

ili

$$\Phi_{ij}(s)=\frac{X_i(s)}{x_j(0)}. \tag{7.36}$$

Svi elementi rezolventne matrice $\Phi(s)$ određuju se iz signalnog grafa. Signalni graf se crta na osnovu jednačine stanja (7.2) nakon Laplasove transformacije njene leve i desne strane, čime se dobija

$$s\mathrm{X}(s)-\mathrm{x}(0)=\mathrm{AX}(s), \tag{7.37}$$

ili

$$\mathrm{X}(s)=s^{-1}\mathrm{x}(0)+s^{-1}\mathrm{AX}(s). \tag{7.38}$$

U signalnom grafu koji se crta na osnovu (7.38) početne vrednosti vektora stanja $\mathrm{x}(0)$ su ulazi (izvorni čvorovi) a Laplasove transformacije promenljivih stanja $\mathrm{X}(s)$ izlazi (ponorni ili mešoviti čvorovi).

| Primer 7.2. Sistem je opisan jednačinom stanja

$$\dot{\mathrm{x}}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}\mathrm{x}(t).$$

Primenom Mejsnove formule i signalnog grafa treba odrediti matricu prelaza stanja $\Phi(t)$.

Iz jednačina stanja dobijaju se kompleksni likovi promenljivih stanja

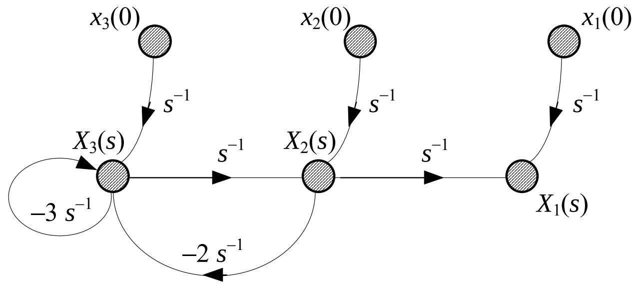
$$sX_1(s)-x_1(0)=X_2(s) \ \Rightarrow\ X_1(s)=s^{-1}X_2(s)+s^{-1}x_1(0),$$
$$sX_2(s)-x_2(0)=X_3(s) \ \Rightarrow\ X_2(s)=s^{-1}X_3(s)+s^{-1}x_2(0),$$
$$sX_3(s)-x_3(0)=-2X_2(s)-3X_3(s) \ \Rightarrow\ X_3(s)=-2s^{-1}X_2(s)-3s^{-1}X_3(s)+s^{-1}x_3(0).$$

Na osnovu ovih jednačina nacrtan je odgovarajući signalni graf koji je prika-zan na slici 7.2. Signalni graf ima dve zatvorene putanje:

$$L_1=-3s^{-1},\ \ L_2=-2s^{-2}.$$

Determinanta sistema se određuje iz relacije (3.25):

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 = 1 + 3s^{-1} + 2s^{-2} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2}.$$



Slika 7.2

Iz Mejsnove formule (3.24) dobijaju se elementi rezolventne matrice

$$\Phi_{11}(s) = \frac{X_1(s)}{x_1(0)} = \frac{1}{s},\quad \Phi_{12}(s) = \frac{X_1(s)}{x_2(0)} = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)},$$

$$\Phi_{13}(s) = \frac{X_1(s)}{x_3(0)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)},\quad \Phi_{21}(s) = \frac{X_2(s)}{x_1(0)} = 0,$$

$$\Phi_{22}(s) = \frac{X_2(s)}{x_2(0)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)},\quad \Phi_{23}(s) = \frac{X_2(s)}{x_3(0)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)},$$

$$\Phi_{31}(s) = \frac{X_3(s)}{x_1(0)} = 0,\quad \Phi_{32}(s) = \frac{X_3(s)}{x_2(0)} = -\frac{2}{(s+1)(s+2)},$$

$$\Phi_{33}(s) = \frac{X_3(s)}{x_3(0)} = \frac{s}{(s+1)(s+2)}.$$

Inverznom Laplasovom transformacijom ovih elemenata dolazi se do matrice prelaza stanja

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ 0 & 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$ ❖

Na sličan način, primenom Mejsnove formule i signalnog grafa, može se odrediti odziv stanja neautonomnog sistema, opisanog jednačinom stanja

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = \mathsf{A}\mathsf{x}(t) + \mathsf{b}u(t). \tag{7.39}$$

Laplasovom transformacijom leve i desne strane ove jednačine dobija se jednačina u kompleksnom domenu

$$s\mathrm{X}(s)-\mathrm{x}(0)=\mathrm{A}\mathrm{X}(s)+\mathrm{b}U(s), \tag{7.40}$$

na osnovu koje se crta signalni graf.

Posle jednostavnih operacija jednačina (7.40) se transformiše na oblik

$$\mathrm{X}(s)=(s\mathrm{I}_n-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}(0)+(s\mathrm{I}_n-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{b}U(s)=\Phi(s)\mathrm{x}(0)+\Phi(s)\mathrm{b}U(s), \tag{7.41}$$

ili

$$\mathrm{X}(s)=\Phi(s)\mathrm{x}(0)+\Psi(s)U(s). \tag{7.42}$$

Za sistem n-tog reda je

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_i(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Phi_{11}(s) & \Phi_{12}(s) & \cdots & \Phi_{1n}(s) \\ \Phi_{21}(s) & \Phi_{22}(s) & \cdots & \Phi_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{i1}(s) & \Phi_{i2}(s) & \cdots & \Phi_{in}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{n1}(s) & \Phi_{n2}(s) & \cdots & \Phi_{nn}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_j(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \Psi_1(s) \\ \Psi_2(s) \\ \vdots \\ \Psi_i(s) \\ \vdots \\ \Psi_n(s) \end{bmatrix}U(s). \tag{7.43}$$

Na sličan način kao kod autonomnog sistema, elementi matrica $\Phi(s)$ i $\Psi(s)$ dobijaju se iz signalnog grafa:

$$\Phi_{ij}(s)=\frac{X_i(s)}{x_j(0)}, \quad \Psi_i(s)=\frac{X_i}{U}(s). \tag{7.44}$$

Primer 7.3. Sistem je opisan jednačinom stanja

$$\dot{\mathrm{x}}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -6 \end{bmatrix}\mathrm{x}(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}u(t).$$

Treba odrediti odziv vektora stanja, ako je ulazna veličina $u(t)$ jedinična odskočna funkcija ($u(t)=1(t)$), a početni vektor stanja $\mathrm{x}^T(0)=$ Š0 4Ć.

