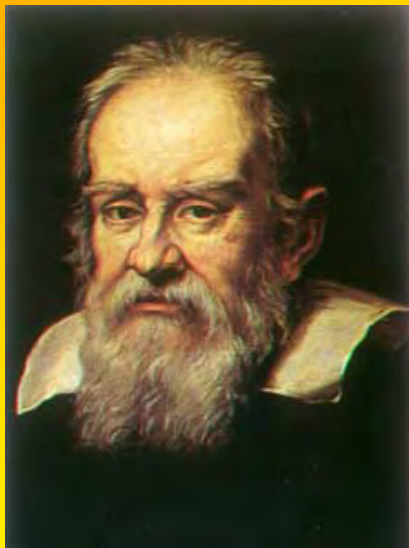
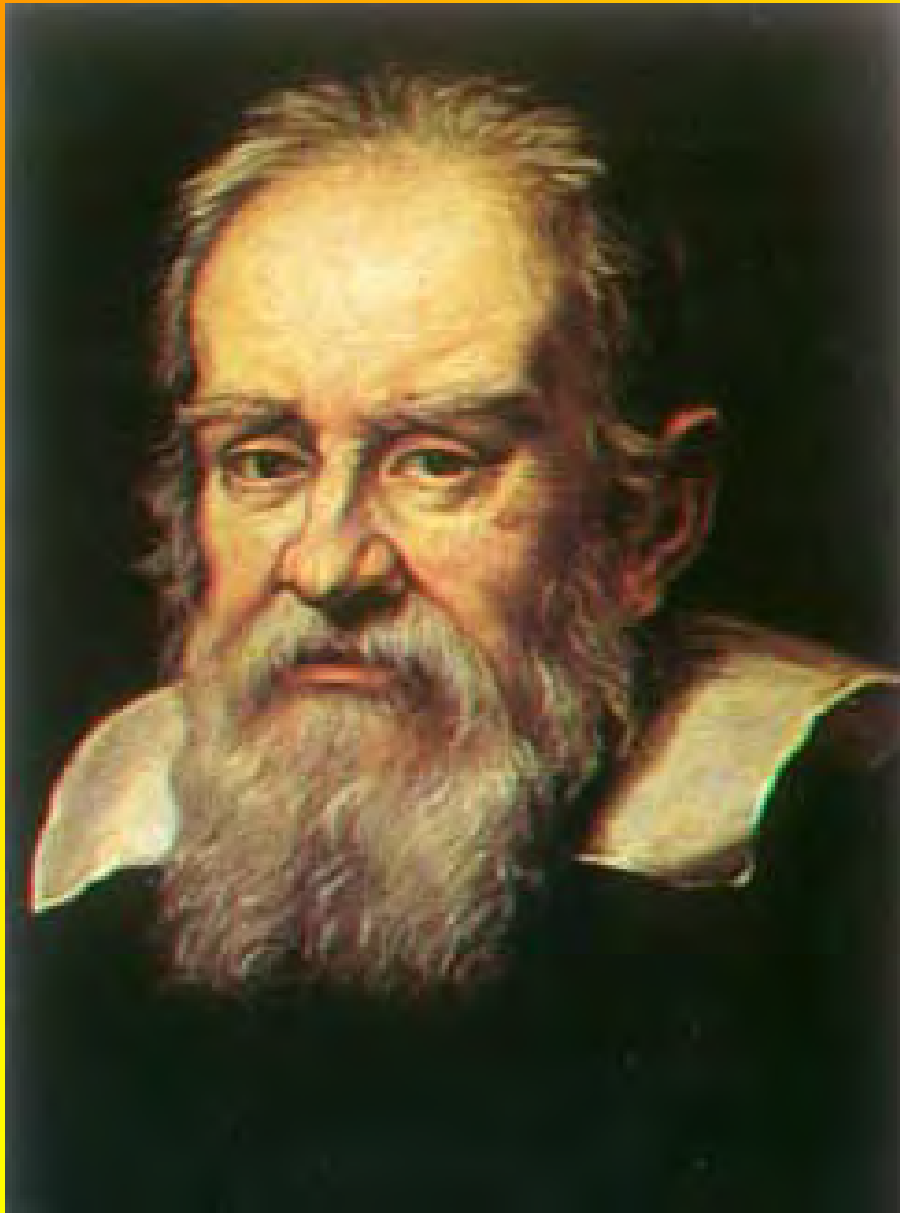


Beseda o Mehanici, mojim profesorima, kolegama i studentima



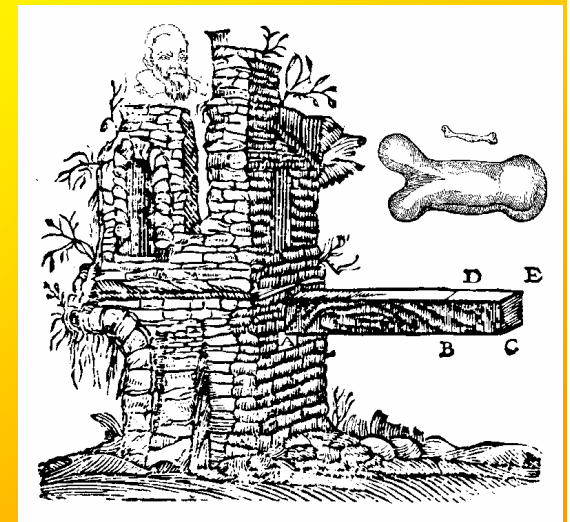
povodom 445 godina od rođenja Galileo Galilei (15 February 1564 – 8 January 1642) i 130 godina od rođenja Milutina Milankovića (1879 - 1958), posvećeno profesorima Draginji Nikolić, Danilu Raskoviću, Tatomiru Andjeliću i Yuriju Mitropoljskom.

