6. KONVERZIJA IZMEĐU PREDSTAVLJANJA SISTEMA OSNOVNIM DINAMIČKIM JEDNAČINAMA I PREDSTAVLJANJA PRENOSNOM FUNKCIJOM (MATRICOM)

6.1 ODREĐIVANJE PRENOSNE MATRICE (PRENOSNE FUNKCIJE) IZ JEDNAČINA STANJA I IZLAZA SISTEMA

Multivarijabilni linearni dinamički sistem opisan je jednačinama

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{6.1}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t). \tag{6.2}$$

Nalaženjem Laplasove transformacije leve i desne strane jednačine (6.1) dobija se algebarska jednačina, čije je rešenje

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + (s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s). \tag{6.3}$$

Laplasovom transformacijom jednačine (6.2) dobija se

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s). \tag{6.4}$$

Zamenom $\boldsymbol{X}(s)$ iz (6.3), izraz (6.4) postaje

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(\mathrm{s}). \tag{6.5}$$

Uz pretpostavku da su početni uslovi jednaki nuli, što je neophodan uslov za određivanje prenosne matrice (funkcije), relacija (6.5) postaje

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(\mathrm{s}). \tag{6.6}$$

Konačno, iz (6.6) dobija se prenosna matrica sistema

$$\mathbf{G}(s)=\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{U}}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}. \tag{6.7}$$

Skalarni sistem opisan je jednačinama

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}u(t), \tag{6.8}$$

$$y(t)=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t)+du(t), \tag{6.9}$$

pa se na sličan način dobija njegova prenosna funkcija

$$G(s)=\boldsymbol{c}^T(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}+d. \tag{6.10}$$

Matrica $(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}$ obeležava se sa $\Phi(s)$ i predstavlja rezolventnu matri-cu sistema

$$\Phi(s)=(s\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I}_n-\mathbf{A})}{a(s)}, \tag{6.11}$$

gde je $a(s)=\det(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})$ karakteristični polinom sistema (odnosno matrice sistema $\boldsymbol{A}$).

Primer 6.1. Multivarijabilni sistem je opisan sledećim diferencijalnim jednačinama:

$$\ddot{z}_1(t)+4\dot{z}_1(t)-3z_2(t)=u_1(t),$$

$$\dot{z}_2(t)+\dot{z}_1(t)+z_1(t)+2z_2(t)=u_2(t).$$

Izborom veličina $z_1(t), \dot{z}_1(t), z_2(t)$ za promenljive stanja i $z_1(t)$ i $z_2(t)$ za izlaze, dobija se opis sistema u prostoru stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 3\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{u}(t),\quad \mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t).$$

Karakteristični polinom matrice $\boldsymbol{A}$ je

$$a(s)=\det(s\mathbf{I}_3-\mathbf{A})=\det\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s+4 & -3\\ 1 & 1 & s+2\end{bmatrix}=s^3+6s^2+11s+3.$$

Iz (6.11) dobija se rezolventna matrica

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{a(s)} \begin{bmatrix} s^2+6s+11 & s+2 & 3 \\ -3 & s(s+2) & 3s \\ -(s+4) & -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix}.$$

Prenosna matrica sistema dobija se iz (6.7)

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{U}}(s) = \frac{1}{s^3+6s^2+11s+3} \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix}.$$ ❖

6.2 ODREĐIVANJE PRENOSNIH FUNKCIJA (PRENOSNE MATRICE) SISTEMA SA POVRATNIM SPREGAMA PROMENLJIVIH STANJA IZ OSNOVNIH DINAMIČKIH JEDNAČINA

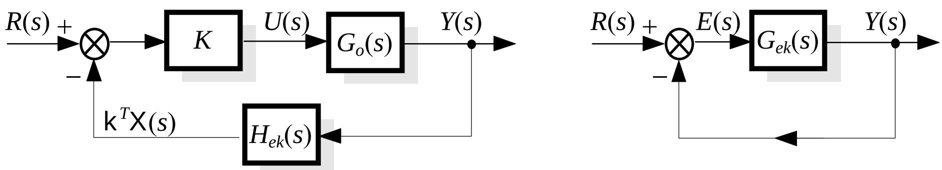
Skalarni sistem automatskog upravljanja opisan jednačinama

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \tag{6.12}$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t), \tag{6.13}$$

$$u(t) = K[r(t) - \mathbf{k}^T\mathbf{x}(t)], \tag{6.14}$$

može se redukovati na dva ekvivalentna jednokonturna kola prikazana na slikama 6.1(a) i (b).



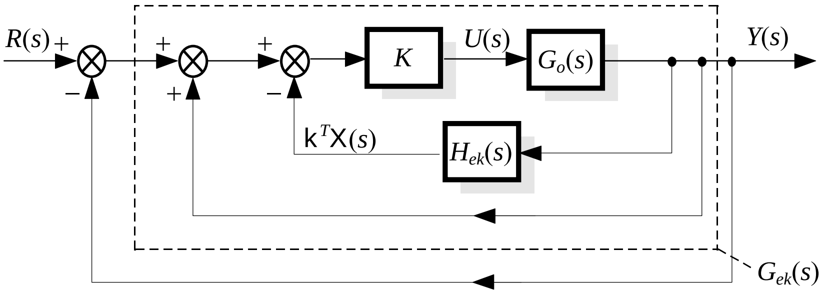
(a) (b)

Slika 6.1

U sistemu na slici 6.1(a), koji se naziva “H–ekvivalentnim” sistemom, pored faktora pojačanja K i prenosne funkcije objekta upravljanja $G_o(s)$ koja je poznata ili je iz jednačine stanja i izlaza tek treba odrediti, figuriše i nepoznata prenosna funkcija $H_{ek}(s)$, koja se može odrediti na sledeći način:

$$H_{ek}(s) = \frac{\mathbf{k}^T\mathbf{X}(s)}{Y(s)} = \frac{\mathbf{k}^T\mathbf{X}(s)}{\mathbf{c}^T\mathbf{X}(s)} = \frac{\mathbf{k}^T\Phi(s)\mathbf{b}U(s)}{\mathbf{c}^T\Phi(s)\mathbf{b}U(s)} = \frac{\mathbf{k}^T\Phi(s)\mathbf{b}}{\mathbf{c}^T\Phi(s)\mathbf{b}}. \tag{6.15}$$

Sistem na slici 6.1(b), koji se naziva "G–ekvivalentnim" sadrži samo nepoznatu prenosnu funkciju $G_{ek}(s)$ u direktnoj grani kola. Uvođenjem po jedne jedinične pozitivne i negativne povratne sprege u blok-dijagram na slici 6.1(a), on se transformiše na oblik pokazan na slici 6.2.



