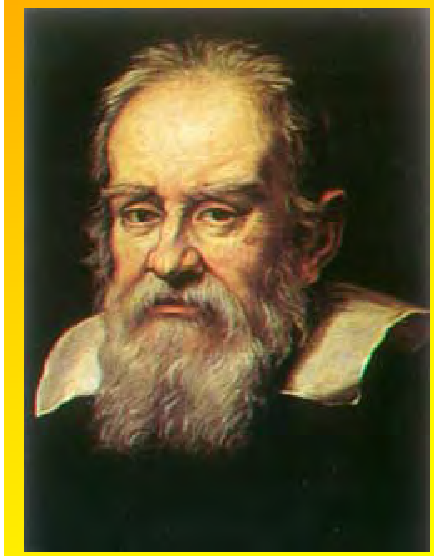
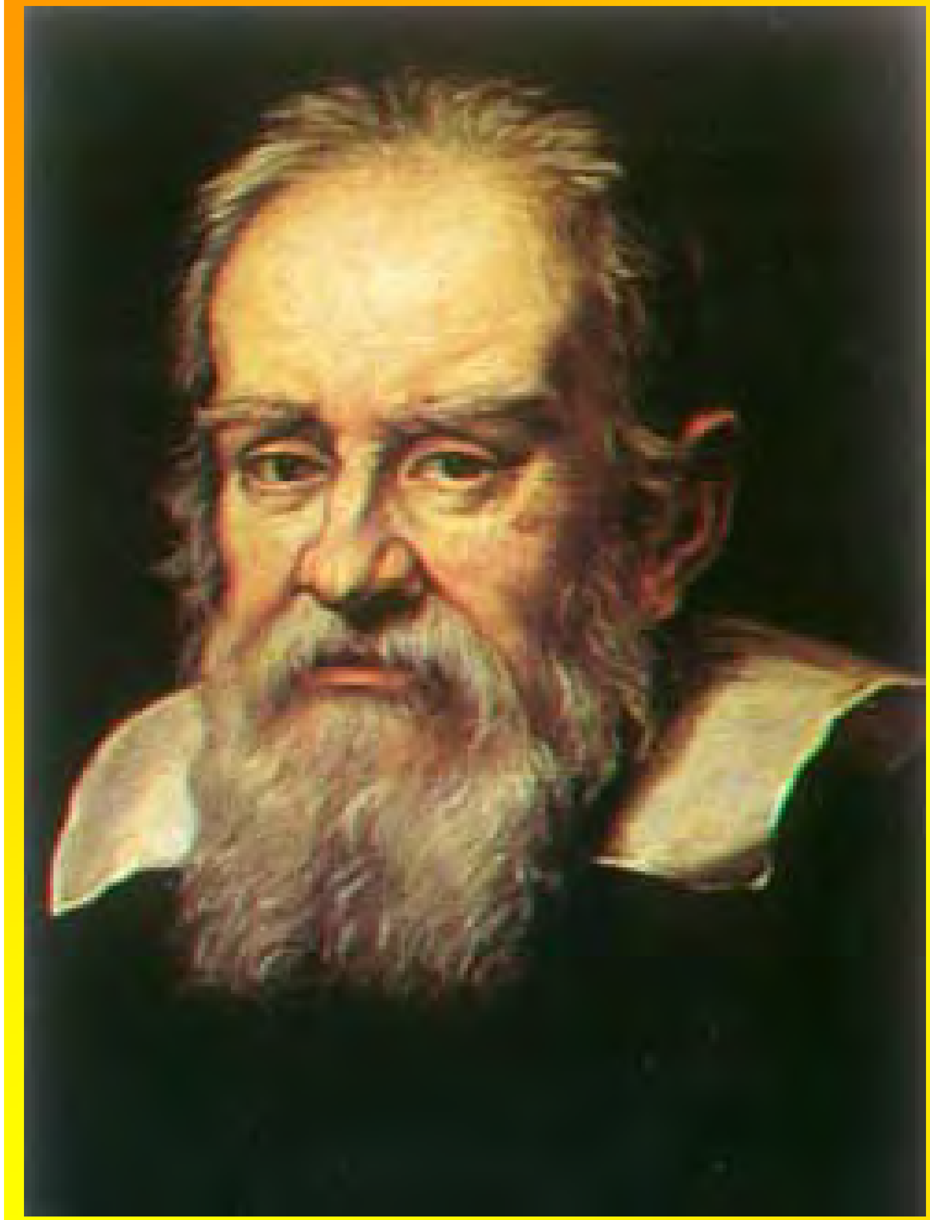
Beseda o Mehanici, mojim profesorima, kolegama i studentima



povodom 445 godina od rodjenja Galileo Galilei (15 February 1564 – 8 January 1642) i 130 godina od rodjenja Milutina Milankovića (1879 - 1958), posvećeno profesorima Draginji Nikolić, Danilu Raskoviću, Tatomiru Andjeliću i Yuriju Mitropoljskom.

Katica (Stevanović) HEDRIH

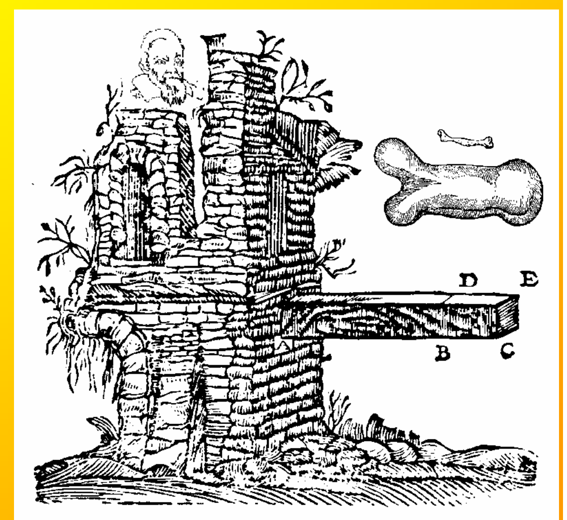


Galilo Galilei

Basic ideas of Fracture Mechanics

"Discorsi e dimostrazioni matematche intorno a due nuove scienze attenti alla mecanica e i movimenti locali"

1638 Galileo Galilei




УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
Thank You for Attention!
MILANKOVITCH ANNIVERSARY SYMPOSIUM 2004
Milutin
Milanković
Milanković Crater, Mars
Добродошли у Србију
Welcome to Serbia