Laplasovom transformacijom jednačina stanja dobija se

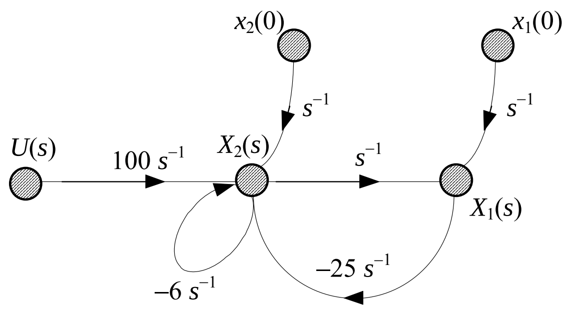
$$sX_1(s)-x_1(0)=X_2(s) \;\Rightarrow\; X_1(s)=s^{-1}X_2(s)+s^{-1}x_1(0),$$

$$sX_2(s)-x_2(0)=-25X_1(s)-6X_2(s)+100U(s) \;\Rightarrow$$

$$X_2(s)=-25s^{-1}X_1(s)-6s^{-1}X_2(s)+100s^{-1}U(s)+s^{-1}x_2(0),$$

a na osnovu ovih jednačina nacrtan je signalni graf (slika 7.3). Iz signalnog grafa, primenom Mejsnove formule, određene su prenosne funkcije

$$\Phi_{11}(s)=\frac{X_1(s)}{x_1(0)}=\frac{s+6}{s^2+6s+25},\quad \Phi_{12}(s)=\frac{X_1(s)}{x_2(0)}=\frac{1}{s^2+6s+25},$$
$$\Phi_{21}(s)=\frac{X_2(s)}{x_1(0)}=-\frac{25}{s^2+6s+25},\quad \Phi_{22}(s)=\frac{X_2(s)}{x_2(0)}=\frac{s}{s^2+6s+25},$$
$$\Psi_1(s)=\frac{X_1}{U}(s)=\frac{100}{s^2+6s+25},\quad \Psi_2(s)=\frac{X_2}{U}(s)=\frac{100s}{s^2+6s+25}.$$



Slika 7.3

Iz (7.42) je

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+6s+25}\left\{\begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 100 \\ 100s \end{bmatrix}U(s)\right\}.$$

Za početni vektor stanja $x^T(0) = [\,0 \quad 4\,]$ i ulaznu funkciju $U(s) = 1/s$ lako se dobija odziv vektora stanja

$$\mathrm{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+6s+25}\begin{bmatrix} 4 \\ 4s \end{bmatrix}+\frac{1}{s(s^2+6s+25)}\begin{bmatrix} 100 \\ 100s \end{bmatrix}\right\}=$$
$$=\begin{bmatrix} 4+e^{-3t}\sin 4t+5e^{-3t}\sin(4t-126{,}9^\circ) \\ 22e^{-3t}\sin 4t+4e^{-3t}\cos 4t \end{bmatrix}.$$

❖

7.4.3 Određivanje matrice prelaza stanja na osnovu svojstva rešenja diferencijalne jednačine

Za određivanje matrice prelaza stanja $\Phi(t)$ može biti korišćeno svojstvo rešenja diferencijalne jednačine autonomnog sistema

$$\dot{\Phi}(t) = \mathsf{A}\Phi(t)\,. \tag{7.45}$$

Ovaj postupak za određivanje matrice $\Phi(t)$ je relativno jednostavan i svodi se na rešavanje sistema algebarskih jednačina. Ovde je pokazana njegova aplikacija na sistem drugog reda, opisan jednačinom stanja

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathsf{x}(t)\,.$$

Iz (7.45) za razmatrani sistem se dobija

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi}_{11}(t) & \dot{\Phi}_{12}(t) \\ \dot{\Phi}_{21}(t) & \dot{\Phi}_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix}.$$

Ovoj matričnoj jednačini odgovara sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{11}(t) &= \Phi_{21}(t)\,, \\ \dot{\Phi}_{21}(t) &= -\Phi_{21}(t)\,, \\ \dot{\Phi}_{12}(t) &= \Phi_{22}(t)\,, \\ \dot{\Phi}_{22}(t) &= -\Phi_{22}(t)\,. \end{aligned}$$

Svojstvo početnog stanja

$$\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(0) & \Phi_{12}(0) \\ \Phi_{21}(0) & \Phi_{22}(0) \end{bmatrix},$$

daje početne vrednosti elemenata matrice prelaza stanja

$$\Phi_{11}(0) = 1; \quad \Phi_{12}(0) = 0; \quad \Phi_{21}(0) = 0; \quad \Phi_{22}(0) = 1.$$

Laplasovom transformacijom dobijene diferencijalne jednačine se prevode u kompleksni domen

$$\begin{aligned} s\Phi_{11}(s) - \Phi_{11}(0) &= \Phi_{21}(s), \\ s\Phi_{21}(s) - \Phi_{21}(0) &= -\Phi_{21}(s), \\ s\Phi_{12}(s) - \Phi_{12}(0) &= \Phi_{22}(s), \\ s\Phi_{22}(s) - \Phi_{22}(0) &= -\Phi_{22}(s). \end{aligned}$$

Iz ovih jednačina dobijaju se elementi matrice $\Phi(s)$

$$\Phi_{11}(s) = \frac{1}{s}; \quad \Phi_{12}(s) = \frac{1}{s(s+1)};$$

$$\Phi_{21}(s) = 0; \quad \Phi_{22}(s) = \frac{1}{s+1}\,.$$

Inverznom Laplasovom transformacijom ovih prenosnih funkcija određeni su elementi matrice prelaza stanja

$$\Phi_{11}(t)=1, \quad \Phi_{12}(t)=1-e^{-t}, \quad \Phi_{21}(t)=0, \quad \Phi_{22}(t)=e^{-t},$$

odnosno matrica prelaza stanja

$$\mathbf{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

U opštem slučaju, sistem algebarskih jednačina po $\Phi_{ij}(s)$ koji treba rešiti zavisi od oblika matrice sistema A, ali prikazani postupak za nalaženje matri-ce $\mathbf{\Phi}(t)$ ima isti tok i podrazumeva rešavanje algebarskog sistema i nalaženje inverzne Laplasove transformacije dobijenih prenosnih funkcija $\Phi_{ij}(s)$.

7.4.4 Određivanje matrice prelaza stanja primenom Leverijeovog algoritma

Kod ovog postupka, za određivanje rezolventne matrice $\mathbf{\Phi}(s)$ koristi se Leve-rijeov algoritam

$$\mathbf{\Phi}(s)=(s\mathrm{I}_n-\mathrm{A})^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(s\mathrm{I}_n-\mathrm{A})}{\det(s\mathrm{I}_n-\mathrm{A})}=\frac{\mathrm{I}_n s^{n-1}+\mathrm{F}_1 s^{n-2}+\cdots+\mathrm{F}_{n-2}s+\mathrm{F}_{n-1}}{s^n+a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}, \tag{7.46}$$

gde je

$$\begin{gathered} a_1=-\operatorname{trag}\mathrm{A}, \quad \mathrm{F}_1=\mathrm{A}+a_1\mathrm{I}_n, \\ a_2=-\frac{1}{2}\operatorname{trag}(\mathrm{A}\mathrm{F}_1), \quad \mathrm{F}_2=\mathrm{A}\mathrm{F}_1+a_2\mathrm{I}_n, \\ \vdots \\ a_{n-1}=-\frac{1}{(n-1)}\operatorname{trag}(\mathrm{A}\mathrm{F}_{n-2}), \quad \mathrm{F}_{n-1}=\mathrm{A}\mathrm{F}_{n-2}+a_{n-1}\mathrm{I}_n, \\ a_n=-\frac{1}{n}\operatorname{trag}(\mathrm{A}\mathrm{F}_{n-1}). \end{gathered} \tag{7.47}$$

Konačno, matrica $\mathbf{\Phi}(t)$ određuje se iz matrice $\mathbf{\Phi}(s)$ inverznom Laplasovom transformacijom.

