Решења задатака са 2. колоквијума из Математике 1

21. 12. 2013.

① Наћи прве изводе следећих ф-ја:

a) $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ б) $f(x)=\ln^5 x$ c) $f(x)=x e^{\frac{1}{x}}$ d) $f(x)=3\cos^2 5x$

Р a) $f'(x)=\frac{(x^2)'\cdot(x+1)-x^2\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{2x\cdot(x+1)-x^2\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

б) $f'(x)=((\ln x)^5)'=5\cdot(\ln x)^4\cdot(\ln x)'=5\ln^4 x\cdot\frac{1}{x}=\frac{5\ln^4 x}{x}$

c) $f'(x)=(x)'e^{\frac{1}{x}}+x\cdot(e^{\frac{1}{x}})'=1\cdot e^{\frac{1}{x}}+x\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot(\frac{1}{x})'=$

$=e^{\frac{1}{x}}+x\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})=e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x})$.

d) $f'(x)=3\cdot(\cos^2 5x)'=3\cdot 2\cos(5x)\cdot(\cos(5x))'=$

$=6\cos(5x)\cdot(-\sin 5x)\cdot(5x)'=-6\cos(5x)\cdot\sin(5x)\cdot 5$

$=-30\cos(5x)\cdot\sin(5x)=-15\sin(10x)$.

② Одредити ј-ну тангенте и нормале криве $f(x)=\sqrt{5-x^2}$ у тачки чија је апсциса $x_0=2$.

Р. Ј-не су:

$t:\quad y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

$n:\quad y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$, $x_0=2$

$f(x_0)=f(2)=\sqrt{5-2^2}=1$

$f'(x)=\frac{1}{2}(5-x^2)^{\frac{1}{2}-1}(5-x^2)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{5-x^2}}$

$f'(x_0)=\frac{-2}{\sqrt{5-2^2}}=-2$

Због тога су ј-не следеће:

$t:\quad y-1=-2\cdot(x-2)\implies t:\quad y=-2x+5$

$n:\quad y-1=\frac{1}{2}(x-2)\implies n:\quad y=\frac{1}{2}x$

3) Наћи следеће граничне вредности:

a) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{\cos\frac{x}{2}}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+5x}$.

Р. a) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\pi-\pi}{\cos\frac{\pi}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{Л.П.}}{=}\lim\limits_{x\to\pi}\frac{(\pi-x)'}{(\cos\frac{x}{2})'}=$

$=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{-1}{-\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{2}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{1}=2$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x-1}=\frac{1\cdot\ln 1}{1-1}=\frac{1\cdot 0}{0}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{Л.П.}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x\ln x)'}{(x-1)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to 1}(\ln x+1)=\ln 1+1=0+1=1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+5x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{\text{Л.П.}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2+5x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x+5}$

$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{\text{Л.П.}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x+5)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=\frac{e^{+\infty}}{2}=+\infty$

4) Испитати ток и скицирати график ф-је

$f(x)=\frac{x^2-2x-3}{2x+3}$.

Р. Област дефинисаности

$2x+3\neq 0 \iff x\neq -\frac{3}{2} \implies D(f)=(-\infty,-\frac{3}{2})\cup(-\frac{3}{2},+\infty)$

Ф-ја није ни парна ни непарна јер је

$f(-x)=\frac{(-x)^2-2\cdot(-x)-3}{2\cdot(-x)+3}=\frac{x^2+2x-3}{-2x+3}\neq f(x)$
$\neq -f(x)$.

Ф-ја није периодична.

Нуле и знак

$f(x)=0 \iff x^2-2x-3=0 \iff x=3$ или $x=-1$

	$-\infty$ … $-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$ … -1	-1 … 3	3 … $+\infty$
x^2-2x-3	+	+	−	+
$2x+3$	−	+	+	+
$f(x)$	−	+	−	+

$f(x)>0$ за $x\in(-\frac{3}{2},-1)\cup(3,+\infty)$

$f(x)<0$ за $x\in(-\infty,-\frac{3}{2})\cup(-1,3)$.

$\boxed{f(0)=-1}$

Асимптоте

Вертикалне

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}^-} \frac{x^2-2x-3}{2x+3} = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-3}{2\cdot\left(-\frac{3}{2}^-\right)+3} = \frac{\frac{9}{4}}{0^-} = -\infty$$

$-\frac{3}{2}$ $\quad$ -3 $\quad$ 0

$x = -\frac{3}{2}^-$ $\quad$ $2\cdot\left(-\frac{3}{2}^-\right) = -3^-$ $\quad$ $2\cdot\left(-\frac{3}{2}^-\right)+3 = 0^-$

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}^+} \frac{x^2-2x-3}{2x+3} = \frac{\frac{9}{4}}{0^+} = +\infty$$

Права $x = -\frac{3}{2}$ је лева вертикална и десна вертикална асимптота.

Хоризонталне

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x-3}{2x+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{л.п.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^2-2x-3)'}{(2x+3)'} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-2}{2} = \frac{\pm\infty}{2} = \pm\infty$$

Ф-ја нема ~~веро~~ хоризонталне асимптоте

Косе

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x-3}{x(2x+3)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x-3}{2x^2+3x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$\overset{\text{л.п.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-2}{4x+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{л.п.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-2x-3}{2x+3} - \frac{1}{2}x\right) =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\cdot(x^2-2x-3)-(2x+3)\cdot x}{2(2x+3)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-7x-6}{4x+6} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$\overset{\text{л.п.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-7}{4} = \frac{-7}{4}$$

Права $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$ је коса асимптота.

Први извод (монотоност и локални екстремуми)

$$f'(x)=\frac{(2x-2)\cdot(2x+3)-(x^2-2x-3)\cdot 2}{(2x+3)^2}=\frac{2x^2+6x}{(2x+3)^2}=\frac{2x(x+3)}{(2x+3)^2}$$

$f'(x)=0$ за $x=0$ или $x=-3$

	$-\infty$ … -3	-3 … $-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$ … 0	0 … $+\infty$
$2x^2+6x$	+	−	−	+
$(2x+3)^2$	+	+	+	+
$f'(x)$	+	−	−	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

$f(x)>0$ за $x\in(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$

$f(x)<0$ за $x\in(-3,-\frac{3}{2})\cup(-\frac{3}{2},0)$.

Ф-ја достиже локални максимум за $x=-3$ и он износи $f_{max}=f(-3)=\frac{(-3)^2-2\cdot(-3)-3}{2\cdot(-3)+3}=-4$

Ф-ја достиже локални минимум за $x=0$ и он износи $f_{min}=f(0)=\frac{-3}{3}=-1$.

Други извод (конвексност и превојне тачке)

$$f''(x)=\left(\frac{2x^2+6x}{(2x+3)^2}\right)'=\frac{(4x+6)\cdot(2x+3)^{\cancel{2}}-(2x^2+6x)\cdot 2\cdot\cancel{(2x+3)}\cdot 2}{(2x+3)^{\cancel{4}\,3}}=$$

$$=\frac{18}{(2x+3)^3}$$

	$-\infty$ … $-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$ … $+\infty$
$(2x+3)^3$	−	+
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	∩	∪