Slika 6.2

Iz ovog blok-dijagrama dobija se tražena prenosna funkcija

$$G_{ek}(s) = \frac{K\mathbf{c}^T\Phi(s)\mathbf{b}}{1 + K(\mathbf{k}-\mathbf{c})^T\Phi(s)\mathbf{b}}. \tag{6.16}$$

Treba naglasiti da prenosne funkcije $H_{ek}(s)$ i $G_{ek}(s)$ nemaju fizički smisao ali se pomoću njih, svođenjem sistema na jednokonturno kolo, znatno olakšava analiza i projektovanje sistema s povratnim spregama promenljivih stanja.

Sve prenosne funkcije karakteristične za ekvivalentna kola na slikama 6.1(a) i (b) mogu se odrediti na sličan način kako je to pokazano za $H_{ek}(s)$ i $G_{ek}(s)$, u funkciji dve matrice:

- rezolventne matrice sistema $\Phi(s)$;
- rezolventne matrice zatvorenog sistema (sistema automatskog upravlja-nja)

$$\Phi_z(s) = (s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_z)^{-1} = \left(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + K\mathbf{b}\mathbf{k}^T\right)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\left(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + K\mathbf{b}\mathbf{k}^T\right)}{\alpha(s)}, \tag{6.17}$$

gde je

$$\alpha(s) = \det(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A} + K\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T) \tag{6.18}$$

karakteristični polinom zatvorenog sistema (matrice $\boldsymbol{A}_z$).

Tako se dobija:

$$G_o(s) = \mathbf{c}^T\Phi(s)\mathbf{b} \text{ ili } G_o(s) = \frac{\mathbf{c}^T\Phi_z(s)\mathbf{b}}{1 - K\mathbf{k}^T\Phi_z(s)\mathbf{b}}, \tag{6.19}$$

$$H_{ek}(s)=\frac{\mathbf{k}^T\Phi(s)\mathbf{b}}{\mathbf{c}^T\Phi(s)\mathbf{b}} \text{ ili } H_{ek}(s)=\frac{\mathbf{k}^T\Phi_z(s)\mathbf{b}}{\mathbf{c}^T\Phi_z(s)\mathbf{b}}, \tag{6.20}$$

$$G_{ek}(s)=\frac{K\mathbf{c}^T\Phi(s)\mathbf{b}}{1+K(\mathbf{k}-\mathbf{c})^T\Phi(s)\mathbf{b}} \text{ ili } G_{ek}(s)=\frac{K\mathbf{c}^T\Phi_z(s)\mathbf{b}}{1-K\mathbf{c}^T\Phi_z(s)\mathbf{b}}, \tag{6.21}$$

$$\frac{Y}{R}(s)=\frac{K\mathbf{c}^T\Phi(s)\mathbf{b}}{1+K\mathbf{k}^T\Phi(s)\mathbf{b}} \text{ ili } \frac{Y}{R}(s)=K\mathbf{c}^T\Phi_z(s)\mathbf{b}. \tag{6.22}$$

Za multivarijabilni sistem automatskog upravljanja opisan jednačinama

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{6.23}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t), \tag{6.24}$$

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t), \tag{6.25}$$

prelaskom u kompleksni domen Laplasovom transformacijom dobija se prenosna matrica zatvorenog sistema

$$\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{V}}(s)=\mathbf{C}\Phi_z(s)\mathbf{B}. \tag{6.26}$$

Pri tome je

$$\Phi_z(s)=(s\mathbf{I}_n-\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I}_n-\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})}{\alpha(s)} \tag{6.27}$$

rezolventna matrica zatvorenog multivarijabilnog sistema, a

$$\alpha(s)=\det(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}) \tag{6.28}$$

karakteristični polinom zatvorenog multivarijabilnog sistema (matrice $\boldsymbol{A}_z$).

6.3 PRENOSNE MATRICE JEDNOG TIPIČNOG MULTIVARIJABILNOG SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA SA DVA ULAZA I DVA IZLAZA

Multivarijabilni sistem automatskog upravljanja predstavljen je blok-dijagramima na slikama 6.3(a) i (b), gde je:

$\mathbf{R}(s)=[R_1(s) \quad R_2(s)]^T$ – vektor referentnih veličina;

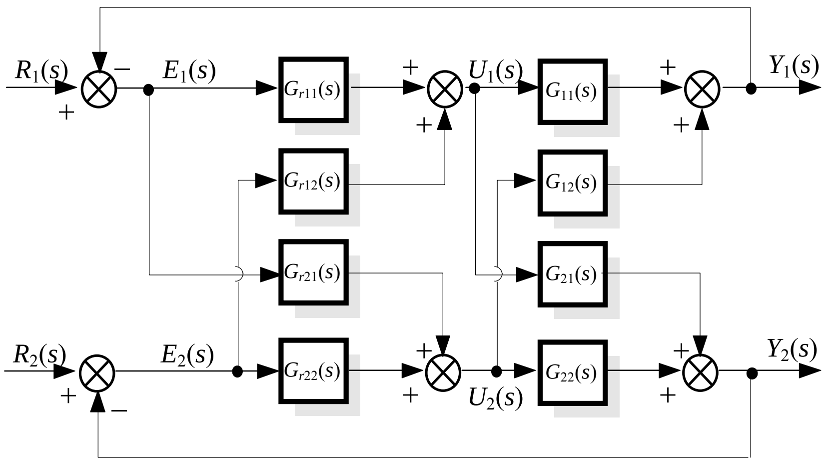
$\mathbf{E}(s)=[E_1(s) \quad E_2(s)]^T$ – vektor greške;

$$\mathsf{U}(s)=\begin{bmatrix}U_1(s) & U_2(s)\end{bmatrix}^T$$ – vektor upravljanja (ulaza);

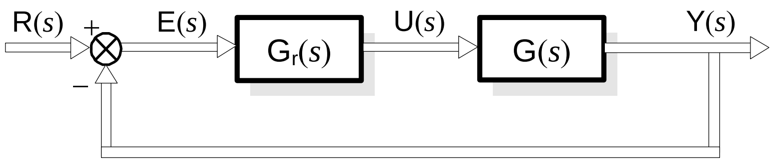
$$\mathsf{Y}(s)=\begin{bmatrix}Y_1(s) & Y_2(s)\end{bmatrix}^T$$ – vektor izlaza;

$$\mathsf{G}(s)=\begin{bmatrix}G_{11}(s) & G_{12}(s)\\ G_{21}(s) & G_{22}(s)\end{bmatrix}$$ – prenosna matrica objekta upravljanja;

$$\mathsf{G}_r(s)=\begin{bmatrix}G_{r11}(s) & G_{r12}(s)\\ G_{r21}(s) & G_{r22}(s)\end{bmatrix}$$ – prenosna matrica upravljačkog bloka (regulatora).