Primer 7.4. Sistem je opisan realizacijom ℛšA, B, Cć, gde je

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{C}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primenom Leverijeovog algoritma treba odrediti odziv vektora stanja ako su ulazne funkcije $u_1(t)$ i $u_2(t)$ jedinične odskočne ($u_1(t)=1(t)$, $u_2(t)=1(t)$).

Iz Leverijeovog algoritma (7.47) određuju se koeficijenti a_i, $i=1,2,3$ i matrice F_i, $i=1,2$:

$$a_1 = -\operatorname{trag} A = 3, \quad F_1 = A + a_1 I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}\operatorname{trag}(AF_1) = 3, \quad F_2 = AF_1 + a_2 I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}\operatorname{trag}(AF_2) = 1.$$

Na osnovu dobijenih rezultata i izraza (7.46) sledi rezolventna matrica $\Phi(s)$

$$\Phi(s) = \frac{I_3 s^2 + F_1 s + F_2}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Matrica $\Phi(t)$ dobija se inverznom Laplasovom transformacijom matrice $\Phi(s)$:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Odziv vektora stanja prema relaciji (7.25) je

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{9-9e^{-t}-10te^{-t}}{6} \\ \frac{5-5e^{-t}}{3} \\ \frac{1-e^{-t}}{2} \end{bmatrix},$$

ili

$$x_1(t) = e^{-t}x_1(0) + te^{-t}x_2(0) + \frac{1}{6}(9 - 9e^{-t} - 10te^{-t}),$$

$$x_2(t) = e^{-t}x_2(0) + \frac{5}{3}(1 - e^{-t}),$$

$$x_3(t) = e^{-t}x_3(0) + \frac{1}{2}(1 - e^{-t}).$$

Odziv vektora izlaza je

$$\mathrm{y}(t) = \mathrm{C}\mathrm{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}x_1(0) + (t-1)e^{-t}x_2(0) - e^{-t}x_3(0) + \frac{1}{3}(-2 + 2e^{-t} - 5te^{-t}) \\ 2e^{-t}x_1(0) + (2t-1)e^{-t}x_2(0) + \frac{1}{3}(4 - 4e^{-t} - 10te^{-t}) \end{bmatrix},$$

ili

$$y_1(t) = e^{-t}x_1(0) + (t-1)e^{-t}x_2(0) - e^{-t}x_3(0) + \frac{1}{3}(-2 + 2e^{-t} - 5te^{-t}),$$

$$y_2(t) = 2e^{-t}x_1(0) + (2t-1)e^{-t}x_2(0) + \frac{1}{3}(4 - 4e^{-t} - 10te^{-t}).$$ ❖

9

7.5 POSTUPCI TRANSFORMACIJE MATRICE SISTEMA NA DIJAGONALNI OBLIK

Dijagonalizacijom matrice sistema A dobija se nova matrica sistema Λ sa sopstvenim vrednostima matrice A (za koje se pretpostavlja da su realne i različite) kao elementima glavne dijagonale. Matrica prelaza stanja $\Phi_d(t)$, koja odgovara dijagonalnoj matrici sistema Λ je takođe dijagonalna, sa elementima $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ na glavnoj dijagonali. Tako određena matrica prelaza stanja $\Phi_d(t)$ daje mogućnost da se odredi matrica prelaza stanja polaznog sistema. Osim toga dijagonalizacija matrice sistema omogućava da se na relativno jednostavan način donese zaključak o upravljivosti i rekonstruktibilnosti sistema.

Razmatra se sistem opisan jednačinom stanja i jednačinom izlaza

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{A}\mathrm{x}(t) + \mathrm{B}\mathrm{u}(t), \tag{7.48}$$

$$\mathrm{y}(t) = \mathrm{C}\mathrm{x}(t) + \mathrm{D}\mathrm{u}(t). \tag{7.49}$$

Pomoću matrice transformacije M (modalne matrice) sistem opisan jednačinama (7.48) i (7.49) transformiše se na oblik kod koga je matrica sistema dijagonalna

$$\mathrm{x}(t) = \mathrm{M}\mathrm{x}_d(t),$$

$$\dot{\mathrm{x}}_d(t) = \Lambda\mathrm{x}_d(t) + \mathrm{B}_d\mathrm{u}(t), \tag{7.50}$$

$$\mathsf{y}(t) = \mathsf{C}_d \mathsf{x}_d(t) + \mathsf{D}_d \mathsf{u}(t), \tag{7.51}$$

gde je

$$\Lambda = \mathsf{M}^{-1}\mathsf{AM} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{7.52}$$

$$\mathrm{B}_d = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{B},\ \ \mathrm{C}_d = \mathrm{CM},\ \ \mathrm{D}_d = \mathrm{D}. \tag{7.53}$$

Modalna matrica M formira se od sopstvenih vektora matrice A. Tako je

$$\mathrm{M} = [\,\mathrm{m}_1 \ \ \mathrm{m}_2 \ \ \mathrm{m}_3 \ \ \cdots \ \ \mathrm{m}_n\,], \tag{7.54}$$

gde su m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sopstveni vektori koji odgovaraju sopstvenim vred-nostima λ_i matrice A.

Iz (7.52) lako se dobija novi izraz koji povezuje matrice A i Λ, oblika

$$\mathrm{A} = \mathrm{M}\Lambda\mathrm{M}^{-1}.$$

Zamenom ovog izraza za matricu A u relaciji kojom je određena matrica prelaza stanja $\Phi(t)$, dolazi se do veze između matrice prelaza stanja polaznog i dijagonalizovanog sistema

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{\mathsf{A}t} = \mathsf{I}_n + \mathsf{A}t + \frac{\mathsf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathsf{A}^3 t^3}{3!} + \cdots = \\ &= \mathsf{MM}^{-1} + (\mathsf{M}\Lambda\mathsf{M}^{-1})t + (\mathsf{M}\Lambda\mathsf{M}^{-1})^2 \frac{t^2}{2!} + (\mathsf{M}\Lambda\mathsf{M}^{-1})^3 \frac{t^3}{3!} + \cdots = \\ &= \mathsf{M}\left[\mathsf{I}_n + \Lambda t + \frac{\Lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\Lambda^3 t^3}{3!} + \cdots\right]\mathsf{M}^{-1} = \mathsf{M}e^{\Lambda t}\mathsf{M}^{-1} = \mathsf{M}\Phi_d(t)\mathsf{M}^{-1}. \end{aligned} \tag{7.55}$$

Matrica prelaza stanja dijagonalizovanog sistema je

$$\Phi_d(t) = e^{\Lambda t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathsf{I}_n - \Lambda)^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \tag{7.56}$$

Postoji više postupaka za određivanje sopstvenih vektora matrice, kad su njene sopstvene vrednosti različite. Neki od njih, koji se najčešće koriste u teoriji automatskog upravljanja, prikazani su u nastavku, pri čemu je svaki razmatrani postupak propraćen odgovarajućim primerom.

1. Sopstveni vektori matrice sistema A_u koja odgovara upravljivoj kanonskoj realizaciji

Ako matrica sistema A_u odgovara upravljivoj kanonskoj realizaciji, može se pokazati da modalna matrica M, kojom se matrica sistema A_u dijagonalizuje, ima oblik Vandermondove (Vandermond) matrice

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{7.57}$$

gde su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti matrice A_u.