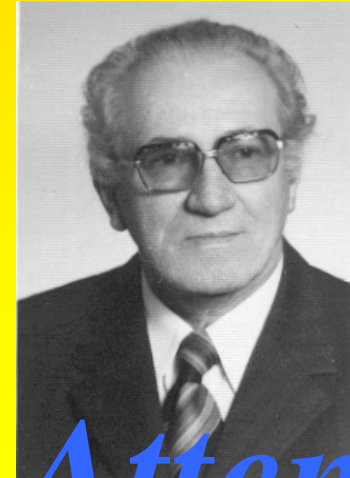
Katica (Stevanović) HEDRIH



Galilo Galilei Basic ideas of Fracture Mechanics

*“Discorsi e dimostrazioni
matematiche intorno a due
nuove scienze attenti alla
meccanica e i movimenti locali”
1638 Galileo Galilei*





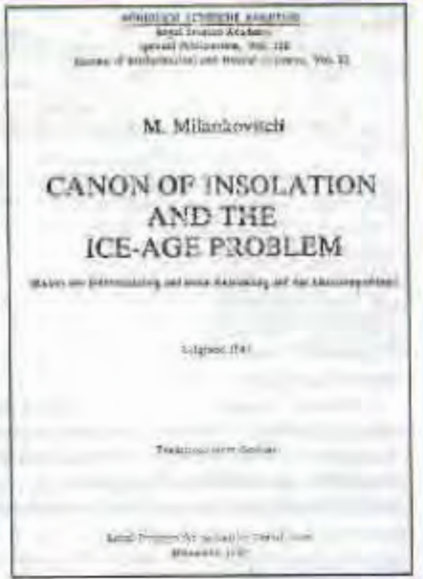
Thank You for Attention!



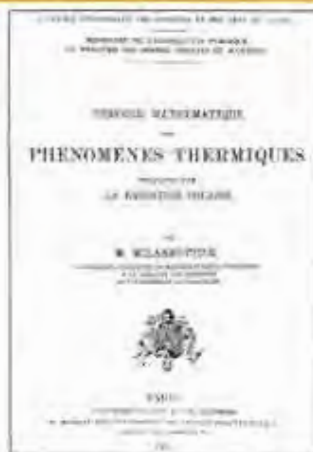


"U njegovom radovanju"
 M. Milanković je u svojim radovima u ovom području i Američkom fizičaru Leoluca Crutcheru, Dr. W. V. zaslужan, on je u stvari za razliku H. Milutina Milankovića je Milankovićovim radovima najviše opravdanje za svoje radove.

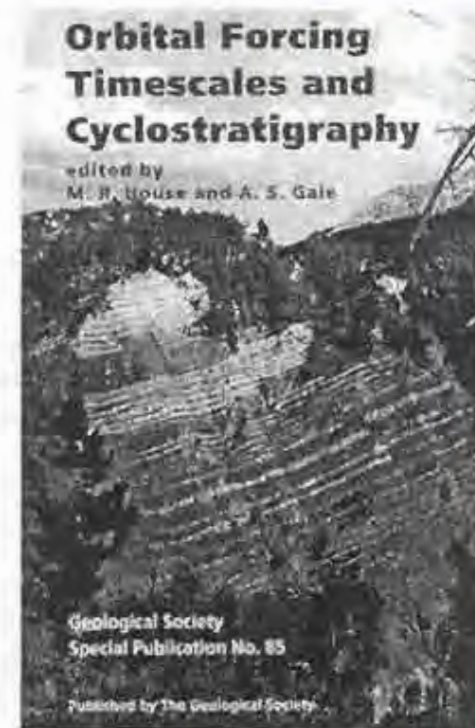
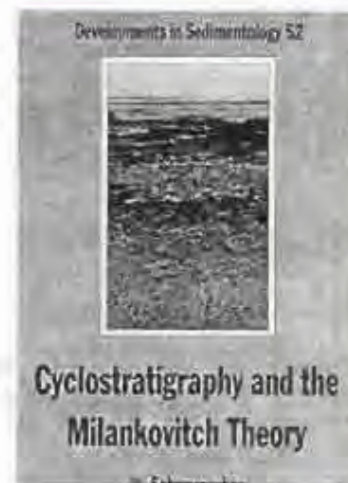
"In his own workbooks"
 M. Milanković in the study in his home in Belgrade (Lepin Bogdanović Street number 9). In the background on the wall are portraits of Newton & portrait of A. Newton to whom Milanković dedicated the most beautiful pages of the history of science.