***Slika 6.3** (a)*



***Slika 6.3** (b)*

Sa slike 6.3(b) očigledno je da važe relacije

$$\boldsymbol{E}(s)=\boldsymbol{R}(s)-\boldsymbol{Y}(s), \tag{6.29}$$

$$\boldsymbol{U}(s)=\boldsymbol{G}_r(s)\boldsymbol{E}(s), \tag{6.30}$$

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{U}(s). \tag{6.31}$$

Zamenom (6.29) i (6.30) u (6.31) dobija se izraz za vektor izlaza oblika

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{U}(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_r(s)\boldsymbol{E}(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_r(s)\text{Š}\boldsymbol{R}(s)-\boldsymbol{Y}(s)\text{Ć}. \tag{6.32}$$

Iz (6.32) sledi da je

$$[\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_r(s)]\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_r(s)\boldsymbol{R}(s). \tag{6.33}$$

Na kraju se, množenjem jednačine (6.33) matricom Š$\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_r(s)$Ć$^{-1}$, dobija izraz koji definiše vektor izlaza u obliku

$$\boldsymbol{Y}(s)=[\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_r(s)]^{-1}\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_r(s)\boldsymbol{R}(s)=\boldsymbol{G}_z(s)\boldsymbol{R}(s), \tag{6.34}$$

gde je

$$\boldsymbol{G}_z(s)=[\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_r(s)]^{-1}\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_r(s) \tag{6.35}$$

prenosna matrica sistema automatskog upravljanja prikazanog blok-dijagramima na slici 6.3.

Prenosna matrica upravljačkog bloka $\boldsymbol{G}_r(s)$ može se dobiti iz relacije (6.35), množenjem leve i desne strane matricom $[\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_r(s)]$, što daje

$$[\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_r(s)]\boldsymbol{G}_z(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_r(s). \tag{6.36}$$

Ova relacija može biti napisana u obliku

$$\boldsymbol{G}_z(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_r(s)[\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{G}_z(s)]. \tag{6.37}$$

Množenjem leve i desne strane poslednje jednačine matricom $[\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{G}_z(s)]^{-1}$ sa desne i matricom $\boldsymbol{G}^{-1}(s)$ sa leve strane, dobija se izraz za prenosnu matricu $\boldsymbol{G}_r(s)$ u funkciji $\boldsymbol{G}_z(s)$ i $\boldsymbol{G}(s)$:

$$\boldsymbol{G}_r(s)=\boldsymbol{G}^{-1}(s)\boldsymbol{G}_z(s)[\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{G}_z(s)]^{-1}. \tag{6.38}$$

Izraz (6.38) omogućava određivanje prenosne matrice upravljačkog bloka koja obezbeđuje željenu prenosnu matricu zatvorenog sistema $\boldsymbol{G}_z(s)$, a za poznatu prenosnu matricu objekta upravljanja $\boldsymbol{G}(s)$.

Ako se pođe od relacije (6.32) može se napisati

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{W}(s)\boldsymbol{E}(s), \tag{6.39}$$

gde je

$$\boldsymbol{W}(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_r(s). \tag{6.40}$$

Iz (6.40) se dobija

$$\boldsymbol{G}_r(s)=\boldsymbol{G}^{-1}(s)\boldsymbol{W}(s). \tag{6.41}$$

Upoređivanjem jednakosti (6.41) i (6.38) neposredno sledi da je

$$\boldsymbol{W}(s)=\boldsymbol{G}_z(s)[\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{G}_z(s)]^{-1}. \tag{6.42}$$

Ovakva analiza se može proširiti i na sličan sistem sa n ulaza i n izlaza. Takvom sistemu odgovara prenosna matrica zatvorenog kola $\boldsymbol{G}_z(s)$ dimenzija $n\times n$. Ako se od takvog sistema želi da referentni signal $r_i(t)$ ima uticaja samo na izlaz $y_i(t)$, to može da obezbedi dijagonalna matrica $\boldsymbol{G}_z(s)$

$$\mathrm{G}_z(s)=\begin{bmatrix} G_{z11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_{z22}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{znn}(s) \end{bmatrix}. \tag{6.43}$$

Matrica $\boldsymbol{W}(s)$ ima u tom pogledu ista svojstva kao i matrica $\boldsymbol{G}_z(s)$. Tako, ako je $\boldsymbol{G}_z(s)$ dijagonalna, blok-dijagonalna ili trougaona matrica, tada je i $\boldsymbol{W}(s)$ dijagonalna, blok-dijagonalna odnosno trougaona matrica.

Ako je matrica $\boldsymbol{G}_z(s)$ dijagonalna sa elementima $G_{zii}(s)$, tada su elementi matrice $\boldsymbol{W}(s)$ povezani sa njima sledećom relacijom (dobija se iz jednačine (6.42)):

$$W_{ii}(s)=\frac{G_{zii}(s)}{1-G_{zii}(s)}. \tag{6.44}$$

Primer 6.2. Prenosna matrica objekta upravljanja i željena prenosna matrica sistema automatskog upravljanja su oblika:

$$\mathrm{G}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{5}{1+2s} & \dfrac{50}{1+2s} \\ \dfrac{1}{1+s} & -\dfrac{10}{1+s} \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{G}_z(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+0{,}5s} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+0{,}2s} \end{bmatrix}.$$

Treba odrediti prenosnu matricu upravljačkog bloka.

Iz (6.44) dobijaju se elementi matrice $\boldsymbol{W}(s)$

$$W_{11}(s)=\frac{G_{z11}(s)}{1-G_{z11}(s)}=\frac{2}{s},\ W_{22}(s)=\frac{G_{z22}(s)}{1-G_{z22}(s)}=\frac{5}{s}.$$

Najzad, prenosna matrica upravljačkog bloka dobija se iz (6.41)

$$\mathrm{G}_r(s)=\mathrm{G}^{-1}(s)\mathrm{W}(s)=\begin{bmatrix} 0{,}10(1+2s) & 0{,}50(1+s) \\ 0{,}01(1+2s) & -0{,}05(1+s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/s & 0 \\ 0 & 5/s \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{0{,}20(1+2s)}{s} & \dfrac{2{,}50(1+s)}{s} \\ \dfrac{0{,}02(1+2s)}{s} & -\dfrac{0{,}25(1+s)}{s} \end{bmatrix}.$$

❖

6.4 PRENOSNA MATRICA SISTEMA EKVIVALENTNOG NEPOTPUNO UPRAVLJIVOM SISTEMU

Nepotpuno upravljiv sistem može se opisati algebarski ekvivalentnom realizacijom $\mathcal{R}\{\boldsymbol{A}^0, \boldsymbol{B}^0, \boldsymbol{C}^0\}$, gde je

$$\mathrm{A}^0 = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_u^0 & \mathrm{A}_{12}^0 \\ \hline 0 & \mathrm{A}_{22}^0 \end{array}\right], \quad \mathrm{B}^0 = \left[\begin{array}{c} \mathrm{B}_u^0 \\ \hline 0 \end{array}\right], \quad \mathrm{C}^0 = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{C}_1^0 & \mathrm{C}_2^0 \end{array}\right]. \tag{6.45}$$