Neka je m_i sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ_i

$$\mathrm{m}_i = \begin{bmatrix} m_{1i} \\ m_{2i} \\ \vdots \\ m_{ni} \end{bmatrix}. \tag{7.58}$$

Tada je

$$(\lambda_i \mathrm{I}_n - \mathrm{A}_u)\,\mathrm{m}_i = 0, \tag{7.59}$$

ili

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda_i + a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1i} \\ m_{2i} \\ m_{3i} \\ \vdots \\ m_{n-1,i} \\ m_{ni} \end{bmatrix} = \mathbf{0}\,. \tag{7.60}$$

Odavde se dobijaju skalarne jednačine

$$\begin{gathered} \lambda_i m_{1i} - m_{2i} = 0, \\ \lambda_i m_{2i} - m_{3i} = 0, \\ \lambda_i m_{3i} - m_{4i} = 0, \\ \vdots \\ \lambda_i m_{n-1,i} - m_{ni} = 0, \end{gathered} \tag{7.61}$$

$$a_0 m_{1i} + a_1 m_{2i} + \cdots + (\lambda_i + a_{n-1}) m_{ni} = 0.$$

Za proizvoljnu vrednost $m_{1i} = 1$, iz prethodnih jednačina se dobija

$$\begin{aligned} m_{2i} &= \lambda_i, \\ m_{3i} &= \lambda_i^2, \\ &\vdots \\ m_{n-1,i} &= \lambda_i^{n-2}, \\ m_{ni} &= \lambda_i^{n-1}. \end{aligned} \tag{7.62}$$

Proizvoljni izbor vrednosti m_{1i} pokazuje da jednoj sopstvenoj vrednosti odgovara beskonačno mnogo sopstvenih vektora. To daje mogućnost da se za određeni sopstveni vektor dobije novi, množenjem svih njegovih elemenata nekim realnim brojem.

Primer 7.5. Data je matrica sistema

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix},$$

koja odgovara upravljivoj kanonskoj realizaciji. Sopstvene vrednosti matrice A_u su $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$ i $\lambda_3=-3$. Matrica transformacije M može se odrediti iz (7.57), i glasi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Iz izraza (7.52) dobija se dijagonalna matrica sistema

$$\Lambda = M^{-1} A_u M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Matrica prelaza stanja, koja odgovara matrici sistema Λ je

$$\Phi_d(t) = e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Konačno, matrica prelaza stanja polaznog sistema dobija se iz relacije

$$\Phi(t)= \mathrm{M}e^{\Lambda t}\mathrm{M}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5/2 & 1/2\\ -3 & -4 & -1\\ 1 & 3/2 & 1/2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\\ -3e^{-t}+6e^{-2t}-3e^{-3t} & -\frac{5}{2}e^{-t}+8e^{-2t}-\frac{9}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t}+2e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t}\\ 3e^{-t}-12e^{-2t}+9e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-16e^{-2t}+\frac{27}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{9}{2}e^{-3t}\end{bmatrix}.$$ ❖

2. Direktni postupak

Polazi se od činjenice da nenulti sopstveni vektori m_i zadovoljavaju jedna-činu

$$(\lambda_i \mathrm{I}_n - \mathrm{A})\,\mathrm{m}_i = 0 \tag{7.63}$$

gde je λ_i i-ta sopstvena vrednost matrice A.

} Primer 7.6. Data je matrica sistema

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -6 & -11 & 6\\ -6 & -11 & 5\end{bmatrix}.$$

Treba odrediti modalnu matricu M.

Sopstvene vrednosti matrice A, određene iz karakteristične jednačine

$$\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = 0,$$

su

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3.$$

Iz (7.63) za sopstvenu vrednost $\lambda_1 = -1$ dobija se matrična jednačina

$$(\lambda_1 \mathrm{I}_3 - \mathrm{A})\mathrm{m}_1 = 0,$$

ili

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & -1 & 1\\ 6 & \lambda_1+11 & -6\\ 6 & 11 & \lambda_1-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_{11}\\ m_{21}\\ m_{31}\end{bmatrix}= 0,$$

odnosno tri skalarne jednačine

$$-m_{11}-m_{21}+m_{31}=0,$$

$$6m_{11}+10m_{21}-6m_{31}=0,$$
$$6m_{11}+11m_{21}-6m_{31}=0.$$

Za m_{21}=0 (bira se proizvoljno) je m_{11}=m_{31} pa se proizvoljnim izborom m_{11} odnosno m_{31} (m_{11}=m_{31}=1), dobija sopstveni vektor m_1

$$\mathrm{m}_1=[1 \quad 0 \quad 1]^T.$$

Sopstvenoj vrednosti λ_2=–2 odgovara sopstveni vektor m_2, koji zadovoljava matričnu jednačinu

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 & 1 \\ 6 & \lambda_2+11 & -6 \\ 6 & 11 & \lambda_2-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{bmatrix}=0,$$

ili

$$-2m_{12}-m_{22}+m_{32}=0,$$
$$6m_{12}+9m_{22}-6m_{32}=0,$$
$$6m_{12}+11m_{22}-7m_{32}=0.$$

Za $m_{12}=1$ (bira se proizvoljno) iz ovih jednačina se dobijaju druga dva reše-nja $m_{22}=2$ i $m_{32}=4$. Tako je

$$\mathrm{m}_2=[1 \quad 2 \quad 4]^T.$$

Na kraju, za sopstveni vektor m_3 važi jednačina

$$\begin{bmatrix} \lambda_3 & -1 & 1 \\ 6 & \lambda_3+11 & -6 \\ 6 & 11 & \lambda_3-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{bmatrix}=0,$$

ili

$$-3m_{13}-m_{23}+m_{33}=0,$$
$$6m_{13}+8m_{23}-6m_{33}=0,$$
$$6m_{13}+11m_{23}-8m_{33}=0.$$

Za $m_{13}=1$ (bira se proizvoljno) iz ovih jednačina se dobijaju druga dva rešenja $m_{23}=6$ i $m_{33}=9$. Na taj način je određen treći sopstveni vektor

$$\mathrm{m}_3=[1 \quad 6 \quad 9]^T.$$

Modalna matrica ima oblik

$$\mathsf{M} = [\mathsf{m}_1 \quad \mathsf{m}_2 \quad \mathsf{m}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Sa ovako određenom modalnom matricom lako se može doći do dijago-nalne matrice sistema Λ, matrice prelaza stanja $\Phi_d(t)$ i matrice prelaza stanja $\Phi(t)$, na način kako je to urađeno u primeru 7.5. ❖

3. Postupak koji se zasniva na korišćenju adjungovane matrice

U slučaju matrice A s različitim sopstvenim vrednostima, sopstveni vektori su proporcionalni kolonama matrice

$$\theta(\lambda) = \mathrm{adj}(\lambda \mathsf{I}_n - \mathsf{A})\big|_{\lambda=\lambda_i}, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{7.64}$$

