Решења задатака 17.06.2014.

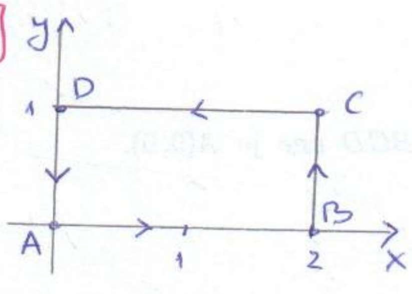
са 3. колоквијума из Математике 2

(1.) Израчунати циркулацију векторског поља

$$\vec{F} = (x^2-3xy)\,\vec{i} + (x+xy+2y^3)\,\vec{j}$$

дуж позитивно оријентисане контуре правоугаоника ABCD где је $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$, $D(0,1)$.

Р.



Циркулација векторског поља је криволинијски интеграл II врсте. Треба наћи

$$C = \oint_{\vec{c}} \vec{F} \circ d\vec{r} = \oint_{\vec{c}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

где је $\vec{c}$ позитивно оријентисана контура правоугаоника ABCD и $P(x,y) = x^2-3xy$, $Q(x,y) = x+xy+2y^3$.

Можемо применити Гринову ф-лу јер је $\vec{c}$ затворена крива и испуњени су сви остали потребни услови. Дакле

$$C = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$ где је D унутрашњост правоугаоника ABCD.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (x+xy+2y^3)'_x = 1+y \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = (x^2-3xy)'_y = -3x.$$

Јасно је да су границе за x и y следеће

$0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$. Због тога је

$$C = \iint_D (1+y-(-3x))\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_0^1 (1+3x+y)\,dy =$$

$$= \int_0^2 dx \left(\int_0^1 (1+3x)\,dy + \int_0^1 y\,dy\right) = \int_0^2 dx \left((1+3x)\cdot y\Big|_{y=0}^{y=1} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right) =$$

$$= \int_0^2 dx \left((1+3x)\cdot 1 - (1+3x)\cdot 0 + \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \int_0^2 dx \cdot \left(1+3x+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \int_0^2 \left(3x+\frac{3}{2}\right) dx = \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right)\Big|_0^2 =$$

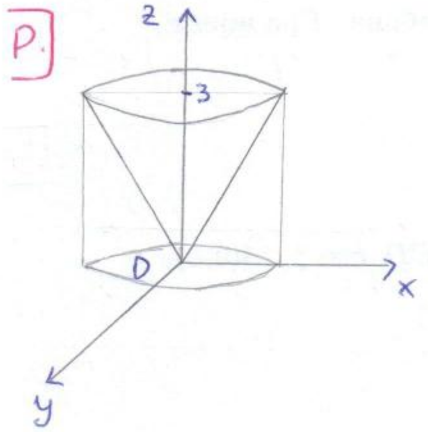
$$= \frac{3}{2}\cdot 2^2 + \frac{3}{2}\cdot 2 - \left(\frac{3}{2}\cdot 0^2 + \frac{3}{2}\cdot 0\right) = 6+3 = 9.$$

2. Израчунати површински интеграл првог реда

$$\iint_S (x+z^2)\,dS$$

где је S површ конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ између равни $z=0$ и $z=3$.

Р.



Површински интеграл првог реда се израчунава по ф-ли

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$$

где је $p=z'_x$, $q=z'_y$, D је пројекција површи S на Oxy раван и наравно површ S је задата ј-ном $z=z(x,y)$.

$$p=z'_x=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=\left((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right)'_x=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(x^2+y^2)'_x=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Слично је $q=z'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ па је

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+x^2+y^2}{x^2+y^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$$

По ф-ли добијамо

$$I=\iint_D \left(x+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right)\cdot\sqrt{2}\,dxdy=\sqrt{2}\iint_D (x+x^2+y^2)\,dxdy$$

D је пројекција дела конуса на Oxy раван тј. пројекција круга који се добија у пресеку конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и равни $z=3$, на Oxy раван. Заменом добијамо $3=\sqrt{x^2+y^2}$ тј. $x^2+y^2=9$. Дакле, D је круг са центром у координатном почетку полупречника 3.