Prenosna matrica ovako opisanog sistema može se odrediti iz relacije (6.7)

$$\mathrm{G}^0(s) = \mathrm{C}^0(s\mathrm{I}_n - \mathrm{A}^0)^{-1}\mathrm{B}^0 = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{C}_1^0 & \mathrm{C}_2^0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} s\mathrm{I}_{n-p} - \mathrm{A}_u^0 & -\mathrm{A}_{12}^0 \\ \hline 0 & s\mathrm{I}_p - \mathrm{A}_{22}^0 \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \mathrm{B}_u^0 \\ \hline 0 \end{array}\right]. \tag{6.46}$$

Kako je na osnovu teorije matrica

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \hline 0 & \mathrm{A}_{22} \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_{11}^{-1} & -\mathrm{A}_{11}^{-1}\mathrm{A}_{12}\mathrm{A}_{22}^{-1} \\ \hline 0 & \mathrm{A}_{22}^{-1} \end{array}\right],$$

izraz za prenosnu matricu se transformiše na sledeći oblik:

$$\begin{aligned} \mathrm{G}^0(s) &= \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{C}_1^0 & \mathrm{C}_2^0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \left(s\mathrm{I}_{n-p} - \mathrm{A}_u^0\right)^{-1} & \left(s\mathrm{I}_{n-p} - \mathrm{A}_u^0\right)^{-1}\mathrm{A}_{12}^0\left(s\mathrm{I}_p - \mathrm{A}_{22}^0\right)^{-1} \\ \hline 0 & \left(s\mathrm{I}_p - \mathrm{A}_{22}^0\right)^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathrm{B}_u^0 \\ \hline 0 \end{array}\right] = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{C}_1^0 & \mathrm{C}_2^0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \left(s\mathrm{I}_{n-p} - \mathrm{A}_u^0\right)^{-1}\mathrm{B}_u^0 \\ \hline 0 \end{array}\right] = \mathrm{C}_1^0\left(s\mathrm{I}_{n-p} - \mathrm{A}_u^0\right)^{-1}\mathrm{B}_u^0. \end{aligned} \tag{6.47}$$

Kako istovremeno važe relacije

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}(s) &= \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{U}(s), \\ \boldsymbol{Y}(s) &= \boldsymbol{G}^0(s)\boldsymbol{U}(s), \end{aligned}$$

sledi da je $\boldsymbol{G}^0(s) = \boldsymbol{G}(s)$, odnosno da na prenosnu matricu utiče samo upra-vljivi deo sistema.

6.5 PRENOSNA MATRICA SISTEMA EKVIVALENTNOG NEPOTPUNO REKONSTRUKTIBILNOM SISTEMU

Nepotpuno rekonstruktibilni sistem se može opisati algebarski ekvivale-ntnom realizacijom $\mathcal{R}\{\boldsymbol{A}^0, \boldsymbol{B}^0, \boldsymbol{C}^0\}$, gde je

$$\mathbf{A}^0=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}_r^0 & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{A}_{21}^0 & \mathbf{A}_{22}^0\end{array}\right],\quad \mathbf{B}^0=\left[\begin{array}{c}\mathbf{B}_1^0\\ \hline \mathbf{B}_2^0\end{array}\right],\quad \mathbf{C}^0=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{C}_r^0 & \mathbf{0}\end{array}\right]. \tag{6.48}$$

Prenosna matrica ovako opisanog sistema može se odrediti iz relacije (6.7)

$$\mathbf{G}^0(s)=\mathbf{C}^0(s\mathbf{I}_n-\mathbf{A}^0)^{-1}\mathbf{B}^0=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{C}_r^0 & \mathbf{0}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}s\mathbf{I}_{n-p}-\mathbf{A}_r^0 & \mathbf{0}\\ \hline -\mathbf{A}_{21}^0 & s\mathbf{I}_p-\mathbf{A}_{22}^0\end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}\mathbf{B}_1^0\\ \hline \mathbf{B}_2^0\end{array}\right]. \tag{6.49}$$

Korišćenjem poznate relacije iz teorije matrica

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0}\\ \hline -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{A}_{22}^{-1}\end{array}\right],$$

dobija se izraz za prenosnu matricu

$$\begin{aligned}\mathbf{G}^0(s)&=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{C}_r^0 & \mathbf{0}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}\left(s\mathbf{I}_{n-p}-\mathbf{A}_r^0\right)^{-1} & \mathbf{0}\\ \hline \left(s\mathbf{I}_p-\mathbf{A}_{22}^0\right)^{-1}\mathbf{A}_{21}^0\left(s\mathbf{I}_{n-p}-\mathbf{A}_r^0\right)^{-1} & \left(s\mathbf{I}_p-\mathbf{A}_{22}^0\right)^{-1}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\mathbf{B}_1^0\\ \hline \mathbf{B}_2^0\end{array}\right]=\\&=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{C}_r^0\left(s\mathbf{I}_{n-p}-\mathbf{A}_r^0\right)^{-1} & \mathbf{0}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\mathbf{B}_1^0\\ \hline \mathbf{B}_2^0\end{array}\right]=\mathbf{C}_r^0\left(s\mathbf{I}_{n-p}-\mathbf{A}_r^0\right)^{-1}\mathbf{B}_1^0.\end{aligned} \tag{6.50}$$

Kako istovremeno važe relacije

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{U}(s),$$
$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{G}^0(s)\boldsymbol{U}(s),$$

sledi da je $\boldsymbol{G}^0(s)=\boldsymbol{G}(s)$, odnosno da na prenosnu matricu utiče samo rekonstruktibilni deo sistema.

6.6 ODREĐIVANJE JEDNAČINE STANJA I JEDNAČINE IZLAZA IZ PRENOSNE FUNKCIJE SISTEMA (DEKOMPOZICIJA PRENOSNE FUNKCIJE)

Tri su osnovna postupka dekompozicije prenosnih funkcija:

- *direktna dekompozicija*, koja se koristi kada su polinomi u imeniocu i brojiocu prenosne funkcije dati u nefaktorizovanom obliku ili ih je teško faktorizovati;

- *kaskadna (ili iterativna) dekompozicija*, koja se koristi kad su poznati svi polovi i nule prenosne funkcije (polinomi u brojiocu i imeniocu prenosne funkcije mogu se napisati u faktorizovanom obliku);
- *paralelna dekompozicija*, čije je korišćenje pogodno kad je polinom u imeniocu prenosne funkcije dat u faktorizovanom obliku (poznati su polovi prenosne funkcije), dok je polinom u brojiocu nefaktorizovan ili ga je teško faktorizovati.

Postupci dekompozicije prenosnih funkcija biće izloženi primenom na prenosnu funkciju sistema trećeg reda

$$\frac{Y}{U}(s)=\frac{b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}. \tag{6.51}$$

Generalizacijom blok-dijagrama promenljivih stanja odnosno jednačina stanja i jednačine izlaza posmatranog sistema trećeg reda, može se, za svaki od postupaka dekompozicije prenosne funkcije, nacrtati blok-dijagram promenljivih stanja i napisati odgovarajuća jednačina stanja i jednačina izlaza za sistem n-tog reda.