Primer 7.7. Data je matrica sistema

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sopstvene vrednosti matrice A su:

$$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = -3.$$

Iz (7.64) se dobija

$$\theta(\lambda) = \mathrm{adj}(\lambda \mathsf{I}_3 - \mathsf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 6\lambda + 11 & \lambda + 6 & -\lambda - 5 \\ -6\lambda - 6 & \lambda^2 - 5\lambda - 6 & 6\lambda + 6 \\ -6\lambda & -11\lambda - 6 & \lambda^2 + 11\lambda + 6 \end{bmatrix}.$$

Zamenjivanjem prve sopstvene vrednost ($\lambda_1 = -1$) u prvu, drugu ili treću kolonu matrice $\theta(\lambda)$ nalazi se prvi sopstveni vektor. Zamenom u prvu kolonu, dobija se

$$\mathsf{m}_1 = [6 \quad 0 \quad 6]^T.$$

Na sličan način se za druge dve sopstvene vrednosti ($\lambda_2 = -2$ i $\lambda_3 = -3$) dobijaju sopstveni vektori m_2 i m_3 (sopstvene vrednosti λ_2 i λ_3 zamenjene su u drugoj koloni matrice $\theta(\lambda)$):

$$\mathsf{m}_2 = [4 \quad 8 \quad 16]^T, \ \mathsf{m}_3 = [3 \quad 18 \quad 27]^T.$$

Na kraju, modalna matrica je

$$\mathsf{M} = [\mathsf{m}_1 \quad \mathsf{m}_2 \quad \mathsf{m}_3] = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & 18 \\ 6 & 16 & 27 \end{bmatrix}.$$ ❖

Ako se dobijeni rezultat za modalnu matricu u ovom primeru uporedi sa rezultatom iz primera 7.6, uočava se da se ove dve modalne matrice razlikuju iako je polazna matrica A u oba dva primera ista. Međutim, ranije je već naglašeno da jednoj sopstvenoj vrednosti matrice odgovara beskonačno mnogo sopstvenih vektora a samim tim i modalnih matrica. Vektori kolone tih matrica međusobno su proporcionalni. Tako ako se u primeru 7.7 prva, druga i treća kolona matrice M, respektivno pomnože sa 1/6, 1/4 i 1/3 dolazi se do modalne matrice koja je dobijena u primeru 7.6.

4. Postupak transformacije matrice $(\lambda I_n - A)$ na modifikovani Ermitov (Hermit) normalni oblik (MHN-oblik)

Matrica $(\lambda I_n - A)$ se transformiše na MHN oblik primenom elementarnih transformacija nad **vrstama** ove matrice, tako da se duž glavne dijagonale pojave jedinice i jedna nula, s tim da u kolonama u kojima je dijagonalni element jednak jedinici svi ostali elementi budu jednaki nuli.

Za određivanje sopstvenog vektora m_i, koji odgovara sopstvenoj vre-dnosti λ_i matrice A, treba sprovesti sledeću proceduru:

- matricu $(\lambda_i I_n - A)$, koja odgovara sopstvenoj vrednosti λ_i matrice A, tre-ba transformisati na MHN-oblik;
- identifikovati kolonu u kojoj se na mestu glavne dijagonale javlja nula;
- ovu nulu treba zameniti sa -1, a tako dobijena kolona predstavlja sop-stveni vektor m_i.

Primer 7.8. Data je matrica sistema

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odrediti modalnu matricu M transformacijom matrice $(\lambda_i I_n - A)$ na MHN oblik.

Sopstvene vrednosti matrice A dobijaju se iz karakteristične jednačine

$$\det(\lambda I_3 - A) = 0$$

i imaju vrednosti

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 11.$$

Za $\lambda_1 = -2$ je

$$\lambda_1 I_3 - A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -10 & -5 & -4 \\ -3 & -6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Elementarnim transformacijama nad vrstama ove matrice dobijena je slična matrica (MHN-oblik):

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -10 & -5 & -4 \\ -3 & -6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -10 & -5 & -4 \\ -3 & -6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{15}{4} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{15}{4} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako se u trećoj koloni poslednje matrice na mestu glavne dijagonale nalazi nula, zamenom tog elementa sa -1 dobija se prvi sopstveni vektor

$$m_1 = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad m_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Za $\lambda_2 = -3$ je

$$\lambda_2 I_3 - A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -2 \\ -10 & -6 & -4 \\ -3 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Na istovetan način se, elementarnim transformacijama nad vrstama ove matrice, dobija slična matrica (MHN-oblik):

$$\begin{bmatrix} -5 & -3 & -2 \\ -10 & -6 & -4 \\ -3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -10 & -6 & -4 \\ -3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{21}{5} & -\frac{14}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada se iz druge kolone poslednje matrice, zamenom nule sa -1, dobija drugi sopstveni vektor

$$m_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3/2 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad m_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Na kraju, za treću sopstvenu vrednost $\lambda_3 = 11$ je

$$\lambda_3 I_3 - A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -2 \\ -10 & 8 & -4 \\ -3 & -6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Elementarnim transformacijama nad vrstama ove matrice ona se transformiše na MHN-oblik:

$$\begin{bmatrix} 9 & -3 & -2 \\ -10 & 8 & -4 \\ -3 & -6 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{5}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -3 & -6 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & \frac{7}{12} & -\frac{7}{9} \\ 0 & -7 & \frac{28}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -7 & \frac{28}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz treće kolone poslednje matrice, zamenom nule sa -1, dobija se treći sopstveni vektor

$$m_3 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -4/3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad m_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Modalna matrica je konačno

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -5 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

❖

7.6 TRANSFORMACIJA MATRICE SISTEMA NA DŽORDANOVU KANONSKU FORMU

Ako matrica sistema A ima višestruke realne sopstvene vrednosti ona ne može biti dijagonalizovana, osim kada je simetrična i sa realnim elementima. Međutim, postoji transformacija

$$\Lambda_J = M_J^{-1} A M_J, \tag{7.65}$$

koja matricu sistema A prevodi u blok-dijagonalni oblik. Tako dobijena matrica Λ_J zove se Džordanova (Jordan) kanonska forma (Džordanova matrica). Tipične Džordanove kanonske forme i njima odgovarajuće matrice prelaza stanja date su u sledećim primerima:

$$\Lambda_J = \left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right], \quad \Phi_J(t) = e^{\Lambda_J t} = \left[\begin{array}{ccc|cc} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{array}\right],$$

$$\Lambda_J = \left[\begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right], \quad \Phi_J(t) = e^{\Lambda_J t} = \left[\begin{array}{c|cccc} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_2 t} & \frac{t^3}{3!}e^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{array}\right],$$

$$\Lambda_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \Phi_J(t) = e^{\Lambda_J t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & te^{\lambda_3 t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}.$$

Značajne osobine Džordanove kanonske forme mogu se pregledno sistema-tizovati.