KÖNIGLICH SERBISCHE AKADEMIE

KANON DER ERDBESTRAHLUNG

UND

SEINE ANWENDUNG

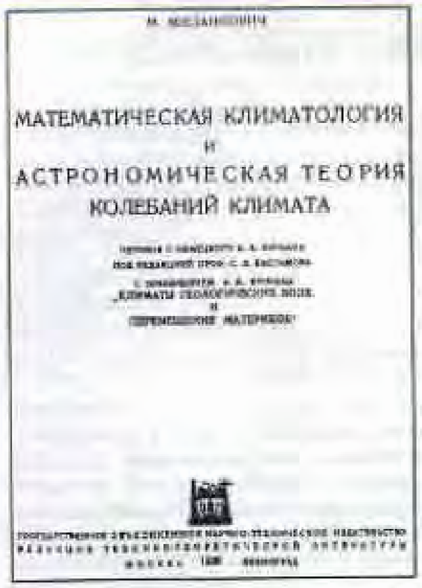
AUF

DAS EISZEITENPROBLEM

VON

M. MILANKOVITCH

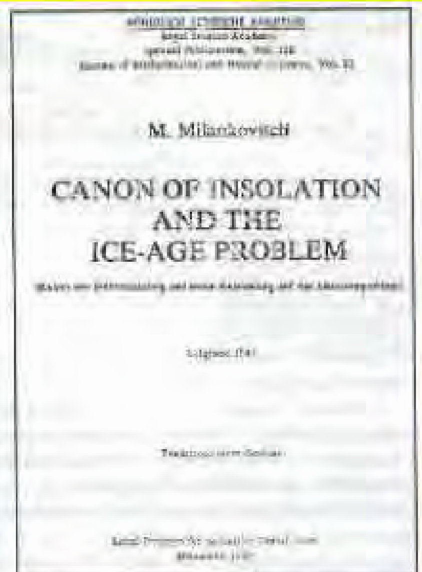
BELGRAD 1941


М. МИЛАНКОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КЛИМАТОЛОГИЯ

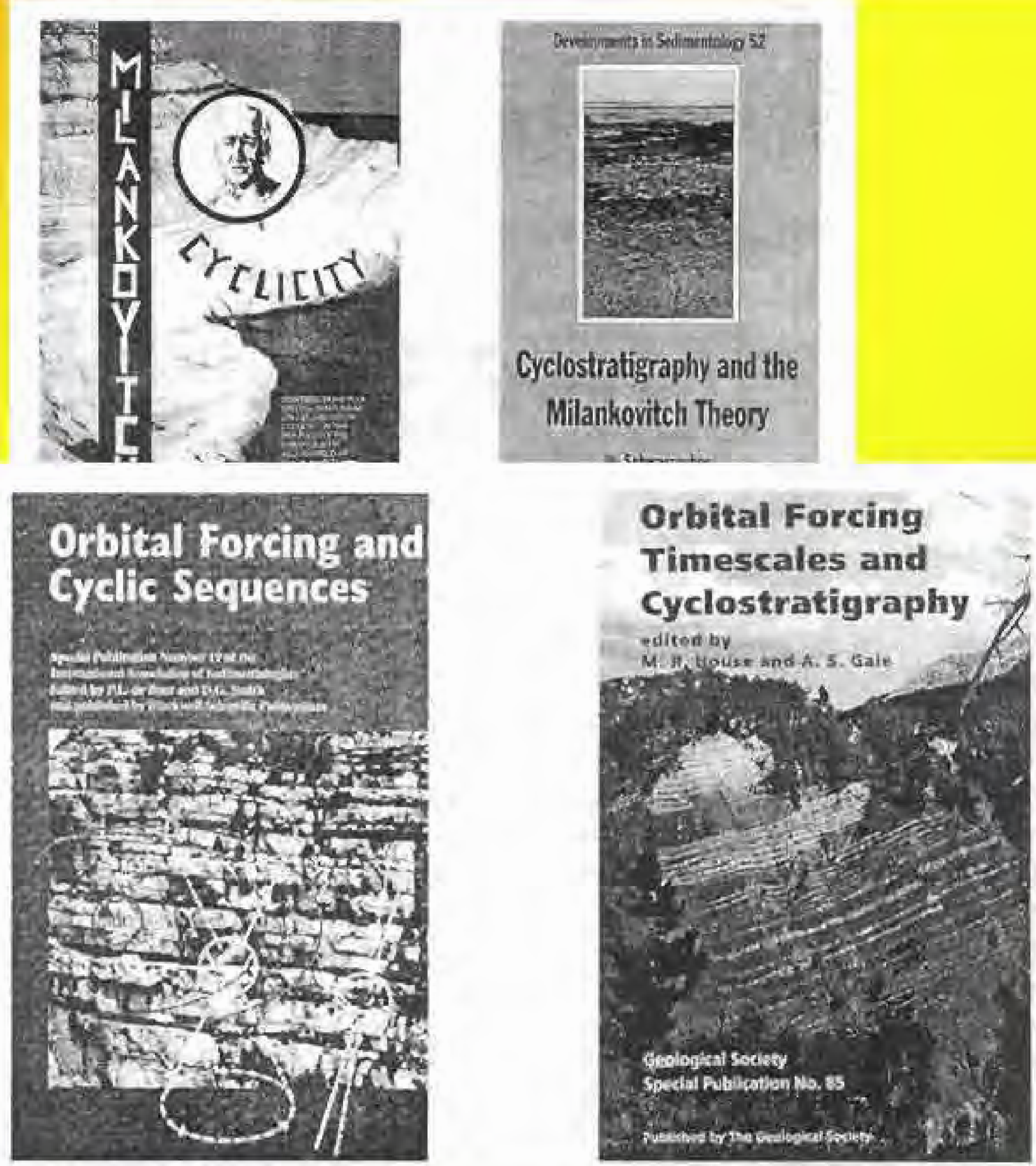
И

АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ КЛИМАТА

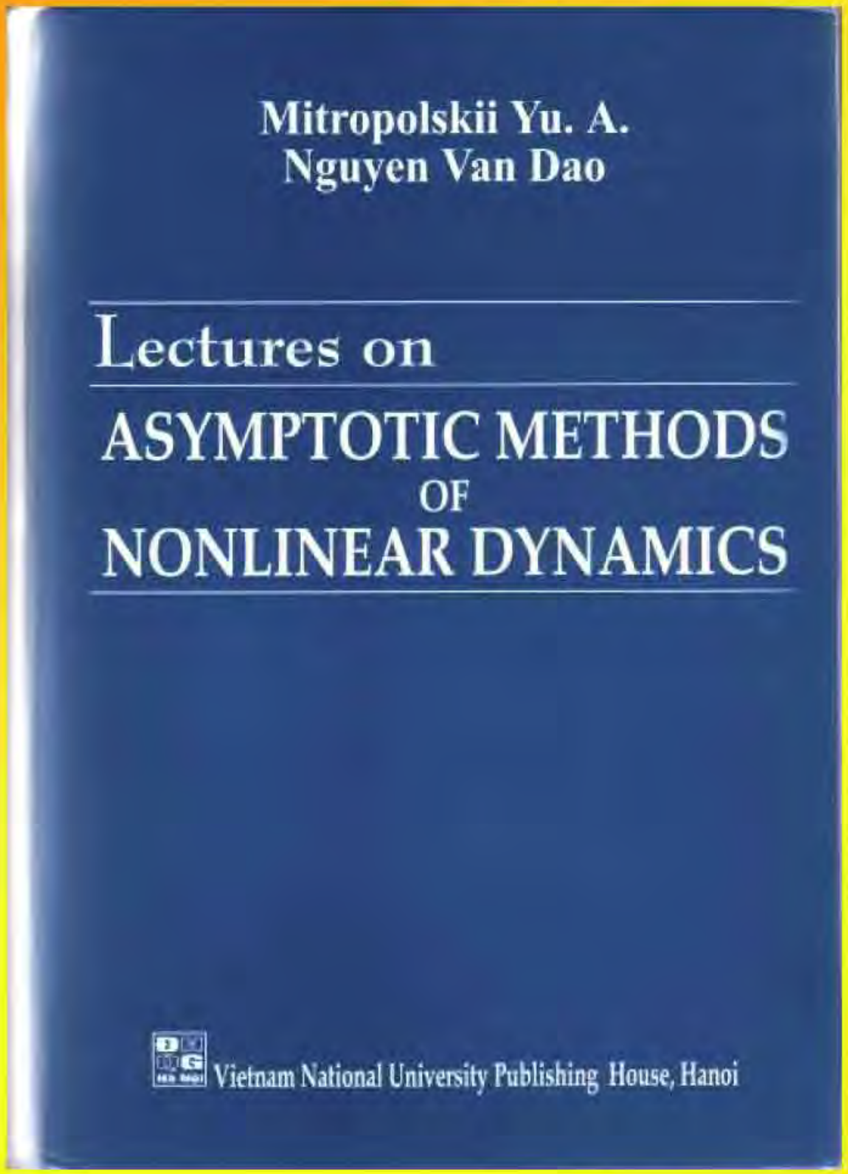

M. Milankovitch

CANON OF INSOLATION AND THE ICE-AGE PROBLEM