Слика 4 – Руски превод Математичке климатологије и астрономске теорије колебања климе и енглески превод Миланковићевог Канона осунјавања



Слика 8 – Оригинална страница Миланковићевог математичког трактата о циклусима времена из 1908. године



Слика 9 – Неке новије књиге засноване на Миланковићевом Канону

Mitropolskii Yu. A.
Nguyen Van Dao

Lectures on
ASYMPTOTIC METHODS
OF
NONLINEAR DYNAMICS

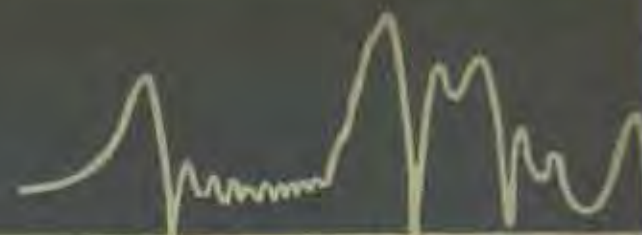


Vietnam National University Publishing House, Hanoi



Дорогой Профессору Хедрик
(Стефанович) Кадлице,
с наилучшими пожеланиями
Большая удачи в науке,
с уважением
2018-2019. W. Kupczynski

Губокоувананов
Катине Стеванович
на память о предвании
в Киеве.
Ю. А. Митропольский



Ю.А.МИТРОПОЛЬСКИЙ

ПРОБЛЕМЫ
АСИМПТОТИЧЕСКОЙ
ТЕОРИИ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ
КОЛЕБАНИЙ



Profesor dr Ing. dipl.
Math.

Danilo P.
Rašković

(1910-1985)

Yugoslavia

UNIVERZITET U BEOGRADU

DANILO RAŠKOVIC

МЕХАНИКА I СТАТИКА



Данило Рашковић БЕОГРАД

20.6.73.
Београд

Својим одличним асистентом,
грађини Катери, на његовом
адресу: *Др Јанковић*

UNIVERZITET U BEOGRADU

DR DANILU RAŠKOVIC

ZBIRKA ZADATAKA IZ MEHANIKE

II

ZA DRUGI STEPEN STUDIA NA TEHNIČKIM
FAKULTETIMA I VIŠIM TEHNIČKIM ŠKOLAMA

ZAVRŠNA OBLASTI I OBLASTI
TEHNIČKE ŠKOLE
BEOGRAD

Универзитет у Београду
20.6.73.
Др Јанковић

D. RAŠKOVIC

МЕХАНИКА

I

СТАТИКА

SI ISBN 86

Данило Рашковић
БЕОГРАД, 1973

*Преправљено Копије
10.2.1972. проф. Д. Рашковић*

Д. РАШКОВИЋ

МЕХАНИКА

I
СТАТИКА

XI ДИО

Наука
БЕОГРАД

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

*Копија на преводу
10.2.1972.*

Д. РАШКОВИЋ

МЕХАНИКА

II ДИО

УЧЕНИКОВИ СТАТИКА И ДИНАМИКА
И ИЛИЈА ПЕТРОВИЋ

ЧЕТВРТО ИЗДАЊЕ

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЊЕ
„ГРАЂЕВИНСКИ КНИГОВИ“
БЕОГРАД, 1972.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

*Својој одличном колеги,
проф. Рашковићу, на захвалу
10.2.1972. проф. Д. Рашковићу*

Д. РАШКОВИЋ

МЕХАНИКА

III

ДИНАМИКА

ЧЕТВРТО ИЗДАЊЕ

Наука

БЕОГРАД, 1972.

*Uzorki zadatka iz mehanike
Dimitrijević i Zvezdanić
Broj 5.10.1980. opt. D. Rasković*

Д. РАШКОВИЋ

ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА

X ИЗМЕНЈЕНО ИЗДАЊЕ

Дарина Криво
БЕОГРАД

UNIVERZITET U BEOGRADU

Dr. sc. ĐANILO P. RASKOVIĆ
profesor inženjeringa

*Uzorki zadatka iz mehanike
Dimitrijević i Zvezdanić
Broj 5.10.1980. opt. D. Rasković*

ZBIRKA ZADATAKA IZ MEHANIKE

II

ZA DRUGI STEPEN STUDIJA NA TEHNIČKIM
FAKULTETIMA I VISOKIM TEHNIČKIM ŠKOLAMA

*Zbirka zadataka iz mehanike
Dimitrijević i Zvezdanić
Broj 5.10.1980. opt. D. Rasković*

UNIVERZITET U BEOGRADU

Dr. sc. ĐANILO P. RASKOVIĆ

ZBIRKA ZADATAKA IZ MEHANIKE III

— TEORIJA VISIČIJA —

IZDAVAČKI INSTITUT ZVEZDANIĆ
BEOGRAD

*Uzorki zadatka iz mehanike
Dimitrijević i Zvezdanić
Broj 5.10.1980. opt. D. Rasković*

Д. РАШКОВИЋ

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ОПОРНОСТИ МАТЕРИЈАЛА

КЉУЧНИ ПОЈМОВИ ИЛИ КРАТКИ ОЧЕРЦИ

Дарина Криво
БЕОГРАД

IZDAVAČKI INSTITUT ZVEZDANIĆ
BEOGRAD

MAŠINSKI FAKULTET
KRAGUJEVAC

Prof. Dr. ing. dipl. math. Danilo Rašković

OSNOVI TENZORSKOG RAČUNA

(kratki kurs)

— SKRIPTA —

— Drugo dopunjeno i popravljeno izdanje —

Kragujevac, 1974.

Prof. Dr. Rašković
13. juna 1974.

PREDGOVOR

Dvadesetih godina ovog veka počeo je da se primenjuje i širi Tenzorski račun, nova matematička disciplina, prvo u Teoriji relativiteta, a zatim i u svima oblastima Teorijske fizike i Diferencijalna geometrije. On je našao veliku primenu u Mehanici neprekidnih sredina, pa ga danas koriste mnogi Inženjeri u oblasti Teorije elastičnosti i plastičnosti, odnosno u Analitičkoj mehanici. Zbog svega toga on se danas uvodi u kurseve trećeg stepena studija kao opšta matematičko-tehnička disciplina.