Наравно, прелазимо на поларне координате

$x = r\cos\varphi$ $\qquad x^2+y^2=9 \Rightarrow r^2=9 \Rightarrow r=3.$

$y = r\sin\varphi$ $\qquad$ Дакле, границе су

$J = r$ $\qquad 0 \le r \le 3$ и $0 \le \varphi \le 2\pi.$

$x^2+y^2=r^2$

$$I = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (r\cos\varphi + (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2)\cdot r\,dr =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (r\cos\varphi + r^2)\,r\,dr = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^3 (r^2\cos\varphi + r^3)\,dr$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(\cos\varphi\cdot\frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{4}\right)\Big|_{r=0}^{r=3} = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\left(\cos\varphi\cdot\frac{3^3}{3} + \frac{3^4}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(9\cos\varphi + \frac{81}{4}\right)d\varphi = \sqrt{2}\cdot\left(9\sin\varphi + \frac{81}{4}\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left[9\underbrace{\sin(2\pi)}_{0} + \frac{81}{4}\cdot 2\pi - \left(9\underbrace{\sin 0}_{0} + \frac{81}{4}\cdot 0\right)\right] =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{81}{4}\cdot 2\pi = \boxed{\frac{81}{2}\sqrt{2}\,\pi}$$

③ Дато је векторско поље

$$\vec{F} = 2xy^2\,\vec{i} + (ayx^2 + yz^2)\,\vec{j} + bzy^2\,\vec{k}.$$

a) Одредити константе a и b тако да поље $\vec{F}$ буде потенцијално.

б) Наћи потенцијал поља $\vec{F}$.

c) Израчунати $\int_{AB} \vec{F}\circ d\vec{r}$, где је $A(2,1,2)$ и $B(2,2,1)$

d) Израчунати циркулацију вект. поља $\vec{F}$ по контури круга $(x-1)^2+y^2=25$.

P.] Поље је потенцијално ако и само ако је $\mathrm{rot}\,\vec{F}=0.$

a)
$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

~~$P = 2xy^2$~~

Имамо да је

$$P(x,y,z)=2xy^2 \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=2x\cdot 2y=4xy \qquad \frac{\partial P}{\partial z}=0$$

$$Q(x,y,z)=ayx^2+yz^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=ay\cdot 2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=2yz$$

$$R(x,y,z)=bzy^2 \qquad \frac{\partial R}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial R}{\partial y}=bz\cdot 2y$$

Због тога је

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^2 & ayx^2+yz^2 & bzy^2 \end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left((bzy^2)'_y-(ayx^2+yz^2)'_z\right)-\vec{j}\left((bzy^2)'_x-(2xy^2)'_z\right)+$$

$$+\vec{k}\left((ayx^2+yz^2)'_x-(2xy^2)'_y\right)=$$

$$=\vec{i}\cdot(2bzy-2yz)-\vec{j}(0-0)+\vec{k}(2ayx-4xy)$$

Из услова $\operatorname{rot}\vec{F}=0$ добијамо

$$2bzy-2yz=0 \longrightarrow \boxed{b=1}$$
$$2ayx-4xy=0 \Longrightarrow \boxed{a=2}$$

Дакле,
$$P(x,y,z)=2xy^2$$
$$Q(x,y,z)=2yx^2+yz^2$$
$$R(x,y,z)=zy^2.$$

б) Потенцијал се рачуна по ф-ли

$$f(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0,z_0)\,dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t,z_0)\,dt+\int_{z_0}^{z}R(x,y,t)\,dt.$$

Фје P, Q и R су дефинисане у тачки $(0,0,0)$, па можемо узети $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$. Имамо

$$P(t,0,0)=\cancel{2t\cdot 0^2}=(2xy^2)\big|_{(t,0,0)}=2\cdot t\cdot 0^2=0$$

$$Q(x,t,0)=(2yx^2+yz^2)\big|_{(x,t,0)}=2tx^2+t\cdot 0^2=2tx^2$$

$$R(x,y,t)=(zy^2)\big|_{(x,y,t)}=ty^2.$$

Дакле,

$$f(x,y,z) = \int_0^x P(t,0,0)\,dt + \int_0^y Q(x,t,0)\,dt + \int_0^z R(x,y,t)\,dt =$$

$$= \int_0^x 0 \cdot dt + \int_0^y 2tx^2\,dt + \int_0^z ty^2\,dt =$$

$$= 0 + x^2 \cdot 2\frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=y} + y^2 \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=z} =$$

$$= \underline{x^2y^2 + \frac{1}{2}y^2z^2}$$

c) Када је поље $\vec{F}$ потенцијално тада је

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F} \circ d\vec{r} = f(B) - f(A),$$