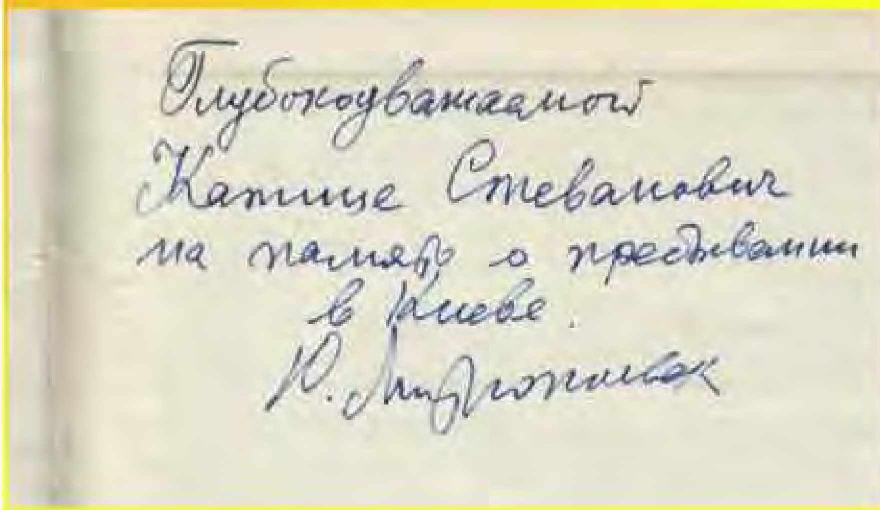
Слика 4 – Руски превод Математичке климатологије и астрономска теорија колебања климе и енглески превод Миланковићевог Канона осунчавања

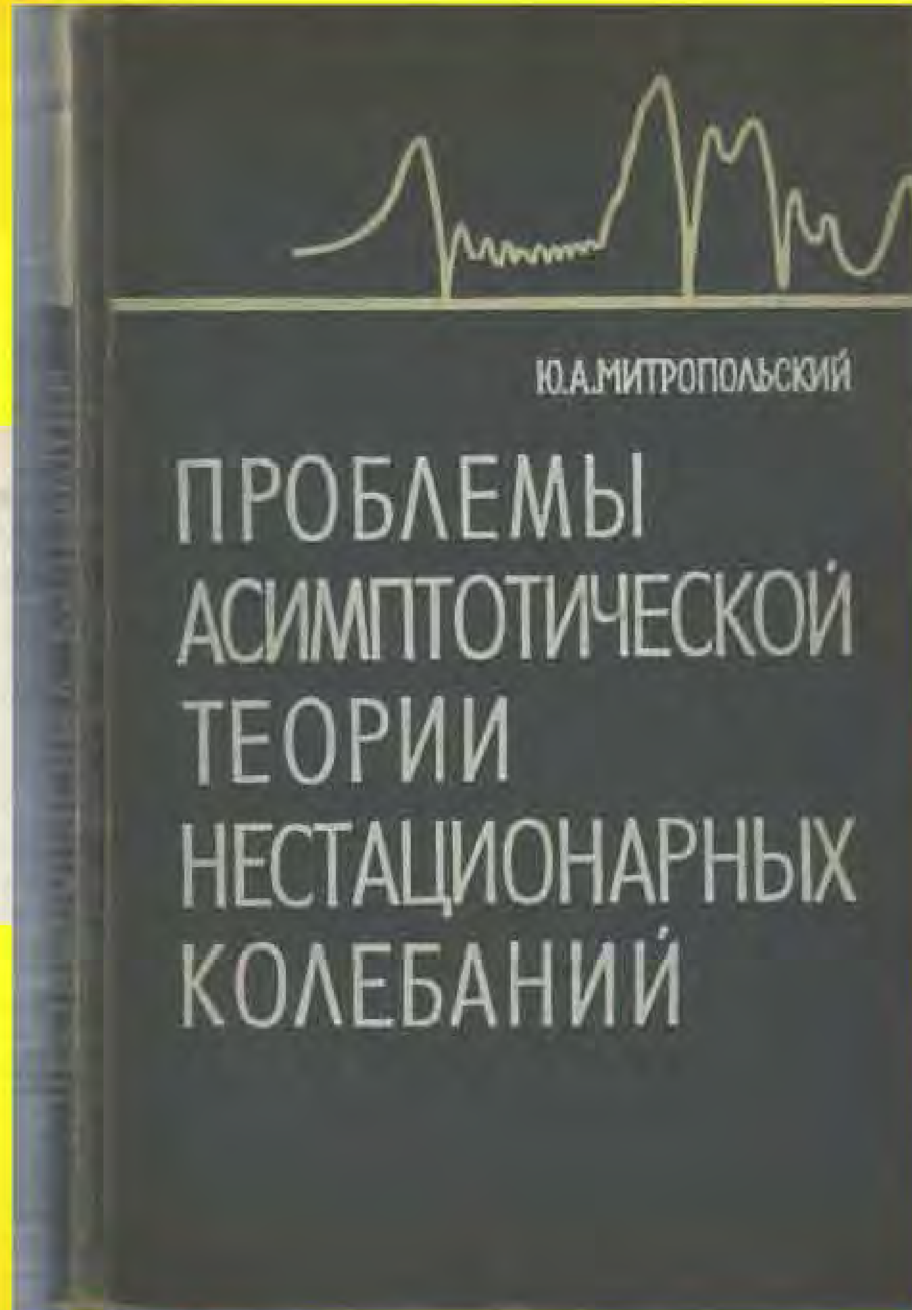


Слика 9 – Неке новије књиге засноване на Миланковићевом Канону



Дорогом Профессору Хедрик
(Стефанович) Кацице,
с наилучшими пожеланиями
больших успехов в науке.
С уважением
20/IX-2004 г. Ю. Митропольский


Глубокоуважаемой
Катице Стеванович
на память о пребывании
в Киеве.
Ю. Митропольский