1. Svi elementi glavne dijagonale matrice Λ_J su sopstvene vrednosti ma-trice A.
2. Svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki su nuli.
3. Elementi neposredno iznad dela glavne dijagonale koji odgovara više-strukoj sopstvenoj vrednosti jednaki su jedinici, što je očigledno iz prethodna tri primera.
4. Jedinice zajedno sa višestrukim sopstvenim vrednostima formiraju tipi-čne blokove, koji se zovu Džordanovi blokovi. U prethodna tri prime-ra Džordanovi blokovi su obeleženi isprekidanim linijama.
5. Kad nesimetrična matrica A ima višestruke sopstvene vrednosti, njeni sopstveni vektori mogu ali ne moraju da budu linearno nezavisni. Za matricu A dimenzija $n\times n$ postoji minimalno p ($p<n$) linearno nezavi-snih sopstvenih vektora (p je broj različitih sopstvenih vrednosti matri-ce A). Da li će broj sopstvenih vektora biti veći od p, zavisi od ranga matrica $(\lambda_i \mathrm{I}_n - \mathrm{A})$, koje odgovaraju višestrukim sopstvenim vredno-stima.
6. Broj Džordanovih blokova jednak je broju nezavisnih sopstvenih vektora.
7. Broj jedinica iznad glavne dijagonale jednak je razlici reda sistema (n) i broja nezavisnih sopstvenih vektora.

Modalna matrica M_J može biti određena na više načina. Postupak za određivanje matrice M_J zavisi od degeneracije q_i matrice $(\lambda_i \mathrm{I}_n - \mathrm{A})$. Broj linearno nezavisnih sopstvenih vektora, koji odgovaraju višestrukoj sopstvenoj vrednosti λ_i, jednak je degeneraciji q_i

$$q_i = n - \text{rang}(\lambda_i \mathrm{I}_n - \mathrm{A}), \tag{7.66}$$

koja se nalazi u granicama

$$1 \le q_i \le r_i, \tag{7.67}$$

gde je r_i višestrukost sopstvene vrednosti λ_i.

U zavisnosti od degeneracije q_i koriste se tri postupka za nalaženje sopstvenih vektora.

1. Potpuna degeneracija $q_i = r_i$. U ovom slučaju može se odrediti r_i linearno nezavisnih sopstvenih vektora, koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti λ_i. Ovi sopstveni vektori su proporcionalni nenultim kolonama matrice

$$\frac{1}{(r_i - 1)!}\left\{\frac{d^{r_i - 1}}{d\lambda^{r_i - 1}}\left[\text{adj}(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A})\right]\right\}_{\lambda = \lambda_i}, \tag{7.68}$$

   ili se određuju iz relacije

$$(\lambda_i \mathrm{I}_n - \mathrm{A})\mathrm{m}_i = 0. \tag{7.69}$$

2. Degeneracija $q_i = 1$. Neka matrica A ima p različitih sopstvenih vrednosti od ukupno n sopstvenih vrednosti. Sopstveni vektori koji odgovaraju jednostrukoj sopstvenoj vrednosti određuju se iz relacije

$$(\lambda_j \mathrm{I}_n - \mathrm{A})\mathrm{m}_j = 0, \tag{7.70}$$

   gde λ_j označava j-tu različitu sopstvenu vrednost. Ako je λ_i r_i-tostruka sopstvena vrednost, odgovarajući $r_i \times r_i$ Džordanov blok ima oblik

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}_{r_i \times r_i}. \tag{7.71}$$

   S tim u vezi, može se napisati matrična relacija

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_{r_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_{r_i} \end{bmatrix},$$

ili

$$\begin{aligned} \lambda_i\, m_1 &= Am_1, \\ m_1 + \lambda_i\, m_2 &= Am_2, \\ m_2 + \lambda_i\, m_3 &= Am_3, \\ &\vdots \\ m_{r_i - 1} + \lambda_i m_{r_i} &= Am_{r_i}, \end{aligned} \tag{7.72}$$

gde sopstveni vektor m_1 odgovara sopstvenoj vrednosti λ_i, dok su ostali sopstveni vektori (ima ih $r_i - 1$), m_2, m_3,..., m_{r_i} generalizovani (linearno zavisni) sopstveni vektori koji odgovaraju višestrukoj sopstvenoj vrednosti λ_i. Matrične jednačine iz kojih se određuju sopstveni vektori mogu biti napisane i na sledeći način:

$$\begin{aligned} (\lambda_i\, I_n - A)m_1 &= 0, \\ (\lambda_i\, I_n - A)m_2 &= -m_1, \\ (\lambda_i\, I_n - A)m_3 &= -m_2, \\ &\vdots \\ (\lambda_i I_n - A)m_{r_i} &= -m_{r_i - 1}. \end{aligned} \tag{7.73}$$

3. Opšti slučaj $1 < q_i < r_i$. Broj linearno nezavisnih sopstvenih vektora koji odgovaraju višestrukoj sopstvenoj vrednosti λ_i je q_i. Ovi vektori se određuju iz relacije (7.68) ili (7.69). Generalizovani sopstveni vektori koji odgovaraju višestrukoj sopstvenoj vrednosti λ_i određuju se iz relacija (7.72) ili (7.73).

Primer 7.9. Za matricu sistema A

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

treba odrediti Džordanovu kanonsku formu.

Iz karakteristične jednačine

$$\det(\lambda I_5 - A) = (\lambda + 1)^3 \lambda^2 = 0,$$

dobijaju se sopstvene vrednosti:

$\lambda_1 = -1$ (trostruka sopstvena vrednost);

$\lambda_4 = 0$ (dvostruka sopstvena vrednost).

Kako je rang matrice

$$\text{rang}(\lambda_1 I_5 - A) = \text{rang}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4,$$

sledi da ova matrica ima degeneraciju

$$q_1 = n - \text{rang}(\lambda_1 I_5 - A) = 5 - 4 = 1.$$

To znači da trostrukoj sopstvenoj vrednosti $\lambda_1 = -1$ odgovara jedan linearno nezavisan sopstveni vektor. On se može odrediti iz relacije (7.69) ili (7.73) (prvi izraz)

$$(\lambda_1 I_5 - A)m_1 = 0,$$

ili

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \\ m_{51} \end{bmatrix} = 0.$$

Izborom $m_{21} = 1$, iz skalarnih jednačina koje odgovaraju ovoj matričnoj jed-načini dobijaju se ostali elementi sopstvenog vektora m_1

$$m_{11} = 0,\; m_{31} = 0,\; m_{41} = 0,\; m_{51} = 1,$$

odnosno sopstveni vektor m_1

$$m_1 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T.$$

Generalizovani sopstveni vektori m_2 i m_3 koji odgovaraju trostrukoj sopstve-noj vrednosti λ_1 dobijaju se iz relacija (7.73)

$$(\lambda_1 I_5 - A)m_2 = -m_1,$$

ili

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \\ m_{42} \\ m_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Izborom $m_{22} = 0$, iz skalarnih jednačina koje odgovaraju ovoj matričnoj jednačini dobijaju se ostali elementi generalizovanog sopstvenog vektora m_2

$$m_{12} = 1,\ m_{32} = 1,\ m_{42} = 0,\ m_{52} = 0,$$

odnosno generalizovani sopstveni vektor m_2

$$\mathrm{m}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Iz jednačine

$$(\lambda_1 \mathrm{I}_5 - \mathrm{A})\mathrm{m}_3 = -\mathrm{m}_2,$$

ili

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \\ m_{43} \\ m_{53} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

na isti način, ali za $m_{23} = 0$, dobija se generalizovani sopstveni vektor m_3

$$\mathrm{m}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Za dvostruku sopstvenu vrednost $\lambda_4 = 0$ rang matrice $(\lambda_4 \mathrm{I}_5 - \mathrm{A})$ je

$$\operatorname{rang}(\lambda_4 \mathrm{I}_5 - \mathrm{A}) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 4,$$

a njena degeneracija

$$q_4 = n - \operatorname{rang}(\lambda_4 \mathrm{I}_5 - \mathrm{A}) = 5 - 4 = 1.$$