Ove skripte predstavljaju kratki kurs iz ovog računa i izradjena su prema Planu i programu nastave na trećem stepenu studija na Mašinskim fakultetima u Kragujevcu, Nišu, Sarajevu i Mostaru. Cilj je skriptara da slušački dobiju osnove iz ove oblasti i udju u metode tenzorskog računa, kako bi ga primenili u danas modernim tehničko-teorijskim disciplinama. S obzirom na to, izneti su samo osnovi u anem obimu koji je, prema mojem mišljenju, dovoljan mašinskom inženjeru, da bi mogao dalje čitati, sado već obimau literaturu iz ove oblasti u svetu pa i kod nas. Da se ne bi izgubila važnost ovog računa izbegnuli su strogi matematički dokazi, teoreme i leme, a tekst je praćen i primerima iz mehanike i teorije elastičnosti. Na kraju knjige dodati su zadaci koji su potpuno rešeni, u cilju da dopune teorijska izlaganja.

Zahvaljujući Komisiji za treći stepen studija Mašinskog fakulteta u Kragujevcu, ovo drugo izdanje je popravljeno i prošireno.

Dipl. Ing. Milovan Šarenac, student magistarskih studija na Mašinskom fakultetu u Kragujevcu, izradio je brzi i lako razumljivo crteže i tekst koji se nije mogao kućati na pisaočoj mašini, pa mu se srdačno zahvaljujem.

Kragujevac, 13. juna 1974. god.

D. R.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} = \frac{\partial^2 r}{\partial y^i \partial z^i} + \frac{\partial}{\partial z^i} \left(\frac{\partial r}{\partial z^i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} \quad (90)$$

pa se indeks ispod crte pri diferencijalima smatra konstantnim. Izvod skalarnih proizvoda osnovnih vektora je:

$$\frac{\partial}{\partial z^i} (\mathcal{L} \mathcal{L}) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} \mathcal{L} \right) + \left(\mathcal{L} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} + \frac{\partial}{\partial z^i} (\mathcal{L} \mathcal{L}) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} \mathcal{L} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i}$$

$$\frac{\partial}{\partial z^i} (\mathcal{L} \mathcal{L}) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} \mathcal{L} \right) + \left(\mathcal{L} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i}$$

Kada se prve dve relacije sabere i važno odzvana od njih, onda, u obzir uzavav permutacionu simetriju izvoda osnovnih vektora (90), dobija se izraz

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} \mathcal{L} \right) = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial z^i \partial z^i} + \frac{\partial r}{\partial z^i} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} \right] = \Gamma_{ij,k} \quad (91)$$

koji se zove Christoffel-ov simbol prve vrste III oznaka Christoffel-ove zapadne. Ova] je simbol simetričan u odnosu na leve indekse, pa je

$$[\Gamma_{ij,k}] = [\Gamma_{ji,k}] = \Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k} \quad (92)$$

Oznaka $\Gamma_{ij,k}$ potihva od Weyl-a.

Christoffel-ov simbol druge vrste III velika Christoffel-ova zapadne je oblika

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} = \frac{\partial^2 r}{\partial z^i \partial z^i} = \left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} \mathcal{L} = \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} \mathcal{L} = \Gamma_{ij}^k \mathcal{L} \quad (93)$$

pa se množenjem osnovnih vektora \mathcal{L} dobija

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} \mathcal{L} \right) = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial z^i \partial z^i} + \frac{\partial r}{\partial z^i} \right) = [\Gamma_{ij}^k] = \mathcal{L} \left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} = \mathcal{L} \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k \mathcal{L}$$

Množenjem sa \mathcal{L}^i , zbog toga sto je $\mathcal{L}^i \mathcal{L}^i = 1$, dobija se

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} = \Gamma_{ij}^k = \mathcal{L}^k [\mathcal{L}^i \mathcal{L}^j] = \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} = \Gamma_{jk}^i = \mathcal{L}^i \mathcal{L}^j \Gamma_{jk}^i \quad (94)$$

pa je simetričan u odnosu na desne indekse.