5

6.6.1 Obična direktna dekompozicija prenosne funkcije

Polinom u imeniocu i brojiocu kompleksnog lika izlaznog signala (koji se dobija iz prenosne funkcije (6.51)) deli se sa s^3 (u opštem slučaju s članom najvećeg stepena u imeniocu) i tako dobija

$$Y(s)=\frac{b_3+b_2s^{-1}+b_1s^{-2}+b_0s^{-3}}{1+a_2s^{-1}+a_1s^{-2}+a_0s^{-3}}U(s). \tag{6.52}$$

Uvodi se pomoćna promenljiva

$$Z(s)=\frac{U(s)}{1+a_2s^{-1}+a_1s^{-2}+a_0s^{-3}}, \tag{6.53}$$

koja se dalje može izraziti kao

$$Z(s)=U(s)-a_2s^{-1}Z(s)-a_1s^{-2}Z(s)-a_0s^{-3}Z(s). \tag{6.54}$$

Izlaz je sada određen relacijom

$$Y(s)=(b_3+b_2s^{-1}+b_1s^{-2}+b_0s^{-3})Z(s). \tag{6.55}$$

Zamenom u (6.55) promenljive $Z(s)$ uz koeficijent b_3 izrazom (6.54) dobija se

$$Y(s)=e_3U(s)+e_2s^{-1}Z(s)+e_1s^{-2}Z(s)+e_0s^{-3}Z(s), \tag{6.56}$$

gde su koeficijenti

$$e_0 = b_0 - a_0 b_3,\;\; e_1 = b_1 - a_1 b_3,\;\; e_2 = b_2 - a_2 b_3,\;\; e_3 = b_3. \tag{6.57}$$

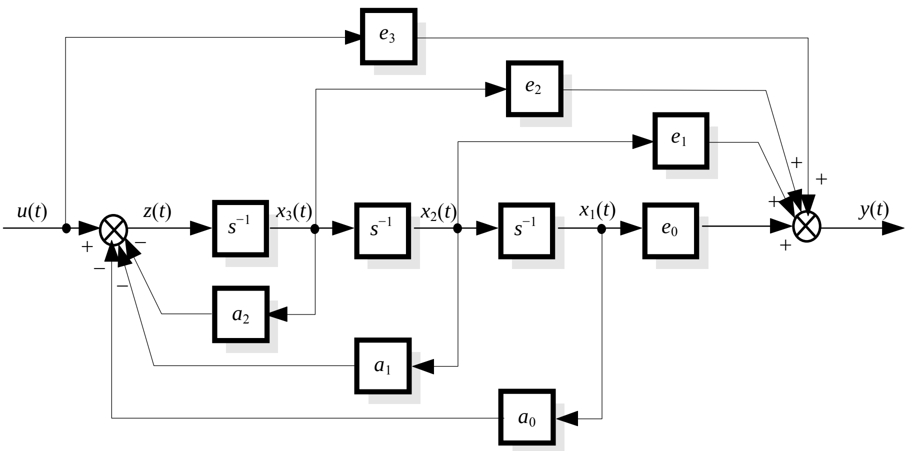
Iz (6.54) i (6.56) inverznom Laplasovom transformacijom dolazi se do izraza

$$z(t) = u(t) - a_2\int z(t)dt - a_1\iint z(t)dtdt - a_0\iiint z(t)dtdtdt, \tag{6.58}$$

$$y(t) = e_3 u(t) + e_2\int z(t)dt + e_1\iint z(t)dtdt + e_0\iiint z(t)dtdtdt. \tag{6.59}$$

Predstavljanjem relacija za $z(t)$ i $y(t)$ u obliku blok–dijagrama promenljivih stanja (slika 6.4) i izborom izlaza iz integratora za promenljive stanja, dobija se realizacija ovog sistema $\mathcal{R}\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d\}$ gde je

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix},\; \mathrm{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\; \mathrm{c}=\begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix},\; d = e_3 = b_3\,. \tag{6.60}$$



Slika 6.4

Za sistem n-tog reda dobija se

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix},\mathrm{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\mathrm{c}=\begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{n-2} \\ e_{n-1} \end{bmatrix}, d = e_n = b_n\,. \tag{6.61}$$

Ukoliko se u blok-dijagramu promenljivih stanja na slici 6.4 za promenljive stanja $x_1(t)$, $x_2(t)$ i $x_3(t)$ izaberu, respektivno, promenjive iza prvog, drugog i trećeg integratora (s leva na desno), dobija se

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathrm{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathrm{c}=\begin{bmatrix} e_2 \\ e_1 \\ e_0 \end{bmatrix},\ d=e_3=b_3\,. \tag{6.62}$$

6.6.2 Dualna direktna dekompozicija prenosne funkcije

Iz prenosne funkcije (6.51) dobija se jednačina

$$(s^3+a_2s^2+a_1s+a_0)Y(s)=(b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0)U(s). \tag{6.63}$$

Prebacivanjem članova ove jednačine koji ne sadrže kompleksnu promenlji-vu s na levu stranu, jednačina se transformiše na sledeći oblik:

$$\begin{aligned} b_0U(s)-a_0Y(s) &= (s^3+a_2s^2+a_1s)Y(s)-(b_3s^3+b_2s^2+b_1s)U(s)= \\ &= s\left[(s^2+a_2s+a_1)Y(s)-(b_3s^2+b_2s+b_1)U(s)\right]. \end{aligned} \tag{6.64}$$

Ponavljanjem istog postupka sa izrazom u srednjoj zagradi jednačine (6.64), dobija se najpre

$$X_1(s)=(s^2+a_2s+a_1)Y(s)-(b_3s^2+b_2s+b_1)U(s), \tag{6.65}$$

a zatim i

$$X_1(s)-a_1Y(s)+b_1U(s)=s[(s+a_2)Y(s)-(b_3s+b_2)U(s)]. \tag{6.66}$$

Sa $X_2(s)$ je označen izraz

$$X_2(s)=(s+a_2)Y(s)-(b_3s+b_2)U(s), \tag{6.67}$$

iz koga se dobija

$$X_2(s)-a_2Y(s)+b_2U(s)=s[Y(s)-b_3U(s)]. \tag{6.68}$$

Izraz u srednjoj zagradi relacije (6.68) je

$$X_3(s)=Y(s)-b_3U(s). \tag{6.69}$$

Inverznom Laplasovom transformacijom levih i desnih strana jednačina (6.64), (6.66), (6.68) (uz prethodnu zamenu $Y(s)$ u njima iz izraza (6.69)) i (6.69), dobijaju se jednačine stanja i jednačina izlaza

