II колоквијум из Математике 2

16.05.2014.

(1) Наћи екстремне вредности ф-је

$$z(x,y) = x^3 + 3xy + 6x - \frac{y^2}{2}.$$

Р] Најпре налазимо z'_x и z'_y.

$$z'_x = 3x^2 + 3y + 6 \qquad z'_y = 3x - y$$

Затим решавамо систем ј-на

$$\left.\begin{matrix} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 3x^2+3y+6=0 \\ 3x-y=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2+y+2=0 \\ y=3x \end{matrix}\right\}$$

Заменом друге ј-не у прву добијамо

$$x^2+3x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-1 \qquad x_2=-2$$

$$y_1 = 3x_1 = -3 \qquad y_2 = 3x_2 = -6.$$

Следи да су стационарне тачке $M_1(-1,-3)$ и $M_2(-2,-6)$.

Сада тражимо друге парцијалне изводе од z.

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (3x^2+3y+6)'_x = 6x$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (3x-y)'_y = -1$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (3x^2+3y+6)'_y = 3$$

(може и $z''_{xy} = z''_{yx} = (z'_y)'_x = (3x-y)'_x = 3$).

Добијамо да је

$$D = z''_{xx}\cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 6x\cdot(-1) - 3^2 = -6x-9$$

Затим одређујемо знак израза D у свакој стационарној тачки.

1) $M_1(-1,-3)$

$D(-1,-3) = (-6x-9)\big|_{(-1,-3)} = -6\cdot(-1)-9 = -3 < 0$

Закључак је да ф-ја z не достиже екстремну вредност у тачки $M_1(-1,-3)$ тј. тачка $M_1(-1,-3)$ је седласта тачка.

2) $M_2(-2,-6)$

$D(-2,-6) = (-6x-9)\big|_{(-2,-6)} = -6\cdot(-2)-9 = 3 > 0$

Следи да z достиже ~~максимум~~ екстремну вредност у тач. $M_2(-2,-6)$ да би одредили да ли је у питању локални минимум или локални максимум, морамо одредити знак за z''_{xx} (или z''_{yy} све једно је) у т. $M_2(-2,-6)$.

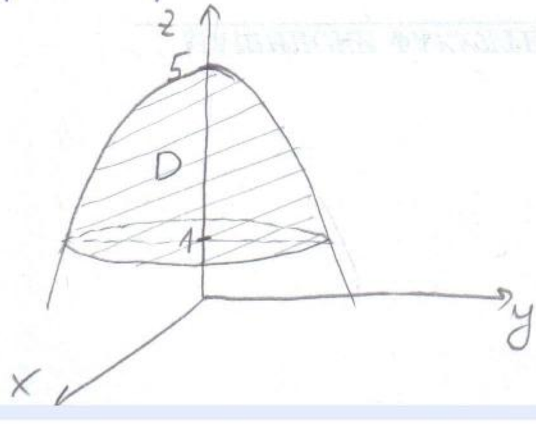
$z''_{xx}(-2,-6) = 6x\big|_{(-2,-6)} = 6\cdot(-2) = -12 < 0$

Закључак је да ф-ја $z(x,y)$ достиже локални максимум у тачки $M_2(-2,-6)$. Вредност тог локалног максимума је

$$z_{max} = z(-2,-6) = (-2)^3 + 3\cdot(-2)\cdot(-6) + 6\cdot(-2) - \frac{(-6)^2}{2} = -2$$

2. Израчунати запремину тела ограниченог параболоидом $z = 5 - x^2 - y^2$ и равни $z = 1$.

Р. С обзиром да је $z = 5 - x^2 - y^2 \leq 5$ следи да је параболоид окренут на доле и да му је највиша тачка на висини 5 тј. $(0,0,5)$.



Раван $z=1$ је паралелна са координатном равни Oxy, и налази се на висини 1.