b) Srednji koordinatni sistem

\mathcal{L}^i	\mathcal{L}^j	\mathcal{L}^k	\mathcal{L}^l	
\mathcal{L}^1	\mathcal{L}^2	\mathcal{L}^3	\mathcal{L}^4	$[\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2] = [\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2] = [\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2] = r \cos^2 \psi$ $[\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^3] = [\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^3] = -[\mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3] = -r$ $[\mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3] = -[\mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3] = -[\mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3] = \frac{1}{2} r \sin 2\psi$
$d\mathcal{L}^1$	$d\mathcal{L}^2$	$d\mathcal{L}^3$	$d\mathcal{L}^4$	$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = r \cos^2 \psi; \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right\} = -r$ $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} r$ $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} r; \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = r \sin 2\psi$
$d^2 \mathcal{L}^i$	$d^2 \mathcal{L}^j$	$(r \cos \psi) d\psi$	$r d\psi$	$\text{grad } \mathcal{L}^i = \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial x^j} \mathcal{L}^j = \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi} \mathcal{L}^j + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi} \mathcal{L}^j$
A_i	i	$(r \cos \psi)^2$	r^2	$\text{div } \mathcal{L} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (r \cos \psi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (r \cos \psi)$ $= \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial (r \cos \psi)}{\partial \psi}$
g_{ij}	i	$(r \cos \psi)^2$	r^2	$\mathcal{L} = (u, v, w)$
g^{ij}	$r^2 \cos^2 \psi$	$r^2 = 1/r^2$		$\text{div } \mathcal{L} = \mathcal{L}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial x^i} + \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi}$
V^i	\mathcal{L}^i	$(r \cos \psi)^2 \mathcal{L}^i$	$r^2 \mathcal{L}^i$	$\mathcal{L} = r \cos \psi \left[\frac{\partial (u, v, w)}{\partial \psi} - \frac{\partial u}{\partial \psi} \right]$
V_i	\mathcal{L}^i	$(r \cos \psi)^2 \mathcal{L}^i$	$r^2 \mathcal{L}^i$	$R_{ij} = \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial (u, v, w)}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (u, v, w)}{\partial \psi}$
V_{ij}	\mathcal{L}^i	$(r \cos \psi)^2 \mathcal{L}^i$	$r^2 \mathcal{L}^i$	$R_{ij} = \frac{1}{r} \frac{\partial (u, v, w)}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (u, v, w)}{\partial \psi}$
$\mathcal{L}^i \mathcal{L}^j$	\mathcal{L}^i	$(r \cos \psi)^2 \mathcal{L}^i$	$r^2 \mathcal{L}^i$	$\Delta \mathcal{L} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (r \cos^2 \psi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi} - \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (r \cos^2 \psi) - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi}$ $= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (r \cos^2 \psi) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi} - \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (r \cos^2 \psi) - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi}$ $= \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi}$
$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \mathcal{L}^j}$	\mathcal{L}^i	$(r \cos \psi)^2 \mathcal{L}^i$	$r^2 \mathcal{L}^i$	$\text{rot } \mathcal{L} = \mathcal{L}^i \times \mathcal{L}^j = \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial (u, v, w)}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (u, v, w)}{\partial \psi}$
$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \mathcal{L}^j}$	\mathcal{L}^i	$(r \cos \psi)^2 \mathcal{L}^i$	$r^2 \mathcal{L}^i$	$\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi}$
\mathcal{L}^i	\mathcal{L}^j	$(r \cos \psi)^2 \mathcal{L}^i$	$r^2 \mathcal{L}^i$	$\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi}$
\mathcal{L}^i	\mathcal{L}^j	$(r \cos \psi)^2 \mathcal{L}^i$	$r^2 \mathcal{L}^i$	$\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \psi}$

1. Dati su vektori \mathcal{L}^i daki proizvod svih

$$10) \{b\} = \{2, 14\} \left\{ \frac{1}{11} \right\} = 2$$

2. Kako se menjaju sa kos simetri ?

$$10) \{b\} = \{b\} \{a\}$$

3. Pomoću \mathcal{L} -simbola

$$c = -[a \ b] = -a^i b^j$$

$$c_i = -\epsilon_{123} a^2 b^3 + \dots$$

4. Pomoću \mathcal{L} -simbola

$$V = \mathcal{L}^i \left[\frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial x^j} \right] = a$$

$$+ \epsilon^{213} a_2 b_3 + \dots$$

$$= a_2 b_3 c_1 + a_3 b_2 c_2 - \dots$$

5. Pokazati da su vel

$$\mathcal{L}^i \left[\frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial x^j} \right] = a^{jk}$$

6. Pokazati da je

$$\mathcal{L}^i \mathcal{L}^j \mathcal{L}^k = \mathcal{L}^i \mathcal{L}^j \mathcal{L}^k$$

$$1-k \text{ dobija } 2d^{jk}$$

7. Izračunati i napisati

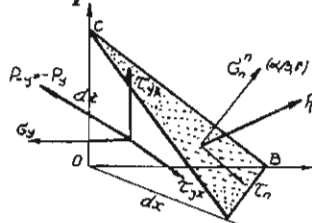
30. a) Polarno-cilindrični koordinatni sistem -

q^i	r	φ	z	$[1, 2] = [2, 1] - [2, 1] = r$
\dot{q}^i	\dot{r}	$\dot{\varphi}$	\dot{z}	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{r} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = -r$
\ddot{q}^i	\ddot{r}	$\ddot{\varphi}$	\ddot{z}	
$ds_{(t)}$	dr	$r d\varphi$	dz	$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r} ; \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} ; \frac{\partial}{\partial z} \right)$
A_i	1	r	1	$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$
g_{ii}	1	r^2	1	$\text{div } \mathbf{u} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial [r u_r]}{\partial r} + \frac{\partial [u_\varphi]}{\partial \varphi} + \frac{\partial [r u_z]}{\partial z} \right]$
g^{ii}	1	$1/r^2$	1	$\mathbf{j} = u \mathbf{e}_r + v \mathbf{e}_\varphi + w \mathbf{k}$
$v^i = \dot{q}^i$	\dot{r}	$\dot{\varphi}$	\dot{z}	$\text{div } \mathbf{j} = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} + c_v$
$V_i = A_i \dot{q}^i$	\dot{r}	$r^2 \dot{\varphi}$	\dot{z}	
$\psi_i = A_i \dot{q}^i$	\dot{r}	$r \dot{\varphi}$	\dot{z}	$\mathbf{R} = \text{rot } \mathbf{u}$
ds^2	$(dr)^2 + (r \dot{\varphi})^2 + (dz)^2$			$R_{(1)} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial u_{(2)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial [u_{(1)}]}{\partial z} \right\};$
v^2	$\dot{r}^2 + (r \dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2$			$R_{(2)} = \left\{ \frac{\partial u_{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial u_{(2)}}{\partial r} \right\};$
$\frac{\partial v^2}{\partial \dot{r}^2}$	2\dot{r}	$2r^2 \dot{\varphi}$	$2\dot{z}$	$R_{(3)} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial [r u_{(1)}]}{\partial r} - \frac{\partial u_{(2)}}{\partial \varphi} \right\};$
$\frac{\partial v^2}{\partial \dot{\varphi}^2}$	$2r \dot{\varphi}^2$	0	0	
$\frac{\partial v^2}{\partial \dot{z}^2}$	2\dot{z}	0	0	
$q_{(1)}$	$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$	$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi})$	\ddot{z}	$\Delta \phi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[r \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] \right\}$
$q^{(1)}$	$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$	$\frac{1}{r^3} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi})$	\ddot{z}	$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}$
$q_{(2)}$	$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$	$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi})$	\ddot{z}	
t_i	r_0	c_0	K	$\text{rot } \mathbf{j}; \mathbf{j} = (u, v, w)$
$ G = g$	r^2	$g^1 = 1/g = 1/r^2$		$\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial z}; \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}; \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$