и овај интеграл не зависи од путање већ само од крајњих тачака A и B.

Дакле

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F} \circ d\vec{r} = f(B) - f(A) = f(2,2,1) - f(2,1,2) =$$

$$= \left(x^2y^2 + \frac{1}{2}y^2z^2\right)\Big|_{(2,2,1)} - \left(x^2y^2 + \frac{1}{2}y^2z^2\right)\Big|_{(2,1,2)} =$$

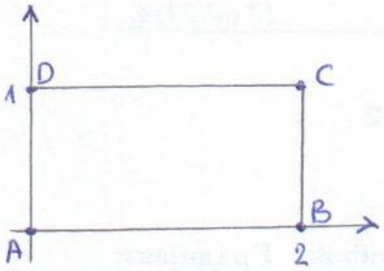
$$= \left(2^2 \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot 1\right) - \left(2^2 \cdot 1^2 + \frac{1}{2}1^2 \cdot 2^2\right) = 18 - 6 = 12$$

d) Када је поље потенцијално онда је циркулација поља по ма којој затвореној кривој једнака нули. Дакле,

$$\oint_{\vec{C}} \vec{F} \circ d\vec{r} = 0$$

① Други начин

Дакле, треба наћи



$$C = \oint_{c} \vec{F} \circ d\vec{r} = \oint_{c} (x^2-3xy)dx + (x+xy+2y^3)dy$$

Криву $\vec{c}$, тј. правоугаоник ABCD делимо на 4 усмерене дужи $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ па интеграл C делимо на 4 интеграла:

$$C = \int_{\overrightarrow{AB}} \vec{F} \circ d\vec{r} + \int_{\overrightarrow{BC}} \vec{F} \circ d\vec{r} + \int_{\overrightarrow{CD}} \vec{F} \circ d\vec{r} + \int_{\overrightarrow{DA}} \vec{F} \circ d\vec{r} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Треба наћи параметарске ј-не дужи.

$\overrightarrow{AB}$ $\quad A(0,0) \quad B(2,0)$

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{0-0} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{0} = t \Rightarrow \quad x = 2t \rightarrow x_t' = 2, \quad y = 0 \rightarrow y_t' = 0, \quad 0 \le t \le 1$$

По ф-ли је

$$I = \int_0^1 \left[\left((2t)^2 - 3 \cdot 2t \cdot 0\right) \cdot 2 + \left(2t + 2t \cdot 0 + 2 \cdot 0^3\right) \cdot 0 \right] dt =$$

$$= \int_0^1 8t^2\, dt = \frac{8}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{8}{3}$$

$\overrightarrow{BC}$ $\quad B(2,0) \quad C(2,1)$

$$\frac{x-2}{2-2} = \frac{y-0}{1-0} \Rightarrow \frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = t \Rightarrow \quad x = 2 \Rightarrow x_t' = 0, \quad y = t \Rightarrow y_t' = 1, \quad 0 \le t \le 1$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[\left(2^2 - 3 \cdot 2 \cdot t\right) \cdot 0 + \left(2 + 2 \cdot t + 2t^3\right) \cdot 1 \right] dt =$$

$$= \int_0^1 (2 + 2t + 2t^3)\, dt = \left(2t + t^2 + \frac{1}{2} t^4\right) \Big|_0^1 =$$

$$= 2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$\overrightarrow{CD}$ $\quad C(2,1) \quad D(0,1)$