Запремину тела (означимо га са D) ћемо израчунати помоћу ф-ле

$$V(D) = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz.$$

Прелазимо на цилиндричне координате

$$\begin{array}{lll} x = r\cos\varphi & J = r & r \geq 0 \\ y = r\sin\varphi & x^2+y^2 = r^2 & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = h & & \end{array} \Bigg\} \text{ иницијалне границе}$$

Границе за r и φ одређујемо тако што изразе за x, y и z мењамо у ј-не које одређују тело D (тј. у $z = 5 - x^2 - y^2$ и $z = 1$).

Са слике се види да се z-координате тачака тела D крећу од равни $z = 1$ до параболоида $z = 5 - x^2 - y^2$. Следи да је тело D одређено неједначинама $z \geq 1$ и $z \leq 5 - x^2 - y^2$.

Следи:

$$\begin{array}{l|l} z \leq 5 - x^2 - y^2 = 5 - (x^2+y^2) & z \geq 1 \\ h \leq 5 - r^2 & h \geq 1 \end{array}$$

Добили смо границе за h: $\boxed{1 \leq h \leq 5 - r^2}$

Такође смо добили да је $1 \leq 5 - r^2$ тј.

$r^2 \leq 4 \Rightarrow r \leq 2$. Зато су границе за r:

$\boxed{0 \leq r \leq 2}$ Како за φ нисмо добили никакво ограничења, следи да су границе за φ:

$\boxed{0 \leq \varphi \leq 2\pi}$. Због свега реченог је:

$$V(D) = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_1^{5-r^2} \overset{J}{r}\, dh =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\,dr \int_1^{5-r^2} dh = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\,dr \cdot h\Big|_{h=1}^{h=5-r^2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\cdot(5 - r^2 - 1)\,dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4r - r^3)\,dr =$$

$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^2 = (2\pi - 0)\cdot\left(2\cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} - \left(2\cdot 0^2 - \frac{0^4}{4}\right)\right)$

$= 2\pi \cdot (8-4) = 8\pi.$

Запремина тела D је 8π.

3. Израчунати интеграл $\iiint\limits_D z^2\,dxdydz$, где је D лопта $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

Р. Како је у питању лопта, уводимо сферне координате.

$x = r\cos\varphi\sin\theta \qquad J = r^2\sin\theta$

$y = r\sin\varphi\sin\theta \qquad x^2+y^2+z^2 = r^2$

$z = r\cos\theta$

$\left.\begin{array}{l} r \ge 0 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{array}\right\}$ иницијалне границе.

Границе за r, φ и θ налазимо тако што изразе за x, y и z мењамо у једначину тела D тј. у неједначину $x^2+y^2+z^2 \le 1$. Како је $x^2+y^2+z^2 = r^2$ (сређивањем се баш то добија), следи

$r^2 \le 1$ тј. $r \le 1$ па је $\boxed{0 \le r \le 1}$

То је једини услов који смо добили па границе за φ и θ остају исте $\boxed{0 \le \varphi \le 2\pi}$ и $\boxed{0 \le \theta \le \pi}$. Следи

$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 \underbrace{(r\cos\theta)^2}_{z^2} \cdot \underbrace{(r^2\sin\theta)}_{J}\,dr =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^4\cos^2\theta\sin\theta\,dr =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos^2\theta\sin\theta\,d\theta \int_0^1 r^4\,dr.$

$$\int_0^1 r^4\, dr = \frac{r^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}(1^5 - 0^5) = \frac{1}{5}$$

$$\int \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = \left| \begin{array}{l} t = \cos\theta \\ dt = -\sin\theta\, d\theta \Rightarrow \sin\theta\, d\theta = -dt \end{array} \right| =$$

$$= \int t^2 \cdot (-dt) = -\frac{t^3}{3} = -\frac{\cos^3\theta}{3}$$

Следи $\int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = -\frac{1}{3} \cdot \cos^3\theta \Big|_0^{\pi} =$

$$= -\frac{1}{3}(\cos^3\pi - \cos^3 0) = -\frac{1}{3}\left((-1)^3 - 1^3\right) = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

Коначно добијамо да је

$$I = 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15}\pi.$$