(139)

(140)

da je iz tela izdvojen elementarni tetraedar (piramida) ivica $dx, dy, dz,$



(slika 4.), onda je totalni na-
pon za ravan ABC blisku takvoj
ravni kroz tačku O određen sa
 $P_{(n)} = dF/dA$. Pošto je povr-
šinski element dA :
 $dA n = dA_x i + dA_y j + dA_z k,$
 $n = \alpha i + \beta j + \gamma k$
i po konvenciji su $P_{(x)} = -P_{(x)}$;
..., to je ravnotežni uslov:

Slika 4.

$$P_{(n)} dA + P_{(x)} dA_x + P_{(y)} dA_y + P_{(z)} dA_z = 0$$

$$P_{(n)} = P_{(x)} \alpha + P_{(y)} \beta + P_{(z)} \gamma$$

i može se napisati u matricnom obliku*

$$\{P_{(n)}\} = N \{n\}; \begin{Bmatrix} P_{nx} \\ P_{ny} \\ P_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{xz} \gamma \\ \tau_{yx} \alpha + \sigma_y \beta + \tau_{yz} \gamma \\ \tau_{zx} \alpha + \tau_{zy} \beta + \sigma_z \gamma \end{Bmatrix} \quad (60)$$

gde su $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ normalni naponi a $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ tangencijalni naponi. Ortogonalni tenzor N je tenzor napona napregnutog tela. Može se pokazati da je on simetričan tenzor. Za dve ravni sa normalama n_1 i n_2 biće

$\{P_1\} = N \{n_1\}$ i $\{P_2\} = N \{n_2\}$. Ako se prva relacija pomnoži skalarno sa (n_2) a druga skalarno sa (n_1) onda sledi $(n_2) \{P_1\} = (n_1) \{P_2\}$. Ova relacija predstavlja osnovno pravilo o naponima. Tako je $(j) \{P_{(x)}\} = (i) \{P_{(y)}\}; \tau_{xy} = \tau_{yx}$. pa su tangencijalni naponi konjugovani, te je tenzor zaista simetričan, jer vođe i druge dve relacije $\tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}$

Relacija (56) pokazuje da se pomoću tenzora drugog reda T vektoru U koordinira drugi vektor V , pa afinor T igra ulogu linearnog operatora, jer je

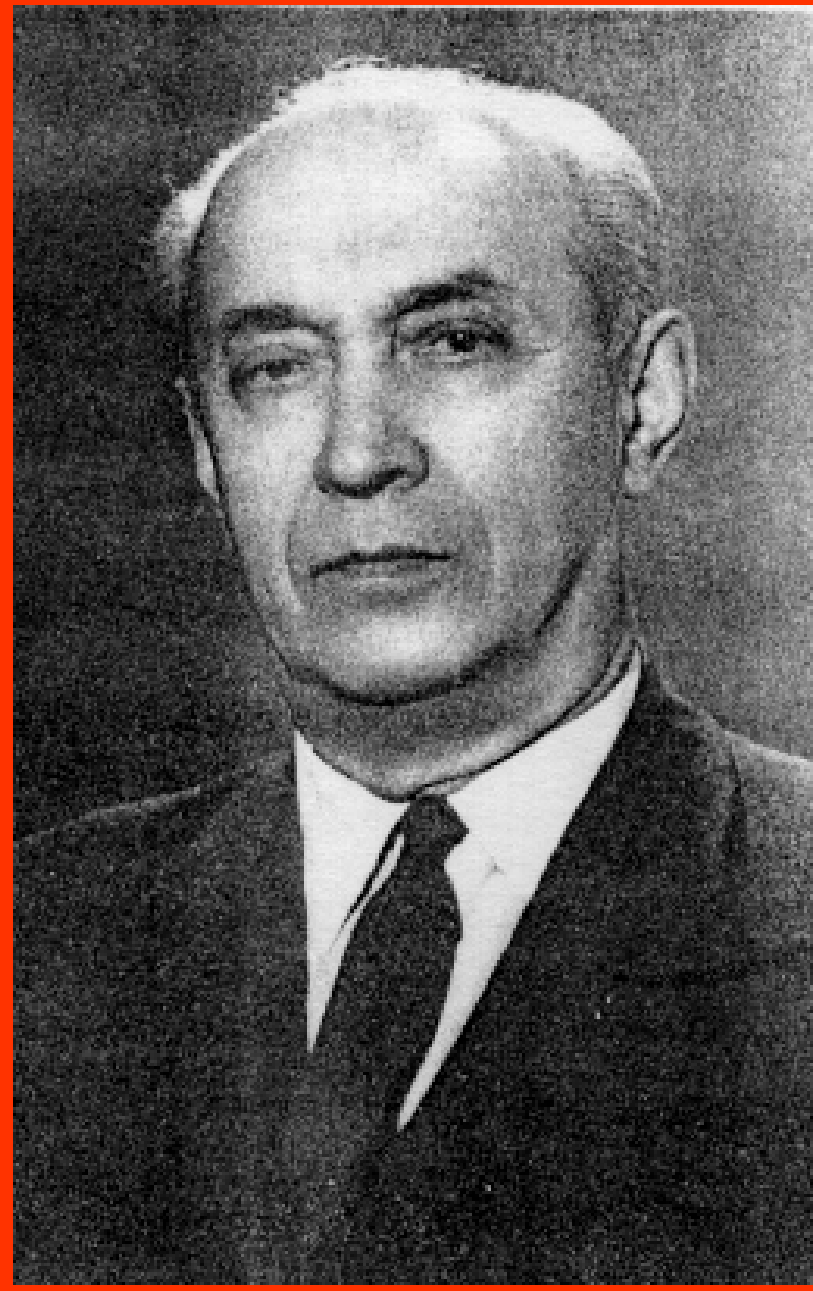
$$\{V\} = T \{U\}; T(u+v) = Tu + Tv; T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda \{V\}, \quad (61)$$