Ю.А.МИТРОПОЛЬСКИЙ
ПРОБЛЕМЫ
АСИМПТОТИЧЕСКОЙ
ТЕОРИИ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ
КОЛЕБАНИЙ

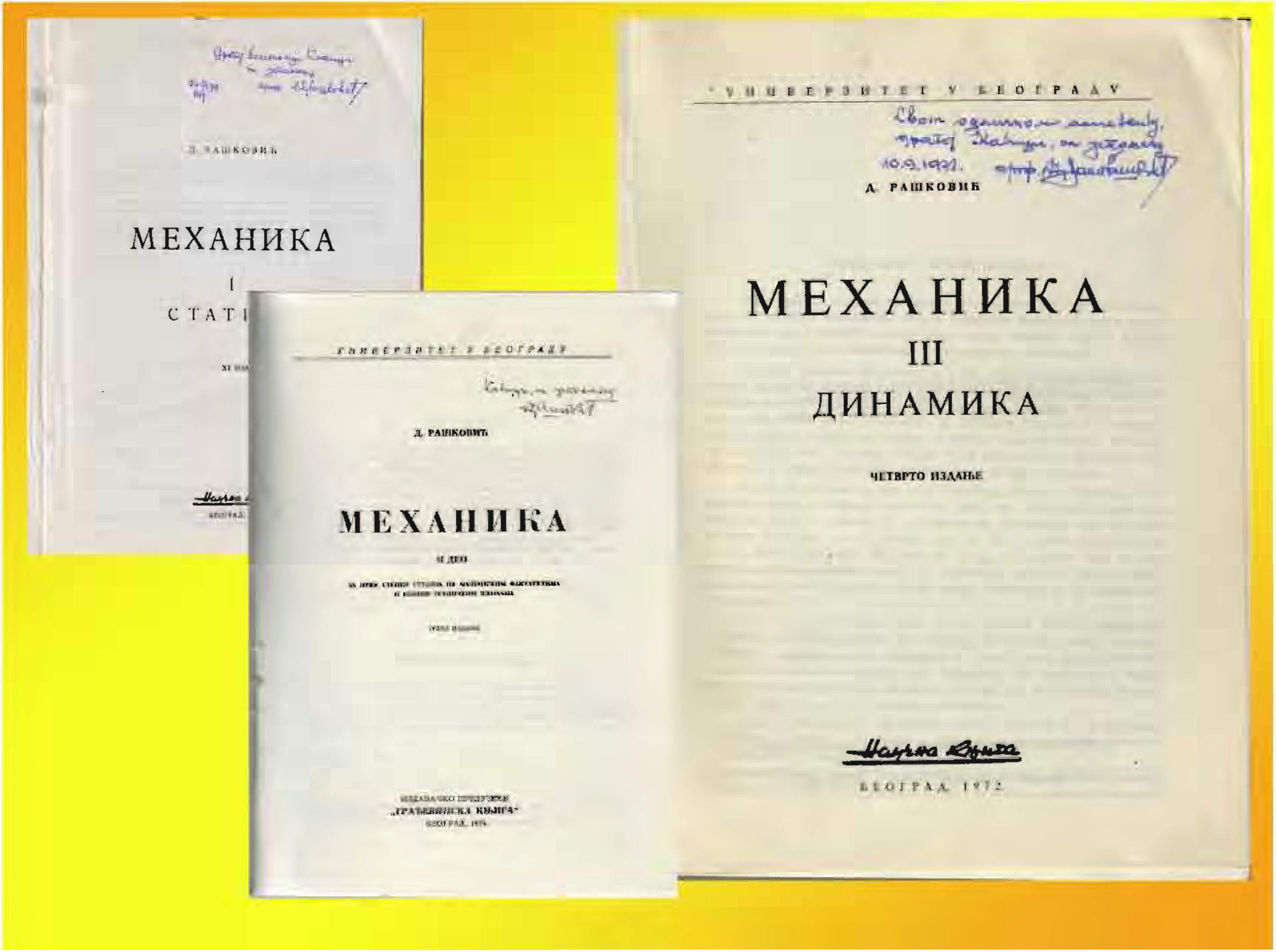
Profesor dr Ing. dipl. Math.

Danilo P. Rašković

(1910-1985)

Yugoslavia


УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ДАНИЛО РАШКОВИЋ
МЕХАНИКА I
СТАТИКА
Научна књига
Своме једином асистенту,
драгој Катици, за успомену
проф. Д. Рашковић
20.6.73.
Београд
UNIVERZITET U BEOGRADU
ZBIRKA ZADATAKA
IZ MEHANIKE
II
ZA DRUGI STEPEN STUDIJA NA TEHNIČKIM
FAKULTETIMA I VISOKIM TEHNIČKIM ŠKOLAMA
Д. РАШКОВИЋ
ЕХАНИКА
I
СТАТИКА
XI ИЗДАЊЕ
Научна књига
БЕОГРАД


Д. РАШКОВИЋ
МЕХАНИКА
I
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
Д. РАШКОВИЋ
МЕХАНИКА
II ДЕО
ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ
„ГРАЂЕВИНСКА КЊИГА"
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
Д. РАШКОВИЋ
МЕХАНИКА
III
ДИНАМИКА
ЧЕТВРТО ИЗДАЊЕ
Научна књига
БЕОГРАД 1972


Д. РАШКОВИЋ
ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА
X ИЗМЕЊЕНО ИЗДАЊЕ
UNIVERZITET U BEOGRADU
DANILO P. RAŠKOVIĆ
ZBIRKA ZADATAKA
IZ MEHANIKE
II
ZA DRUGI STEPEN STUDIJA NA TEHNIČKIM
FAKULTETIMA I VISOKIM TEHNIČKIM ŠKOLAMA
ZBIRKA ZADATAKA
IZ MEHANIKE
III
— TEORIJA OSCILACIJA —
Д. РАШКОВИЋ
ЗБИРКА ЗАДАТАКА
ИЗ
МАТЕРИЈАЛА
Научна књига
БЕОГРАД

MAŠINSKI FAKULTET
KRAGUJEVAC

Prof. Dr ing. dipl. math. Danilo Rašković

OSNOVI TENZORSKOG RAČUNA

(kratki kurs)

— S K R I P T A —

— Drugo dopunjeno i popravljeno izdanje —

Kragujevac, 1974.

Катедри за механику
Проф.

P R E D G O V O R

Dvadesetih godina ovog veka počeo je da se primenjuje i širi Tenzorski račun, nova matematička disciplina, prvo u Teoriji relativiteta, a zatim i u svima oblastima Teorijske fizike i Diferencijalne geometrije. On je našao veliku primenu u Mehanici neprekidnih sredina, pa ga danas koriste mnogi inženjeri u oblasti Teorije elastičnosti i plastičnosti, odnosno u Analitičkoj mehanici. Zbog svega toga on se danas uvodi u kurseve trećeg stepena studija kao opšta matematičko-tehnička disciplina.

Ove skripte predstavljaju kratki kurs iz ovog računa i izradjene su prema Planu i programu nastave na trećem stepenu studija na Mašinskim fakultetima u Kragujevcu, Nišu, Sarajevu i Mostaru. Cilj je skripata da slušaoci dobiju osnove iz ove oblasti i udju u metode tenzorskog računa, kako bi ga primenili u danas modernim tehničko-teorijskim disciplinama. S obzirom na to, izneti su samo osnovi u onom obimu koji je, prema mome mišljenju, dovoljan mašinskom inženjeru, da bi mogao dalje čitati, sada već obimnu literaturu iz ove oblasti u svetu pa i kod nas. Da se ne bi izgubila važnost ovog računa izbegnuti su strogi matematički dokazi, teoreme i leme, a tekst je propraćen i primerima iz mehanike i teorije elastičnosti. Na kraju knjige dodati su zadaci koji su potpuno rešeni, u cilju da dopune teorijska izlaganja.