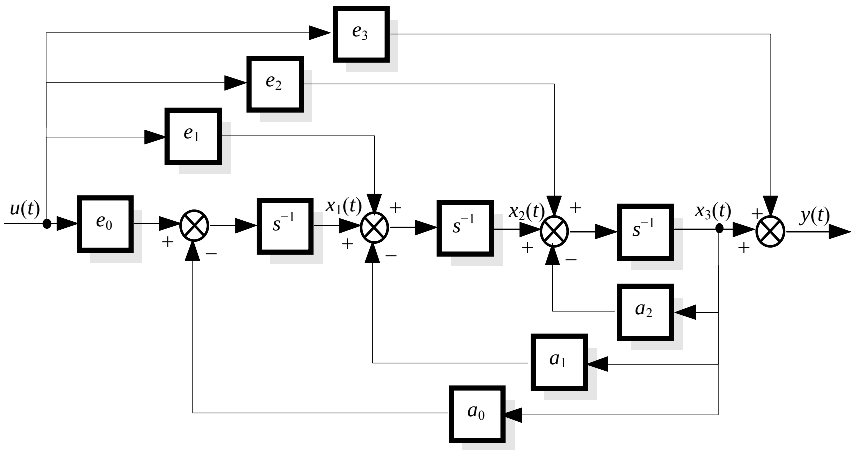
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -a_0x_3(t)+e_0u(t)\,, \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)-a_1x_3(t)+e_1u(t)\,, \\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t)-a_2x_3(t)+e_2u(t)\,, \end{aligned} \tag{6.70}$$

$$y(t) = x_3(t) + e_3 u(t),$$

sa koeficijentima e_0, e_1, e_2 i e_3 iz (6.57), odnosno realizacija $\mathcal{R}\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d\}$, gde je

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix},\ \mathrm{b}=\begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix},\ \mathrm{c}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ d = e_3 = b_3. \qquad (6.71)$$

Blok-dijagram promenljivih stanja za dualnu direktnu dekompoziciju, koji odgovara jednačinama stanja i jednačini izlaza (6.70), prikazan je na slici 6.5.



Slika 6.5

Za sistem n-tog reda je

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix},\ \mathrm{b}=\begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{bmatrix},\ \mathrm{c}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},\ d = e_n = b_n. \qquad (6.72)$$

Ukoliko se u blok-dijagramu promenljivih stanja na slici 6.5 promenljive stanja $x_1(t)$, $x_2(t)$ i $x_3(t)$ zamene respektivno sa $x_3(t)$, $x_2(t)$ i $x_1(t)$, dobija se

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathrm{b}=\begin{bmatrix} e_2 \\ e_1 \\ e_0 \end{bmatrix},\ \mathrm{c}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ d = e_3 = b_3. \qquad (6.73)$$

6

6.6.3 Kaskadna (iterativna) dekompozicija prenosne funkcije

Za primenu kaskadne dekompozicije potrebno je da u prenosnoj funkciji (6.51) polinomi u brojiocu i imeniocu budu faktorizovani:

$$\frac{Y}{U}(s) = b_3 \frac{(s-z_3)(s-z_2)(s-z_1)}{(s-p_3)(s-p_2)(s-p_1)} . \tag{6.74}$$

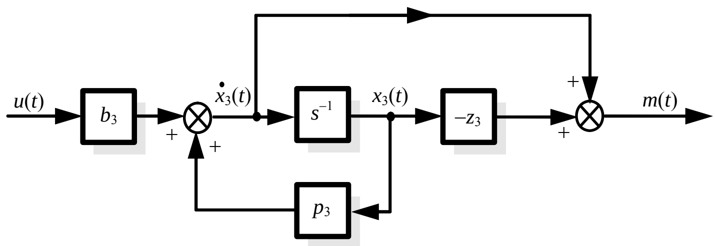
S druge strane, uvođenjem pomoćnih promenljivih veličina, može se napisa-ti da je

$$\frac{Y}{U}(s) = \frac{M}{U}(s)\frac{N}{M}(s)\frac{Y}{N}(s) . \tag{6.75}$$

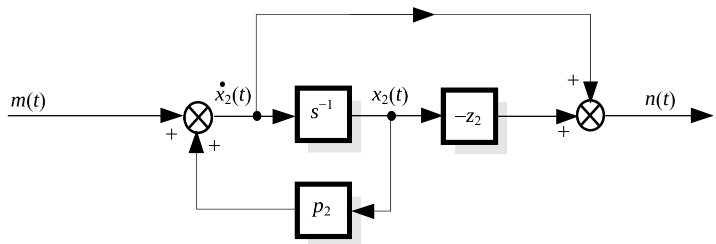
Direktnom dekompozicijom svake od parcijalnih prenosnih funkcija

$$\frac{M}{U}(s) = b_3 \frac{s-z_3}{s-p_3}, \quad \frac{N}{M}(s) = \frac{s-z_2}{s-p_2}, \quad \frac{Y}{N}(s) = \frac{s-z_1}{s-p_1}, \tag{6.76}$$

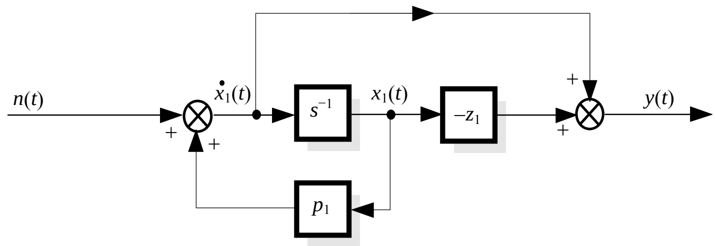
mogu se nacrtati blok-dijagrami promenljivih stanja prikazani na slici 6.6.



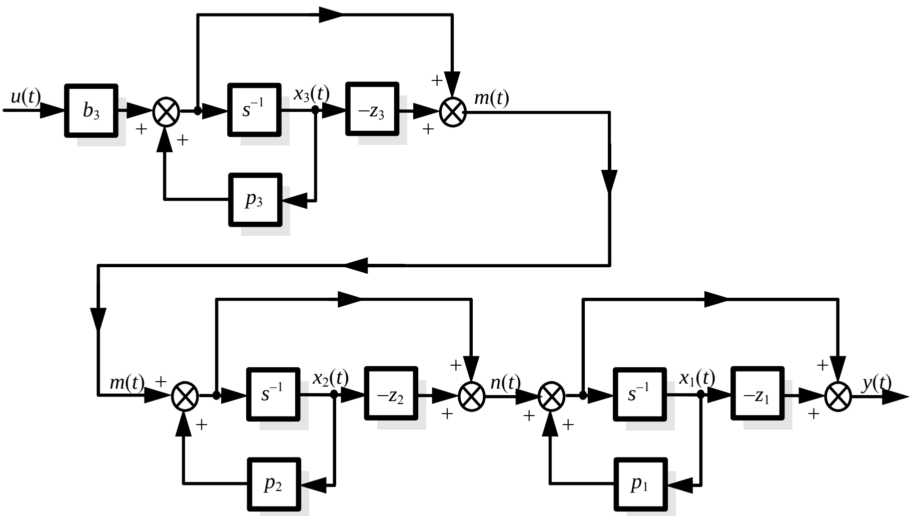
***Slika 6.6** (a)*



***Slika 6.6** (b)*



***Slika 6.6** (c)*



Slika 6.7

Povezivanjem tri parcijalna blok-dijagrama promenljivih stanja u jednu celinu (slika 6.7) i izborom izlaza iz integratora za promenljive stanja, dobijaju se sledeće jednačine stanja i jednačina izlaza