Degeneracija pokazuje da dvostrukoj sopstvenoj vrednosti λ_4 odgovara jedan linearno nezavisan sopstveni vektor. On se može odrediti iz relacije

$$(\lambda_4 I_5 - A)m_4 = 0,$$

ili

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{14} \\ m_{24} \\ m_{34} \\ m_{44} \\ m_{54} \end{bmatrix} = 0.$$

Izborom za $m_{14} = 0$ i $m_{34} = 1$, iz skalarnih jednačina koje odgovaraju ovoj matričnoj jednačini dobijaju se ostali elementi sopstvenog vektora m_4

$$m_{24} = 0, \quad m_{44} = 0, \quad m_{54} = 0,$$

odnosno sopstveni vektor m_4

$$m_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Generalizovani sopstveni vektor m_5, koji odgovara dvostrukoj sopstvenoj vrednosti λ_4 dobija se iz (7.73)

$$(\lambda_4 I_5 - A)m_5 = -m_4,$$

ili

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{15} \\ m_{25} \\ m_{35} \\ m_{45} \\ m_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Za $m_{15} = 1$ i $m_{35} = 0$ dobija se generalizovani sopstveni vektor

$$m_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Modalna matrica, Džordanova kanonska forma i njoj odgovarajuća matrica prelaza stanja imaju oblik

$$\mathrm{M}_J = [\mathrm{m}_1 \quad \mathrm{m}_2 \quad \mathrm{m}_3 \quad \mathrm{m}_4 \quad \mathrm{m}_5] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_J = \mathrm{M}_J^{-1}\mathrm{AM}_J = \left[\begin{array}{ccc:cc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\Phi_J(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathrm{I}_5 - \Lambda_J)^{-1}\right\} = \left[\begin{array}{ccc:cc} e^{-t} & te^{-t} & \frac{1}{2}t^2e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$ ❖

Primer 7.10. Data je matrica sistema A

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Treba odrediti njenu Džordanovu kanonsku formu.

Iz karakteristične jednačine

$$\det(\lambda\,\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) = (\lambda - 4)^3 = 0,$$

dobija se da je $\lambda_1 = 4$ trostruka sopstvena vrednost.

Pošto je rang matrice $(\lambda_1\mathrm{I}_3 - \mathrm{A})$

$$\mathrm{rang}(\lambda_1\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) = \mathrm{rang}\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 1,$$

iz (7.66) se dobija njena degeneracija

$$q_1 = n - \mathrm{rang}(\lambda_1\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) = 3 - 1 = 2.$$

To znači da trostrukoj sopstvenoj vrednosti $\lambda_1=4$ odgovaraju dva linearno nezavisna sopstvena vektora. Za određivanje ova dva sopstvena vektora koristi se relacija (7.68), mada se oni mogu odrediti, kao i u prethodnom primeru, iz relacije (7.69). Najpre je

$$\mathrm{adj}[\lambda I_3 - A] = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 8\lambda + 16 & 2(\lambda - 4) & \lambda - 4 \\ 0 & \lambda^2 - 6\lambda + 8 & \lambda - 4 \\ 0 & 4(4 - \lambda) & \lambda^2 - 10\lambda + 24 \end{bmatrix}.$$

Za $\lambda_1 = 4$ sve kolone matrice $\mathrm{adj}(\lambda I_3 - A)$ transformišu se u nula kolone. Iz (7.68) se dobija

$$\frac{d}{d\lambda}\{\mathrm{adj}(\lambda I_3 - A)\}\Big|_{\lambda_1=4} = \begin{bmatrix} 2\lambda - 8 & 2 & 1 \\ 0 & 2\lambda - 6 & 1 \\ 0 & -4 & 2\lambda - 10 \end{bmatrix}\Bigg|_{\lambda_1=4} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\lambda^2}\{adj(\lambda I_3 - A\}\Big|_{\lambda_1=4} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Iz poslednje dve matrice biraju se dva nezavisna sopstvena vektora

$$m_1 = [1 \quad 0 \quad 0]^T, \quad m_2 = [1 \quad 1 \quad -2]^T.$$

Iz (7.73) se određuje generalizovani sopstveni vektor

$$(\lambda_1 I_3 - A)m_3 = -m_2$$

ili

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Izborom $m_{13}=0$ i $m_{23}=0$, iz skalarnih jednačina koje odgovaraju ovoj matri-čnoj jednačini dobija se $m_{33}=1$. Na taj način je određen generalizovani vektor m_3

$$m_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T.$$

Modalna matrica, Džordanova kanonska forma i njoj odgovarajuća matrica prelaza stanja imaju oblik

$$\mathsf{M}_J = [\mathsf{m}_1 \quad \mathsf{m}_2 \quad \mathsf{m}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_J = \mathsf{M}_J^{-1}\mathsf{A}\mathsf{M}_J = \left[\begin{array}{c:cc} 4 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right],$$

$$\Phi_J(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathsf{I}_3 - \Lambda_J)^{-1}\right\} = \left[\begin{array}{c:cc} e^{4t} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{array}\right].$$ ❖

7.7 TRANSFORMACIJA MATRICE SISTEMA NA BLOK-DIJAGONALNI OBLIK

Ako matrica sistema A ima konjugovano-kompleksne sopstvene vrednosti

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i &= \sigma_i + j\omega_i \\ \lambda_{i+1} &= \sigma_i - j\omega_i \end{aligned}\right\} i = 1,3,5,\ldots,k, \tag{7.74}$$

može se transformisati na blok-dijagonalni oblik

$$\Lambda_b = \text{blok– dijag}\{\Lambda_{b1}; \Lambda_{b3}; \cdots; \Lambda_{bk}\},$$

gde je

$$\Lambda_{b1} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \sigma_1 \end{bmatrix}, \ \Lambda_{b3} = \begin{bmatrix} \sigma_3 & \omega_3 \\ -\omega_3 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \cdots, \Lambda_{bk} = \begin{bmatrix} \sigma_k & \omega_k \\ -\omega_k & \sigma_k \end{bmatrix}.$$