Zahvaljujući Komisiji za treći stepen studija Mašinskog fakulteta u Kragujevcu, ovo drugo izdanje je popravljeno i prošireno.

Dipl. ing. Milovan Šarenac, student magistarskih studija na Mašinskom fakultetu u Kragujevcu, izradio je brižljivo crteže i tekst koji se nije mogao kucati na pisaćoj mašini, pa mu se srdačno zahvaljujem.

Kragujevac, 13. juna 1974. god.

D. R.

$$\frac{\partial g_j}{\partial q^k}=\frac{\partial^2 r}{\partial q^j\partial q^k}=\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{\partial r}{\partial q^k}\right)=\frac{\partial g_k}{\partial q^j}, \qquad (90)$$

gde se indeks ispod crte pri diferenciranju smatra donjim. Izvodi skalarnih proizvoda osnovnih vektora su:

$$\frac{\partial}{\partial q^k}(g_i g_j)=\left(\frac{\partial g_i}{\partial q^k}g_j\right)+\left(g_i\frac{\partial g_j}{\partial q^k}\right)=\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k};\quad \frac{\partial}{\partial q^i}(g_j g_k)=\left(\frac{\partial g_j}{\partial q^i}g_k\right)+\left(g_j\frac{\partial g_k}{\partial q^i}\right)=\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}$$

$$\frac{\partial}{\partial q^j}(g_k g_i)=\left(\frac{\partial g_k}{\partial q^j}g_i\right)+\left(g_k\frac{\partial g_i}{\partial q^j}\right)=\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j}$$

Kada se prva dva relacije saberu i treća oduzme od njih, onda, s obzirom na permutacionu osobinu izvoda osnovnih vektora (90), dobija se izraz

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial q^j}g_k\right)=\left(\frac{\partial^2 r}{\partial q^i\partial q^j}\cdot\frac{\partial r}{\partial q^k}\right)=\frac12\left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right]=[ij,k]=\Gamma_{ij,k} \qquad (91)$$

koji se zove Christoffel-ov simbol prve vrste ili mala Christoffel-ova zagrada. Ovaj je simbol simetričan u odnosu na leve indekse, pa je

$$[ij,k]=[ji,k]=\Gamma_{ij,k}=\Gamma_{ji,k}. \qquad (92)$$

Oznaka $\Gamma_{ij,k}$ potiču od Weyl-a.

Christoffel-ov simbol druge vrste ili velika Christoffel-ova zagrada je oblika

$$\frac{\partial g_j}{\partial q^k}=\frac{\partial^2 r}{\partial q^j\partial q^k}=\left\{{i\atop jk}\right\}g_i=\left\{{i\atop kj}\right\}g_i=\Gamma^i_{jk}g_i \qquad (93)$$

pa se množenjem osnovnim vektorom g_l dobija

$$\left(\frac{\partial g_j}{\partial q^k}\cdot g_l\right)=\left(\frac{\partial^2 r}{\partial q^j\partial q^k}\cdot\frac{\partial r}{\partial q^l}\right)=[jk,l]=g_{il}\left\{{i\atop jk}\right\}=g_{il}\Gamma^i_{jk}=\Gamma_{jk,l}.$$

Množenjem sa g^{il}, zbog toga što je $g^{il}g_{il}=1$, dobija se

$$\left\{{i\atop jk}\right\}=\Gamma^i_{jk}=g^{il}[jk,l]=\left\{{i\atop kj}\right\}=\Gamma^i_{kj}=\Gamma^i_{jk}=g^{il}\Gamma_{jk,l} \qquad (94)$$

pa je simetričan u odnosu na donje indekse.

b) Sferni koordinatni sistem

q^i	ρ	φ	ψ
e_i	ρ_0	c_0	ψ_0
dq^i	$d\rho$	$d\varphi$	$d\psi$
$\dot q^i$	$\dot\rho$	$\dot\varphi$	$\dot\psi$
$\ddot q^i$	$\ddot\rho$	$\ddot\varphi$	$\ddot\psi$
$ds_{(i)}$	$d\rho$	$(\rho\cos\psi)d\varphi$	$\rho d\psi$
A_i	1	$\rho\cos\psi$	ρ
g_{ii}	1	$(\rho\cos\psi)^2$	ρ^2
g^{ii}	1	$(\rho\cos\psi)^{-2}$	ρ^{-2}
$g=\lvert g_{ij}\rvert$	$\rho^4\cos^2\psi$;	$g^{-1}=1/g$	
v^i	$\dot\rho$	$\dot\varphi$	$\dot\psi$
v_i	$\dot\rho$	$(\rho\cos\psi)^2\dot\varphi$	$\rho^2\dot\psi$
$v_{(i)}$	$\dot\rho$	$(\rho\cos\psi)\dot\varphi$	$\rho\dot\psi$
v^2	$(d\rho)^2+(\rho\cos\psi\dot\varphi)^2+(\rho\dot\psi)^2$		
$\frac12\frac{\partial v^2}{\partial\dot q^i}$	$\dot\rho$	$\rho^2\cos^2\psi\dot\varphi$	$\rho^2\dot\psi$
$\frac12\frac{\partial v^2}{\partial q^i}$	$\rho(\dot\varphi^2\cos^2\psi+\dot\psi^2)$	0	$-\frac12\rho^2\dot\varphi^2\sin 2\psi$
$a_{(i)}$	$\ddot\rho-\rho(\dot\varphi^2\cos^2\psi+\dot\psi^2)$; $\frac{1}{\rho\cos\psi}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi\cos^2\psi)$; $\frac1\rho\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\psi)+\frac12\rho\dot\varphi^2\sin2\psi$		
a^i	$\ddot\rho-\rho(\dot\varphi^2\cos^2\psi+\dot\psi^2)$; $\frac{1}{(\rho\cos\psi)^2}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi\cos^2\psi)$; $\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\psi)+\frac12\dot\varphi^2\sin2\psi$		
a_i	$a_1=a^1$; $a_2=(\rho\cos\psi)^2a^2$; $a_3=\rho^2a^3$		

$[12,2]=[21,2]=-[22,1]=\rho\cos^2\psi$
$[13,3]=[31,3]=-[33,1]=\rho$
$[23,2]=[32,2]=-[22,3]=\frac12\rho^2\sin2\psi$
$\left\{{1\atop 22}\right\}=-\rho\cos^2\psi$; $\left\{{1\atop 33}\right\}=-\rho$,
$\left\{{2\atop 12}\right\}=\left\{{2\atop 21}\right\}=\left\{{3\atop 13}\right\}=\left\{{3\atop 31}\right\}=\frac1\rho$
$\left\{{2\atop 23}\right\}=\left\{{2\atop 32}\right\}=-\operatorname{tg}\psi$; $\left\{{3\atop 22}\right\}=\sin\psi\cos\psi$

$$\operatorname{grad}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\rho_0+\frac{1}{\rho\cos\psi}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}c_0+\frac1\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\psi_0$$

$$\operatorname{div}v=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2 v_{(1)})}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\cos\psi}\frac{\partial v_{(2)}}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho\cos\psi}\frac{\partial(v_{(3)}\cos\psi)}{\partial\psi}$$