$$\frac{x-2}{0-2} = \frac{y-1}{1-1} \Rightarrow \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{0} = t \Rightarrow \begin{array}{l} x = -2t+2 \Rightarrow x'_t = -2 \\ y = 1 \Rightarrow y'_t = 0 \\ 0 \le t \le 1 \end{array}$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[\left((-2t+2)^2 - 3\cdot(-2t+2)\cdot 1\right)\cdot(-2) + \left((-2t+2) + (-2t+2)\cdot 1 + 2\cdot 1^3\right)\cdot 0 \right] dt$$

$$= \int_0^1 (-8t^2 + 4t + 4)\, dt = \left(-\frac{8}{3}t^3 + 2t^2 + 4t\right)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{8}{3} + 2 + 4 = \frac{10}{3}$$

$\overrightarrow{DA}$ $\quad D(0,1) \quad A(0,0)$

$$\cancel{\frac{x-0}{0-0}} = \cancel{\frac{y-0}{1-0}}$$

$$\frac{x-0}{0-0} = \frac{y-1}{0-1} \Rightarrow \frac{x}{0} = \frac{y-1}{-1} = t \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow x'_t = 0 \\ y = -t+1 \Rightarrow y'_t = -1 \\ 0 \le t \le 1 \end{array}$$

$$I_4 = \int_0^1 \left[(0^2 - 3\cdot 0\cdot(-t+1))\cdot 0 + \left(0 + 0\cdot(-t+1) + 2\cdot(-t+1)^3\right)\cdot(-1) \right] dt$$

$$= \int_0^1 (-2)(1-t)^3\, dt = \left| \begin{array}{ll} u = 1-t & t=1 \to u=0 \\ du = -dt & t=0 \to u=1 \end{array} \right| =$$

$$= (-2)\int_1^0 u^3(-du) = 2\int_1^0 u^3\, du = -2\int_0^1 u^3\, du =$$

$$= -2\cdot \frac{u^4}{4}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}$$

Коначно добијамо да је

$$I = \frac{8}{3} + \frac{7}{2} + \frac{10}{3} - \frac{1}{2} = 9$$

② Други начин

Најпре ћемо наћи параметарске ј-не површи

S: $z=\sqrt{x^2+y^2}$

Како је пресек конуса са равнима које су паралелне Oxy равни круг, то уводимо следеће ј-не

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

Из $z=\sqrt{x^2+y^2}$ добијамо

$$z=\sqrt{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}=\sqrt{r^2}=r$$

Пројекција површи S на Oxy раван је круг

$3=\sqrt{x^2+y^2}$ тј. $x^2+y^2=9$. Одавде добијамо

$r^2=9$ тј. $r=3$. Дакле, параметарске ј-не површи S су

$x=r\cos\varphi$

$y=r\sin\varphi$

$z=r$

$0\le r\le 3$

$0\le\varphi\le 2\pi$

Сада рачунамо

$$E=[x'_r]^2+[y'_r]^2+[z'_r]^2=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+1^2=1+1=2$$

$$G=[x'_\varphi]^2+[y'_\varphi]^2+[z'_\varphi]^2=(-r\sin\varphi)^2+(r\cos\varphi)^2+0^2=r^2$$

$$F=(x'_r)\cdot(x'_\varphi)+y'_r\cdot y'_\varphi+z'_r\cdot z'_\varphi=$$

$$=\cos\varphi\cdot(-r\sin\varphi)+\sin\varphi\cdot(r\cos\varphi)+1\cdot 0=0$$

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{2\cdot r^2-0^2}=r\sqrt{2}$$

Сада користимо ф-лу

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x(r,\varphi), y(r,\varphi), z(r,\varphi))\cdot\sqrt{EG-F^2}\,dr\,d\varphi$$

добијамо

$$\iint_S (x+z^2)\,dS = \iint_D (r\cos\varphi + r^2)\cdot r\sqrt{2}\,dr\,d\varphi$$

Наравно D је област одређена са $0 \le r \le 3$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (r^2\cos\varphi + r^3)\cdot\sqrt{2}\,dr =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(\cos\varphi\cdot\frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=3} =$$

$$= \cancel{2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}} = \ldots \text{ као у првом начину } \ldots = \frac{81}{2}\sqrt{2}\,\pi.$$