Odgovarajuća modalna matrica određuje se na sledeći način

$$\mathsf{M}_b = [\mathrm{Re}(\mathsf{m}_1) \mid \mathrm{Im}(\mathsf{m}_1) \mid \mathrm{Re}(\mathsf{m}_3) \mid \mathrm{Im}(\mathsf{m}_3) \mid \cdots \mid \mathrm{Re}(\mathsf{m}_k) \mid \mathrm{Im}(\mathsf{m}_k)] \tag{7.75}$$

gde su Re(m_1), Im(m_1), Re(m_3), Im(m_3), ... , Re(m_k), Im(m_k) realni i imaginarni delovi sopstvenih vektora koji odgovaraju respektivno, sopstvenim vrednostima $\sigma_1 + j\omega_1$, $\sigma_3 + j\omega_3$, $\cdots$, $\sigma_k + j\omega_k$. Matrica prelaza stanja polaznog sistema, po anologiji sa (7.55), ima oblik

$$\Phi(t) = e^{\mathsf{A}t} = \mathsf{M}_b e^{\Lambda_b t} \mathsf{M}_b^{-1}, \tag{7.76}$$

gde je

$$\Phi_b(t)=e^{\Lambda_b t}=\begin{bmatrix} e^{\Lambda_{b1}t} & & 0 \\ & e^{\Lambda_{b3}t} & \\ 0 & \ddots & e^{\Lambda_{bk}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{\begin{bmatrix}\sigma_1 & \omega_1\\ -\omega_1 & \sigma_1\end{bmatrix}t} & & 0 \\ & e^{\begin{bmatrix}\sigma_3 & \omega_3\\ -\omega_3 & \sigma_3\end{bmatrix}t} & \\ 0 & \ddots & e^{\begin{bmatrix}\sigma_k & \omega_k\\ -\omega_k & \sigma_k\end{bmatrix}t}\end{bmatrix}. \quad \text{..............................} (7.77)$$

Matrica $e^{\Lambda_{bk}t}$ može se odrediti iz relacije (7.55)

$$e^{\Lambda_{bk}t}=\mathsf{M}_k\begin{bmatrix} e^{\lambda_k t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_{k+1}t}\end{bmatrix}\mathsf{M}_k^{-1}=\mathsf{M}_k\begin{bmatrix} e^{(\sigma_k+j\omega_k)t} & 0\\ 0 & e^{(\sigma_k-j\omega_k)t}\end{bmatrix}\mathsf{M}_k^{-1} \quad (7.78)$$

Sopstveni vektori od kojih se formira modalna matrica M_k određuju se iz matrice $\mathrm{adj}(\lambda I_2-\Lambda_{bk})$:

$$\mathrm{adj}(\lambda \mathsf{I}_2-\Lambda_{bk})\big|_{\lambda=\lambda_k}=\begin{bmatrix}\lambda-\sigma_k & \omega_k\\ -\omega_k & \lambda-\sigma_k\end{bmatrix}_{\lambda=\lambda_k}=\omega_k\begin{bmatrix} j & 1\\ -1 & j\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{adj}(\lambda \mathsf{I}_2-\Lambda_{bk})\big|_{\lambda=\lambda_{k+1}}=\begin{bmatrix}\lambda-\sigma_k & \omega_k\\ -\omega_k & \lambda-\sigma_k\end{bmatrix}_{\lambda=\lambda_{k+1}}=\omega_k\begin{bmatrix} -j & 1\\ -1 & -j\end{bmatrix},$$

$$\mathsf{m}_1=\begin{bmatrix}1\\ j\end{bmatrix},\quad \mathsf{m}_2=\begin{bmatrix}1\\ -j\end{bmatrix},$$

$$\mathsf{M}_k=[\mathsf{m}_1 \quad \mathsf{m}_2]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ j & -j\end{bmatrix},\quad \mathsf{M}_k^{-1}=\frac{\mathrm{adj}\,\mathsf{M}_k}{\det \mathsf{M}_k}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -j\\ 1 & j\end{bmatrix},$$

Iz (7.78) se dobija tražena matrica

$$e^{\Lambda_{bk}t}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ j & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{(\sigma_k+j\omega_k)t} & 0\\ 0 & e^{(\sigma_k-j\omega_k)t}\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -j\\ 1 & j\end{bmatrix}=e^{\sigma_k t}\begin{bmatrix}\cos\omega_k t & \sin\omega_k t\\ -\sin\omega_k t & \cos\omega_k t\end{bmatrix}, \quad (7.79)$$

odnosno matrica prelaza stanja (7.77)

$$\Phi_b(t)=\text{blok–dijag}\left\{e^{\Lambda_{b1}t};e^{\Lambda_{b3}t};\cdots;e^{\Lambda_{bk}t}\right\}=$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\omega_1 t & \sin\omega_1 t\\ -\sin\omega_1 t & \cos\omega_1 t\end{bmatrix}e^{\sigma_1 t} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{bmatrix}\cos\omega_k t & \sin\omega_k t\\ -\sin\omega_k t & \cos\omega_k t\end{bmatrix}e^{\sigma_k t}\end{bmatrix}.$$

| Primer 7.11. Treba odrediti matricu prelaza stanja $\Phi(t)$ za matricu sistema

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix}-5 & 4 & 0\\ -5 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}.$$

Iz karakteristične jednačine

$$\det(\lambda I_3 - A) = (\lambda^2 + 2\lambda + 5)(\lambda + 3) = 0,$$

dobijaju se sopstvene vrednosti

$$\lambda_1 = -1 + 2j,\ \ \lambda_2 = -1 - 2j,\ \ \lambda_3 = -3.$$

Sopstveni vektori matrice A određuju se postupkom transformacije matrice $(\lambda I_3 - A)$ na MHN oblik. Za $\lambda_1 = -1 + 2j$ je

$$\lambda_1 \mathsf{I}_3 - \mathsf{A}=\begin{bmatrix}4+j2 & -4 & 0\\ 5 & -4+j2 & 0\\ 0 & 0 & 2+j2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2+j1 & -2 & 0\\ 5 & -4+j2 & 0\\ 0 & 0 & 1+j1\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}5 & -2(2-j1) & 0\\ 5 & -4+j2 & 0\\ 0 & 0 & 1+j1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -\frac{4}{5}+j\frac{2}{5} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Iz poslednje matrice (koja je određena iz prve, elementarnim transforma-cijama nad vrstama), zamenom nule na dijagonalnom mestu sa -1 dobija se prvi sopstveni vektor

$$\mathsf{m}_1=\begin{bmatrix}-\frac{4}{5}+j\frac{2}{5}\\ -1\\ 0\end{bmatrix}\quad \text{ili}\quad \mathsf{m}_1=\begin{bmatrix}4-j2\\ 5\\ 0\end{bmatrix},$$

kome odgovaraju realni i imaginarni deo

$$\mathrm{Re}(\mathsf{m}_1)=\begin{bmatrix}4\\ 5\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathrm{Im}(\mathsf{m}_1)=\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Za $\lambda_3 = -3$ je

$$\lambda_3 \mathsf{I}_3 - \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz treće kolone matrice redukovane na MHN-oblik, zamenom nule na dijagonalnom mestu sa -1, dobija se treći sopstveni vektor

$$\mathsf{m}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \mathsf{m}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Modalna matrica, odgovarajuća matrica prelaza stanja sistema transfo-rmisanog na blok-dijagonalni oblik i matrica prelaza stanja polaznog sistema su:

$$\mathsf{M}_b = \left[\mathrm{Re}(\mathsf{m}_1) \mid \mathrm{Im}(\mathsf{m}_1) \mid \mathsf{m}_3 \right] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_b(t) = \left[\begin{array}{cc|c} e^{-t}\cos 2t & e^{-t}\sin 2t & 0 \\ -e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{-3t} \end{array} \right],$$

$$\Phi(t) = \mathsf{M}_b \Phi_b(t) \mathsf{M}_b^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t}(\cos 2t - 2\sin 2t) & 2e^{-t}\sin 2t & 0 \\ -\dfrac{5}{2}e^{-t}\sin 2t & e^{-t}(\cos 2t + 2\sin 2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}. \quad ❖$$