gde je λ neki skalar. Neka je T simetrični afinor $T_{ik} = T_{ki} = T_{(ik)}$ a U neki pravac u (E_3) prostoru, onda se pomoću (61) njemu koordinira drugi pravac V . Pravci koji pri ovoj transformaciji ostaju očuvani (p) zovu se glavni pravci,

*) L.A. Cauchy, 1882.

30. a) Polarno-ortofidlički koordinatni sistem

\hat{e}_i	r	φ	z	
\hat{e}_1	\hat{r}	$\hat{\varphi}$	\hat{z}	$[e_1, e_2] = [a_1, a_2] = -[a_2, a_1] = r$
\hat{e}_2	\hat{r}	$\hat{\varphi}$	\hat{z}	$[e_2, e_1] = [a_2, a_1] = \frac{1}{r} \cdot [z a_1] = -r$
$d^2 s_1$	dr	$r d\varphi$	dz	$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right)$
A_1	i	r	i	$grad \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{z}$
B_1	i	r^2	i	$div F = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{\partial(F_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(r F_z)}{\partial z} \right)$
g^{11}	i	$1/r^2$	i	$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{r} \nabla \cdot \nabla r = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \Delta_r$
$V \hat{e}_1$	\hat{r}	$\hat{\varphi}$	\hat{z}	
$V_1 = \hat{e}_1$	\hat{r}	$r \hat{\varphi}$	\hat{z}	
$V_2 = \hat{e}_2$	\hat{r}	$r \hat{\varphi}$	\hat{z}	$R = rot U$
div^2	$(div)^2 = (r^2)^2 = (dr)^2$			$R_r = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} \right) \right)$
v^2	$r^2 = (r\hat{\varphi})^2 = z^2$			$R_\varphi = \left(\frac{\partial U_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} \right)$
$\frac{\partial v^2}{\partial t^2}$	$z \hat{r}$	$z r^2 \hat{\varphi}$	$z \hat{z}$	$R_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r U_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} \right)$
$\frac{\partial v^2}{\partial t^2}$	$z = \hat{\varphi}^2$	z	z	
u_{11}	$r = r^2$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{\varphi})$	\hat{z}	$\Delta \phi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)$
u^2	$r = r^2$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{\varphi})$	\hat{z}	$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$
u_1	$r = r^2$	$\frac{\partial}{\partial r} (r \hat{\varphi})$	\hat{z}	
e_1	r	r	K	$rot J, J = (v, v, v)$
$[e_1]_{23}$	r^2	$r^2 \hat{\varphi} / r^2$		$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} \right)$



Academician
TATOMIR
P.
ANDJELIĆ
(1903 - 1993)

**Head of Mechanics Department
at the Institute of Mathematics
of the Serbian Academy of
Sciences and Arts**



Academician
TATOMIR
P.
ANDJELIĆ
(1903 - 1993)

**Head of Mechanics Department
at the Institute of Mathematics
of the Serbian Academy of
Sciences and Arts**

Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs

Herausgegeben von
R. Sauer I. Szabó

Unter Mitwirkung von
H. Neuber · W. Nürnberg · K. Föschl
E. Truckenbrodt · W. Zander

Teil III

Verfaßt von
T. P. Angelitch · G. Aumann · F. L. Bauer
R. Bulirsch · H. P. Künzi · H. Rutishauser
K. Samelson · R. Sauer · J. Stoer

Mit 101 Abbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1968

*Мррр Р. Каматуба
у зрак нове тиражи
Т. П. Анг*

Кортежные Ранге,

и не равно не

*Массу Бон гла
зага нави Ангелитч
за суро мору.*

*Кортеже, нома др
актибриче у Мати. маци.
За мени Јоган Бон
випраци о Рубоануру
Керпачу*

*Мана Бон,
Брзак*



II. 11 Punkt-Raum-Koordinatensystem: Achsenkoordinatensystem 167

II. Tensorkalkül nebst Anwendungen

Von Todor P. Angelitch, Beograd

Tensoralgebra

§ 1. Punkt-Raum-Koordinatensystem. Koordinatentransformation

Ein Wertesystem (x^1, x^2, \dots, x^N) der N Veränderlichen x^1, x^2, \dots, x^N läßt sich als ein Punkt im N -dimensionalen Raum E_N deuten. Man nennt das N-tupel von Zahlen x^1, x^2, \dots, x^N die Koordinaten dieses Punktes bezogen auf das Koordinatensystem (x^1, x^2, \dots, x^N) . Durchlaufen diese Veränderlichen alle möglichen reellen Werte, so bildet die auf diese Weise definierte Menge von Punkten einen Raum E_N , der daher auch *reeller Punkt-raum* genannt wird.