$v=(u,v,w)$

$$\operatorname{div}v=2\frac{u}{\rho}+\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\cos\psi}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac1\rho\frac{\partial w}{\partial\psi}-\frac{w}{\rho}\operatorname{tg}\psi=C_0$$

$p=\operatorname{rot}u$

$$R_{(1)}=\frac{1}{\rho\cos\psi}\left\{\frac{\partial(v_{(3)}\cos\psi)}{\partial\varphi}-\frac{\partial v_{(2)}}{\partial\psi}\right\},$$
$$R_{(2)}=\frac{1}{\rho\cos\psi}\frac{\partial v_{(1)}}{\partial\psi}-\frac1\rho\frac{\partial(\rho v_{(3)})}{\partial\rho},$$
$$R_{(3)}=\frac1\rho\frac{\partial(\rho v_{(2)})}{\partial\rho}-\frac1\rho\frac{\partial v_{(1)}}{\partial\psi}$$

$$\Delta\Phi=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\cos^2\psi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho^2\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\psi\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\right)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2\cos^2\psi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\psi^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}-\frac{\operatorname{tg}\psi}{\rho^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}.$$

rot v ; $v=(u,v,w)$

$$\frac1\rho\frac{\partial v}{\partial\psi}-\frac{v}{\rho}\operatorname{tg}\psi-\frac{1}{\rho\cos\psi}\frac{\partial w}{\partial\varphi},$$
$$\frac{1}{\rho\cos\psi}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{v}{\rho}-\frac{\partial v}{\partial\rho},$$
$$\frac{w}{\rho}+\frac{\partial w}{\partial\rho}-\frac1\rho\frac{\partial u}{\partial\psi}$$

1. Dati su vektori
dati proizvod ovih

2. Kako se menjaju re
kao činioci ?

3. Pomoću e-simbola
$c=[a\,b]=$
$c_1=e_{123}a^2b^3+$

4. Pomoću e-simbola
$V=(\vec a[\vec b\,\vec c])=$
$+e^{213}a_2b_1c_3+$
$+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-$

5. Pokazati da su vek

6. Dokazati da je
iz /20/ sledi
bića
i-k dobija

7. Metrički i tenzor
trijedra.

sno V .

sa dt dobija se

(135)

v^i, (136)

v). (137)

$A_i V_{(i)}$

$\frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}_i}$, (138)

$_{(i)}=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{t}_i)$;

(139)

su:

a^k, (140)

30. a) <u>Polarno-cilindrički koordinatni sistem</u> –

q^i	r	φ	z
$\dot{q}^i$	$\dot{r}$	$\dot{\varphi}$	$\dot{z}$
$\ddot{q}^i$	$\ddot{r}$	$\ddot{\varphi}$	$\ddot{z}$
$ds_{(i)}$	dr	$r\,d\varphi$	dz
A_i	1	r	1
g_{ii}	1	r^2	1
g^{ii}	1	$1/r^2$	1
$v^i=\dot{q}^i$	$\dot{r}$	$\dot{\varphi}$	$\dot{z}$
$v_i=A_i^2 v^i$	$\dot{r}$	$r^2\dot{\varphi}$	$\dot{z}$
$v_{(i)}=A_i v^i$	$\dot{r}$	$r\dot{\varphi}$	$\dot{z}$
ds^2	$(dr)^2+(r\dot{\varphi})^2+(dz)^2$		
v^2	$\dot{r}^2+(r\dot{\varphi})^2+\dot{z}^2$		
$\frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}^i}$	$2\dot{r}$	$2r^2\dot{\varphi}$	$2\dot{z}$
$\frac{\partial v^2}{\partial q^i}$	$2r\dot{\varphi}^2$	0	0
$a_{(i)}$	$\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2$	$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$	$\ddot{z}$
a^i	$\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2$	$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$	$\ddot{z}$
a_i	$\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2$	$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$	$\ddot{z}$
$\boldsymbol{t}_i$	$\boldsymbol{r}_0$	$\boldsymbol{c}_0$	$\boldsymbol{k}$
$\lvert G\rvert=g$	r^2	$g^{-1}=1/g=1/r^2$	

$$[12,2]=[21,2]=-[22,1]=r$$

$$\left\{ {2 \atop 1\,2} \right\}=\left\{ {2 \atop 2\,1} \right\}=\frac{1}{r}\,;\quad \left\{ {1 \atop 2\,2} \right\}=-r$$

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial r}\,;\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\,;\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{grad}\phi=\nabla\phi=\frac{\partial \phi}{\partial r}\boldsymbol{r}_0+\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\boldsymbol{c}_0+\frac{\partial \phi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial[r v_{(r)}]}{\partial r}+\frac{\partial[v_{(\varphi)}]}{\partial \varphi}+\frac{\partial[r v_{(z)}]}{\partial z}\right\}$$

$$\boldsymbol{s}=u\boldsymbol{r}_0+v\boldsymbol{c}_0+w\boldsymbol{k}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{s}=\frac{u}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{\partial w}{\partial z}=\varepsilon_v$$

$$\boldsymbol{R}=\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$$

$$R_{(1)}=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial v_{(3)}}{\partial \varphi}-\frac{\partial r[v_{(2)}]}{\partial z}\right\};$$

$$R_{(2)}=\left\{\frac{\partial v_{(r)}}{\partial z}-\frac{\partial v_{(z)}}{\partial r}\right\};$$

$$R_{(3)}=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial[r v_{(2)}]}{\partial r}-\frac{\partial v_{(r)}}{\partial \varphi}\right\};$$

$$\Delta\phi=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[r\frac{\partial \phi}{\partial z}\right]\right\}$$

$$=\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{s}\,;\quad \boldsymbol{s}=(u,v,w)$$

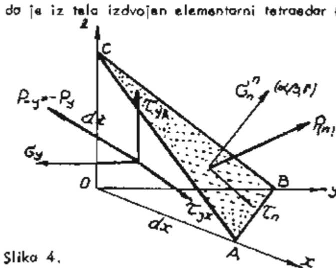
$$\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}-\frac{\partial v}{\partial z}\,;\ \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial r}\,;\ \frac{v}{r}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

da je iz tela izdvojen elementarni tetraedar (piramida) ivica dx, dy, dz, (slika 4.), onda je totalni napon za ravan ABC blisku takvoj ravni kroz tačku O odredjen sa $\mathbf{p}_{(n)} = dF/dA$. Pošto je površinski element dA:

$$dA\,\mathbf{n} = dA_x\mathbf{i} + dA_y\mathbf{j} + dA_z\mathbf{k},$$

$$\mathbf{n} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$$

i po konvenciji su $\mathbf{p}_{(-x)} = -\mathbf{p}_{(x)}$; ..., to je ravnotežni uslov:



Slika 4.