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -z_2x_2(t) + \dot{x}_2(t) + p_1x_1(t) = \\
&= p_1x_1(t) + (p_2 - z_2)x_2(t) + (p_3 - z_3)x_3(t) + b_3u(t), \\
\dot{x}_2(t) &= -z_3x_3(t) + \dot{x}_3(t) + p_2x_2(t) = \\
&= p_2x_2(t) + (p_3 - z_3)x_3(t) + b_3u(t), \\
\dot{x}_3(t) &= b_3u(t) + p_3x_3(t) = p_3x_3(t) + b_3u(t), \\
y(t) &= -z_1x_1(t) + \dot{x}_1(t) = \\
&= (p_1 - z_1)x_1(t) + (p_2 - z_2)x_2(t) + (p_3 - z_3)x_3(t) + b_3u(t),
\end{aligned}
\tag{6.77}
$$

odnosno realizacija $\mathcal{R}\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d\}$, gde je

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} p_1 & p_2-z_2 & p_3-z_3 \\ 0 & p_2 & p_3-z_3 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix},\ \mathrm{b}=\begin{bmatrix} b_3 \\ b_3 \\ b_3 \end{bmatrix},\ \mathrm{c}=\begin{bmatrix} p_1-z_1 \\ p_2-z_2 \\ p_3-z_3 \end{bmatrix},\ d=b_3\,. \tag{6.78}$$

Generalizacijom blok-dijagrama promenljivih stanja na slici 6.7 dobija se realizacija $\mathcal{R}\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d\}$ za sistem n-tog reda, gde je

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} p_1 & p_2-z_2 & p_3-z_3 & \cdots & p_n-z_n \\ 0 & p_2 & p_3-z_3 & \cdots & p_n-z_n \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & p_n-z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix},\mathrm{b}=\begin{bmatrix} b_n \\ b_n \\ b_n \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},\mathrm{c}=\begin{bmatrix} p_1-z_1 \\ p_2-z_2 \\ p_3-z_3 \\ \vdots \\ p_n-z_n \end{bmatrix},d=b_n\,. \tag{6.79}$$

7

6.6.4 Paralelna dekompozicija prenosne funkcije

Paralelna dekompozicija primenjuje se na prenosne funkcije s poznatim polovima (imenioc prenosne funkcije je u faktorizovanom obliku) i bazira se na razvijanju prenosne funkcije u zbir parcijalnih razlomaka. Direktnom dekompozicijom svake od parcijalnih prenosnih funkcija (razlomaka), crtanjem parcijalnih blok-dijagrama promenljivih stanja i njihovim međusobnim povezivanjem, dobija se blok-dijagram promenljivih stanja posmatranog sistema. Pošto polovi prenosne funkcije mogu biti jednostruki ili višestruki, posebno su analizirana ova dva slučaja, uz ograničenje da su svi polovi realni.

a) Prenosna funkcija s jednostrukim polovima

Pošto se u zbir parcijalnih razlomaka može razviti samo prenosna funkcija kod koje je $m \le n-1$, prenosnu funkciju (6.51) treba najpre podeliti polinomom u imeniocu. Nakon te deobe se dobija

$$\frac{Y}{U}(s)=e_3+\frac{e_2s^2+e_1s+e_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}=\frac{M}{U}(s)+\frac{N}{U}(s)\,, \tag{6.80}$$

gde su koeficijenti

$$e_0=b_0-a_0b_3,\quad e_1=b_1-a_1b_3,\quad e_2=b_2-a_2b_3,\quad e_3=b_3. \tag{6.81}$$

Prenosna funkcija $\dfrac{N}{U}(s)$ može biti napisana na sledeći način:

$$\begin{aligned}\frac{N}{U}(s) &= \frac{e_2 s^2 + e_1 s + e_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{e_2 s^2 + e_1 s + e_0}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)} = \\ &= \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \frac{K_3}{s-p_3}.\end{aligned} \tag{6.82}$$

Ako se u (6.82) uvedu oznake

$$X_1(s) = \frac{U(s)}{s-p_1}, \quad X_2(s) = \frac{U(s)}{s-p_2}, \quad X_3(s) = \frac{U(s)}{s-p_3}, \tag{6.83}$$

iz (6.83), (6.82) i (6.80) se inverznom Laplasovom transformacijom dobijaju jednačine stanja i jednačina izlaza

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= p_1 x_1(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= p_2 x_2(t) + u(t), \\ \dot{x}_3(t) &= p_3 x_3(t) + u(t), \\ y(t) &= K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t) + K_3 x_3(t) + e_3 u(t),\end{aligned} \tag{6.84}$$

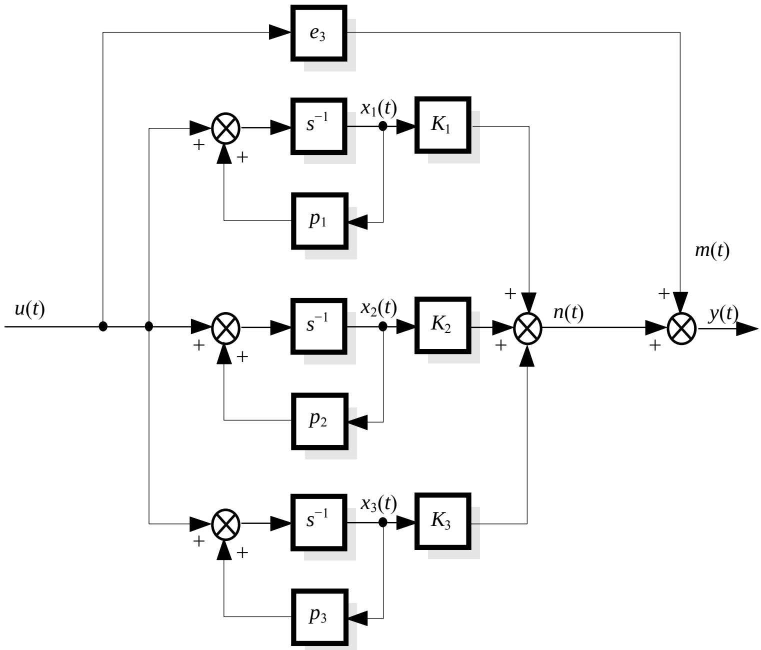
odnosno realizacija $\mathcal{R}\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d\}$, gde je

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{c} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}, \quad d = e_3 = b_3 . \tag{6.85}$$

Blok-dijagram promenljivih stanja za ovaj metod dekompozicije prika-zan je na slici 6.8. Generalizacijom blok-dijagrama, odnosno realizacije (6.85), dobija se realizacija $\mathcal{R}\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d\}$ za sistem n-tog reda, gde je

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}, \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \mathrm{c} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}, d = e_n = b_n . \tag{6.86}$$

Iz dobijenih matrica i vektora očigledno je da se paralelnom dekompozicijom prenosne funkcije s jednostrukim polovima matrica sistema $\boldsymbol{A}$ redukuje na dijagonalnu matricu s polovima prenosne funkcije kao njenim elementima, dok su svi elementi vektora upravljanja (ulaza) $\boldsymbol{b}$ jedinice.