Koordinatentransformation nennt man unter dem Räume E_N die geometrische N -dimensionale Raum E_N eine ungeschnittene Stellung ein. Wie bekannt, werden zwei *unterschiedliche* Punkte x^1, x^2, \dots, x^N unterschiedlichen Bewegungspunkten mittels unterschieden Koordinatensysteme bestimmt. Man verwendet dabei rechtwinklige oder schiefwinklige, geradlinige oder krummlinige Koordinaten, wie z. B. das kartesische oder eine der polaren (zylinderischen bzw. sphärischen) Systeme. In vielen Fällen jedoch erweisen sich bei der theoretischen Behandlung technischer und physikalischer Probleme Vorstellungen eines N -dimensionalen Raumes als sehr bequem, so daß wir hier auf die Entwicklung ihrer entsprechenden Begriffe und die Möglichkeit der geometrischen Deutung in allgemeinen Räumen nicht verzichten wollen.

Aussagen über gewisse quantitative bestimmbare Erscheinungen in Natur und Technik werden fast immer als Aussagen über eine Menge von (mathematischen, mechanischen, physikalischen u. dgl.) veränderlichen Größen:

$$(1.1) \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}(x^1, x^2, \dots, x^N)$$

formuliert. In vielen Fällen zeigt sich, daß die Einführung eines anderen Satzes von Veränderlichen \mathcal{P} statt der x^i Vorteile (nicht für die mathematische Behandlung) bietet. Häufig im Spezialfälle die \mathcal{P} von den x^i hängen linear ab:

$$(1.2) \quad \mathcal{P} = \alpha_j x^j \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

Geometrie
1. Band
1919
1. Aufl.

Петр Матвеевич Огибалов
Татомир Анђелић

ицс 1.1.6. стални уџбеник

**МЕХАНИКА
ЉУСКИ И ПЛОЧА**

*Катини Ледрини
се жатам да кистав
животи. Касати се уџбеник
1.10.1975
доцент, Матвеев П. Огибалов*

Петр Матвеевич Огибалов
Татомир Анђелић

ицс 1.1.6. стални уџбеник

**МЕХАНИКА
ЉУСКИ И ПЛОЧА**

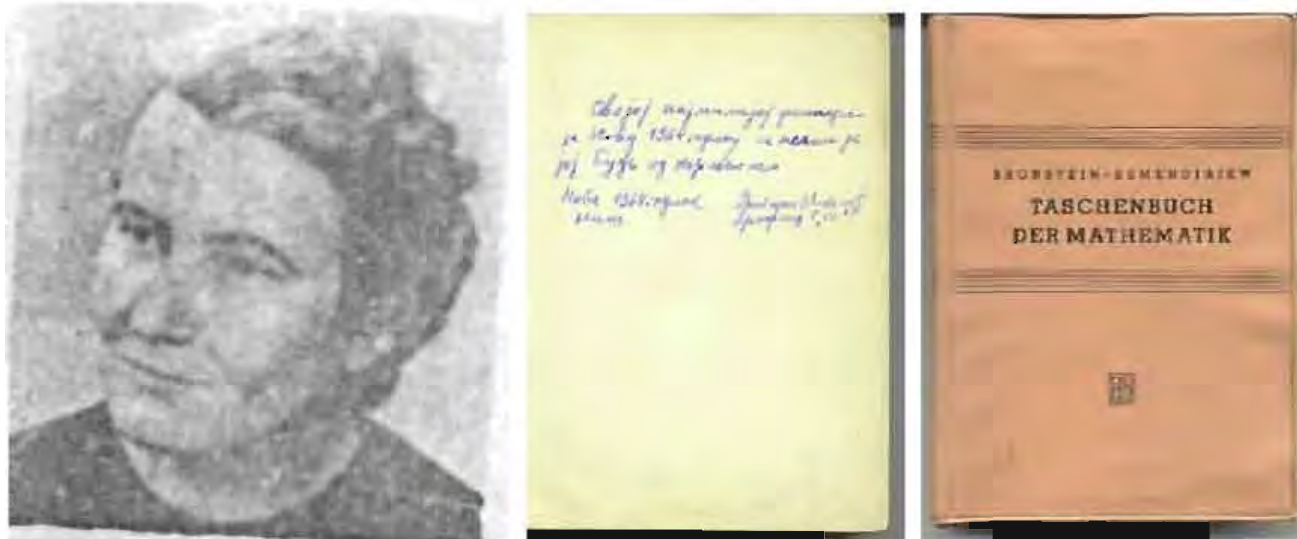
Prof. Draginja NIKOLIĆ (1909-1993)

Draginja (Jovana) Nikolić, profesor matematike u gimnaziji Stevan Sremac u Nišu

Rodjena 20. februara 1909. godine

Umrta 1 novembra 1993.

Radila u gimnazijama u Nišu od 1. septembra 1951 do 30. maja 1972 . Majka Katarina



Prof. Draginja NIKOLIĆ (1909-1993)