$$\mathbf{p}_{(n)}dA + \mathbf{p}_{(-x)}dA_x + \mathbf{p}_{(-y)}dA_y + \mathbf{p}_{(-z)}dA_z = 0$$

odnosno

$$\mathbf{p}_{(n)} = \mathbf{p}_{(x)}\alpha + \mathbf{p}_{(y)}\beta + \mathbf{p}_{(z)}\gamma$$

i može se napisati u matričnom obliku*)

$$\{P_{(n)}\} = \mathbf{N}\{n\} \;;\; \begin{Bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x\alpha + \tau_{xy}\beta + \tau_{xz}\gamma \\ \tau_{yx}\alpha + \sigma_y\beta + \tau_{yz}\gamma \\ \tau_{zx}\alpha + \tau_{zy}\beta + \sigma_z\gamma \end{Bmatrix} \quad (60)$$

gde su $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ normalni naponi a $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ tangencijalni naponi. Ortogonalni tenzor $\mathbf{N}$ je tenzor napona napregnutog tela. Može se pokazati da je on simetričnl tenzor. Za dve ravni sa normalama $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$ biće $\{P_1\} = \mathbf{N}\{n_1\}$ i $\{P_2\} = \mathbf{N}\{n_2\}$. Ako se prva relacija pomnoži skalarno sa (n_2) a drugo skalarno sa (n_1) onda sledi $(n_2)\{P_1\} = (n_1)\{P_2\}$. Ova relacija predstavlja osnovno pravilo o naponima. Tako je $(j)\{P_{(x)}\} = (i)\{P_{(y)}\};\ \tau_{xy} = \tau_{yx}$, pa su tangencijalni naponi konjugovani, te je tenzor zaista simetričan, jer važe i druge dve relacije $\tau_{xz} = \tau_{zx}\ ;\ \tau_{yz} = \tau_{zy}$

Relacija (56) pokazuje da se pomoću tenzora drugog reda $\mathbf{T}$ vektoru $\mathbf{U}$ koordinira drugi vektor $\mathbf{V}$, pa afinor $\mathbf{T}$ igra ulogu linearnog operatora, jer je

$$\{v\} = \mathbf{T}\{u\}\ ;\ \mathbf{T}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{T}\mathbf{v}\ ;\ \mathbf{T}\{\lambda u\} = \lambda\mathbf{T}\{u\} = \lambda\{v\}, \quad (61)$$

gde je λ neki skalar. Neka je $\mathbf{T}$ simetrični afinor ($t_{ik} = t_{ki} = t_{(ik)}$) a $\mathbf{U}$ neki pravac $u(E_3)$ prostoru, onda se pomoću (61) njemu koordinira drugi pravac $\mathbf{V}$. Pravci koji pri ovoj transformaciji ostaju očuvani (p) zovu se glavni pravci,

*) L.A. Cauchy, 1882.

(135)

(136)

(137)

(138)

(139)

(140)

30. a) Polarno-cilindrički koordinatni sistem –

q^i	r	φ	z
$\dot q^i$	$\dot r$	$\dot\varphi$	$\dot z$
$\ddot q^i$	$\ddot r$	$\ddot\varphi$	$\ddot z$
$ds_{(i)}$	dr	$r\,d\varphi$	dz
A_i	1	r	1
g_{ii}	1	r^2	1
g^{ii}	1	$1/r^2$	1
$v^i = \dot q^i$	$\dot r$	$\dot\varphi$	$\dot z$
$v_i = A_i^2 v^i$	$\dot r$	$r^2\dot\varphi$	$\dot z$
$v_{(i)} = A_i v^i$	$\dot r$	$r\dot\varphi$	$\dot z$
ds^2	$(dr)^2 + (r\,d\varphi)^2 + (dz)^2$		
v^2	$\dot r^2 + (r\dot\varphi)^2 + \dot z^2$		
$\frac{\partial v^2}{\partial \dot q^i}$	$2\dot r$	$2r^2\dot\varphi$	$2\dot z$
$\frac{\partial v^2}{\partial q^i}$	$2r\dot\varphi^2$	0	0
$a_{(i)}$	$\ddot r - r\dot\varphi^2$	$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi)$	$\ddot z$
a^i	$\ddot r - r\dot\varphi^2$	$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi)$	$\ddot z$
a_i	$\ddot r - r\dot\varphi^2$	$\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi)$	$\ddot z$
e_i	$\mathbf{r}_0$	$\mathbf{c}_0$	$\mathbf{k}$
$\lvert G\rvert = g$	r^2	$g^1 = 1/g = 1/r^2$	

$[12,2] = [21,2] = -[22,1] = r$

$\left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{ {1 \atop 22} \right\} = -r$

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi},\ \frac{\partial}{\partial z} \right)$

$\operatorname{grad}\Phi = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{r}_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{c}_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{k}$

$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{1}{r}\left\{ \frac{\partial[r v_{(1)}]}{\partial r} + \frac{\partial[v_{(2)}]}{\partial\varphi} + \frac{\partial[r v_{(3)}]}{\partial z} \right\}$

$\mathbf{v} = u\mathbf{r}_0 + v\mathbf{c}_0 + w\mathbf{k}$

$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_v$

$\mathbf{R} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$

$R_{(1)} = \frac{1}{r}\left\{ \frac{\partial v_{(3)}}{\partial\varphi} - \frac{\partial[r v_{(2)}]}{\partial z} \right\},$

$R_{(2)} = \left\{ \frac{\partial v_{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial v_{(3)}}{\partial r} \right\},$

$R_{(3)} = \frac{1}{r}\left\{ \frac{\partial[r v_{(2)}]}{\partial r} - \frac{\partial v_{(1)}}{\partial\varphi} \right\};$

$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[r\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right] \right\} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}$

$\operatorname{rot}\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = (u, v, w)$

$\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi} - \frac{\partial v}{\partial z};\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r},\ \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}$

Academician
TATOMIR P. ANDJELIĆ
(1903 - 1993)