Slika 6.8

b) Prenosna funkcija s višestrukim polovima

Postupak dekompozicije prenosne funkcije za ovaj slučaj biće pokazan na primeru prenosne funkcije šestog reda ($n=6$) s jednim dvostrukim, jednim trostrukim i jednim jednostrukim polom, oblika

$$\frac{Y}{U}(s)=\frac{K}{s^2(s+3)^3(s+1)}.$$

Najpre se prenosna funkcija razvija u niz parcijalnih razlomaka

$$\frac{Y}{U}(s)=\frac{K_{12}}{s^2}+\frac{K_{11}}{s}+\frac{K_{23}}{(s+3)^3}+\frac{K_{22}}{(s+3)^2}+\frac{K_{21}}{s+3}+\frac{K_3}{s+1}.$$

Koeficijenti K_{12}, K_{11}, K_{23}, K_{22}, K_{21} i K_3 određuju se iz relacija (2.31) i (2.33) i imaju sledeće vrednosti:

$$K_{12}=\frac{K}{27},\ K_{11}=-\frac{2K}{27},\ K_{23}=-\frac{K}{18},\ K_{22}=-\frac{7K}{108},\ K_{21}=-\frac{11K}{216},\ K_3=\frac{K}{8}.$$

Ako se u razvijenoj prenosnoj funkciji $Y(s)/U(s)$ uvedu oznake

$$X_2(s)=\frac{U(s)}{s},\quad X_1(s)=\frac{U(s)}{s^2},\quad X_5(s)=\frac{U(s)}{s+3},$$
$$X_4(s)=\frac{U(s)}{(s+3)^2},\quad X_3(s)=\frac{U(s)}{(s+3)^3},\quad X_6(s)=\frac{U(s)}{s+1},$$

tada se iz ovih relacija i izraza za $Y(s)$, inverznom Laplasovom transfor-macijom, dobijaju jednačine stanja i jednačina izlaza:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t)&=x_2(t)\,,\\
\dot{x}_2(t)&=u(t)\,,\\
\dot{x}_3(t)&=-3x_3(t)+x_4(t)\,,\\
\dot{x}_4(t)&=-3x_4(t)+x_5(t)\,,\\
\dot{x}_5(t)&=-3x_5(t)+u(t)\,,\\
\dot{x}_6(t)&=-x_6(t)+u(t)\,,
\end{aligned}$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}\frac{K}{27} & -\frac{2K}{27} & -\frac{K}{18} & -\frac{7K}{108} & -\frac{11K}{216} & \frac{K}{8}\end{bmatrix}\mathrm{x}(t)\,.$$

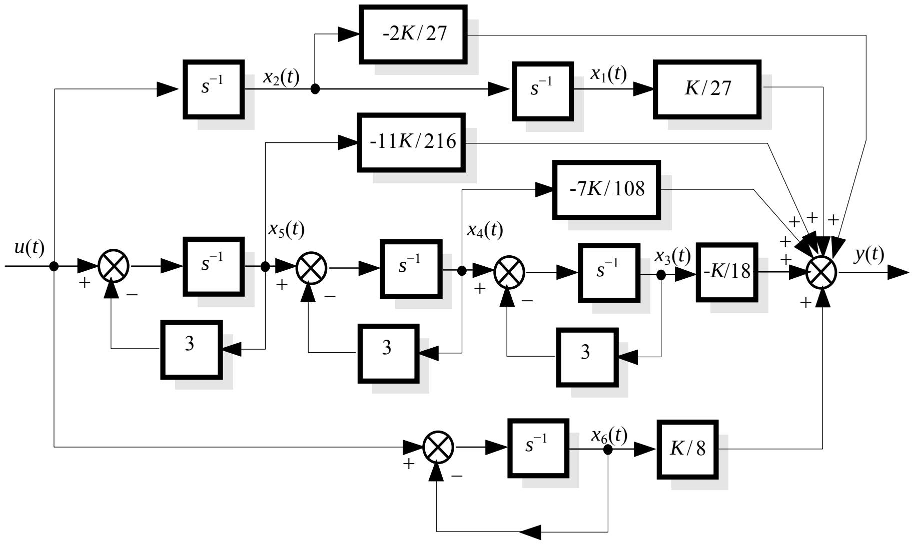
Iz prethodnih jednačina određuju se matrica sistema ***A*** i vektori ***b*** i ***c***, oblika

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad \mathrm{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\ \hline 0\\0\\1\\ \hline 1\end{bmatrix},\quad \mathrm{c}=\begin{bmatrix}K/27\\ -2K/27\\ \hline -K/18\\ -7K/108\\ -11K/216\\ \hline K/8\end{bmatrix}.$$

Odgovarajući blok-dijagram promenljivih stanja prikazan je na slici 6.9.

Dobijeni rezultat ne može se generalizovati za sistem n-tog reda, jer postupak dekompozicije zavisi od broja polova prenosne funkcije i njihove višestrukosti, pa je nemoguća generalizacija opšteg karaktera.

Matrica sistema ***A*** koja se dobija paralelnom dekompozicijom prenosne funkcije s višestrukim polovima naziva se Džordanovom (Jordan) matricom. U dobijenoj matrici ***A*** figuriše jedan Džordanov blok trećeg reda koji odgovara trostrukom polu –3 i jedan Džordanov blok drugog reda koji odgovara dvostrukom polu 0. Kako se dijagonalna matrica može smatrati specijalnim slučajem Džordanove matrice u kojoj figurišu samo Džordanovi blokovi prvog reda, analogno se zaključuje da je u dobijenoj matrici ***A*** prisutan i treći Džordanov blok, prvog reda, koji odgovara jednostrukom polu –1.


-2K/27
s^{-1}
$x_2(t)$
s^{-1}
$x_1(t)$
K/27
-11K/216
-7K/108
$u(t)$
$x_5(t)$
$x_4(t)$
$x_3(t)$
-K/18
$y(t)$
3
3
3
$x_6(t)$
K/8

Slika 6.9