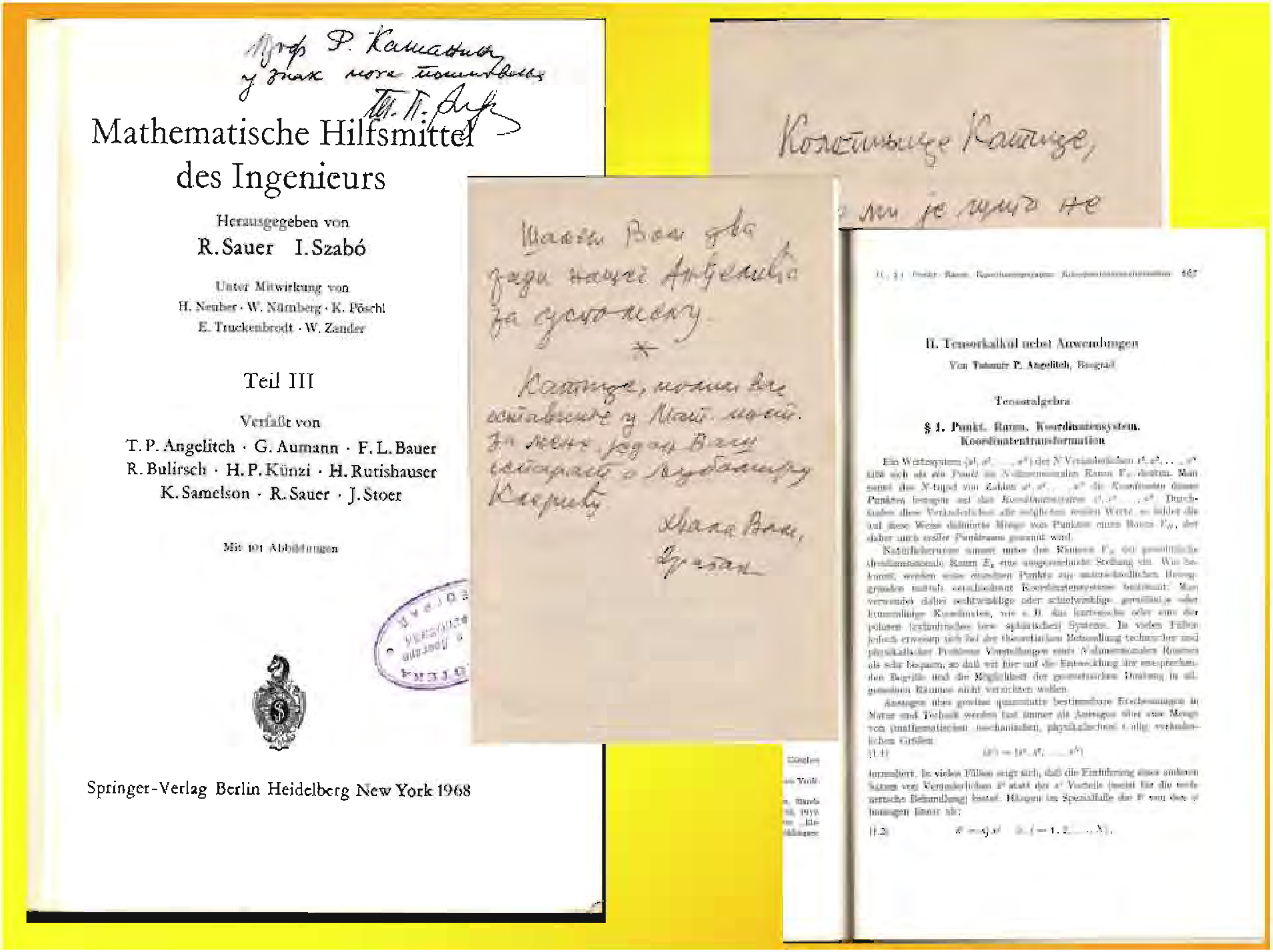
Head of Mechanics Department at the Institute of Mathematics of the Serbian Academy of Sciences and Arts

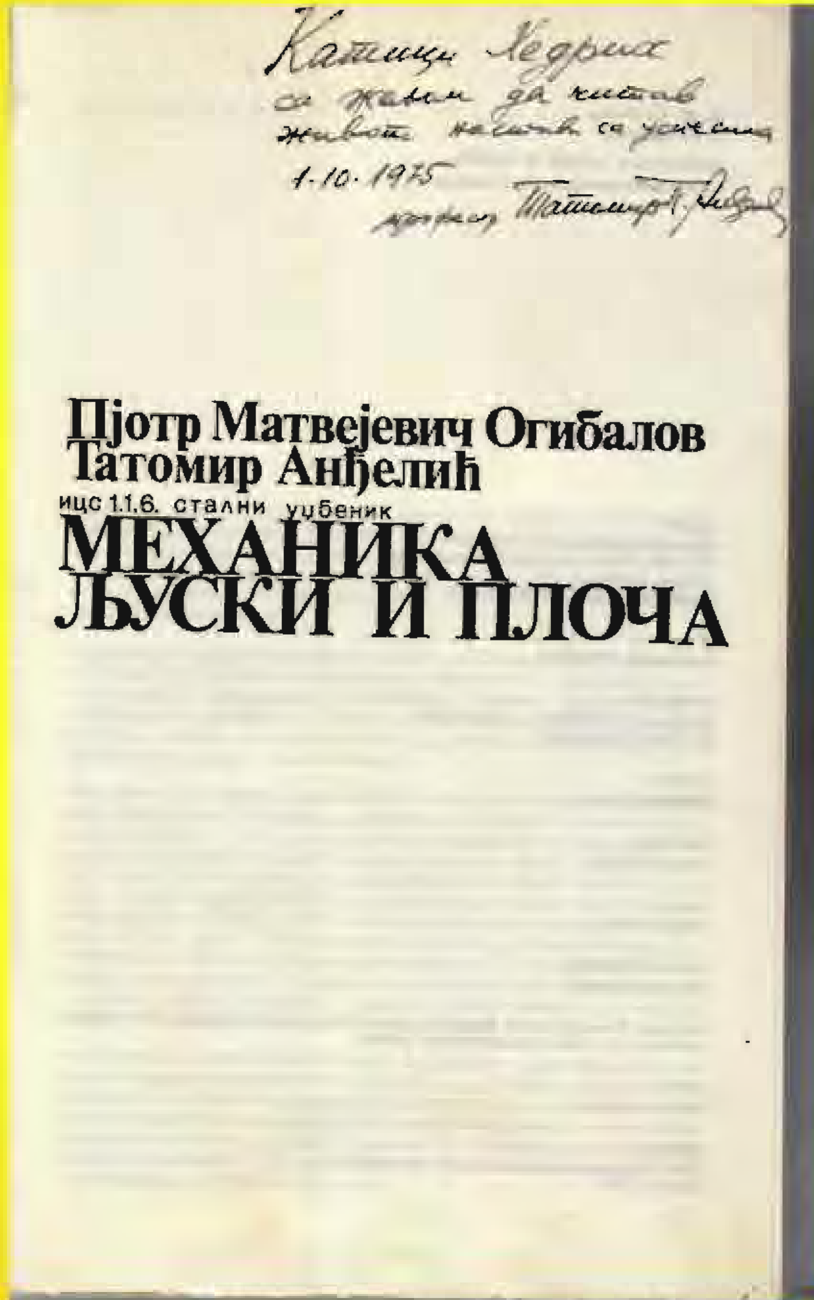
Academician

TATOMIR P. ANDJELIĆ

(1903 - 1993)

Head of Mechanics Department
at the Institute of Mathematics
of the Serbian Academy of
Sciences and Arts


Проф. Р. Кашанину
у знак мога поштовања
Mathematische Hilfsmittel
des Ingenieurs
Herausgegeben von
R. Sauer I. Szabó
Unter Mitwirkung von
H. Neuber · W. Nürnberg · K. Pöschl
E. Truckenbrodt · W. Zander
Teil III
Verfaßt von
T. P. Angelitch · G. Aumann · F. L. Bauer
R. Bulirsch · H. P. Künzi · H. Rutishauser
K. Samelson · R. Sauer · J. Stoer
Mit 101 Abbildungen
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1968
Шаљем Вам два дела нашег Анђелића за успомену.
II. Tensorkalkül nebst Anwendungen
Von Tatomir P. Angelitch, Beograd
Tensoralgebra
§ 1. Punkt. Raum. Koordinatensystem. Koordinatentransformation


Катици Хедрих
са жељом да читав
живот научни са успехом
1-10-1975
аутор Татомир П. Анђелић

Пјотр Матвејевич Огибалов
Татомир Анђелић
ицс 1.1.6. стални уџбеник
МЕХАНИКА
ЉУСКИ И ПЛОЧА

Prof. Draginja NIKOLIĆ (1909-1993)

Draginja (Jovana) Nikolić, profesor matematike u gimnaziji Stevan Sremac u Nišu
Rodjena 20. februara 1909. godine
Umrla 1 novembra 1993.
Radila u gimnazijama u Nišu od 1. septembra 1951 do 30. maja 1972 . Majka Katarina

Prof. Draginja NIKOLIĆ (1909-1993)