Pogonski elementi pokretnih sklopova

Neophodna pretpostavka svakog kretanja elemenata i sklopova mašina je dejstvo odgovarajućeg **pogonskog elementa** koji energiju receptora transformiše u mehanički rad.

U aparatima i uredjajima najčešće se koriste:

- elektromotorni (za kontinualno i koračno kretanje),
- elektromagnetni i
- mehanički pogonski elementi (za oscilatorno kretanje),

a nešto manje i:

hidraulični, pneumatski, elektrostriktivni, magnetostriktivni, termički i biomehanički pogonski elementi.

Opruge kao pogonski elementi

Opruge spadaju u **mehaničke pogonske elemente** koji akumuliraju potencijalnu energiju i transformišu je u kinetičku. U poredjenju s ostalim pogon. elementima, **troškovi izrade** opruga su znatno niži.

Mada se koriste i u ostalim oblastima mašinstva, posebno su u aparatima **funkcionalno** nezamenljive a i **konstruktivno** pogodne kao pogonski elementi.

Stručna literatura i standardi (JUS C.B6.018) nude konstruktorima uputstva za **statički** proračun opruga, najčešće sa aspekta:
- dinamičke čvrstoće,
- sile opruge,
- dozvoljenog naprezanja i
- hoda opruge.

Opruge kao pogonski elementi

Nedostaju, medjutim, instrukcije za dimenzionisanje opruga kao **pogonskih elemenata** koji treba da:

- savladaju sile korisnog i nekorisnog otpora i

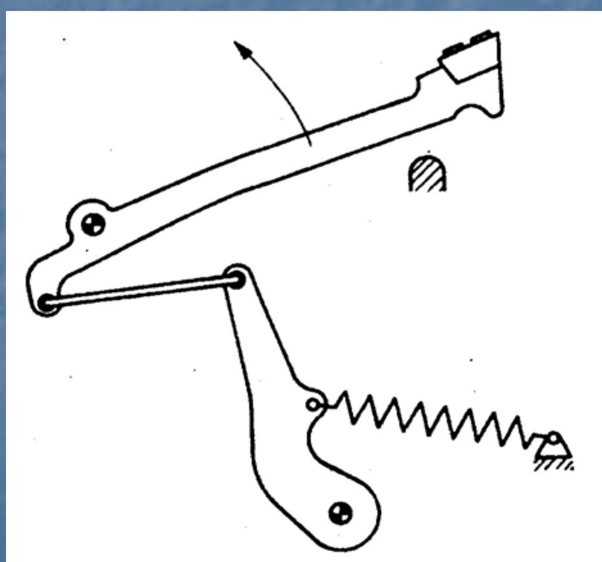
- pomere pokretne delove mašina zahtevanom brzinom.

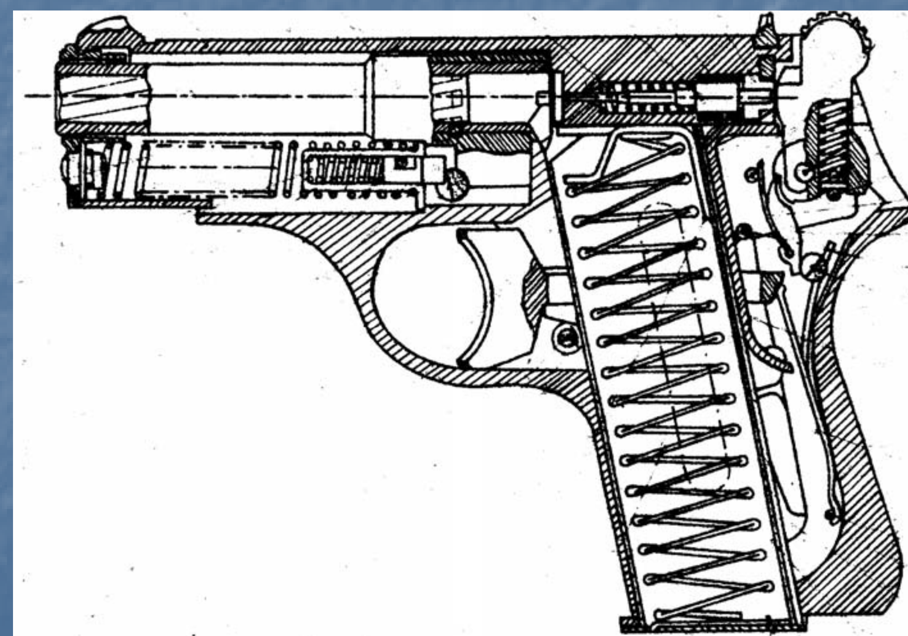
U praksi se ovaj zadatak rešava uglavnom empirijski ili eksperimentalno, proverom više različitih uzoraka opruge odn. variranjem njihovih parametara sve dok ne budu zadovoljeni postavljeni kinematski zahtevi. Ovakav pristup zahteva dosta vremena i uvećane troškove zbog često neophodnih, naknadnih izmena u konstrukciji i tehnologiji izrade.

Opruge kao pogonski elementi *Uvod*

Pogon diskontinualnih procesa

Mada služe i kao pogonski elementi kontinualnih procesa, opruge se znatno češće koriste kao pogonski elementi diskontinualnih procesa.





Osnovne pogodnosti opruga

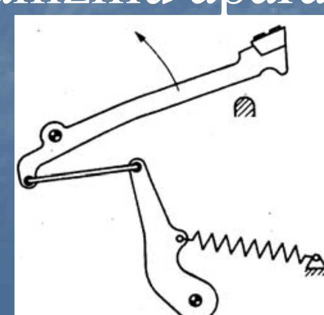
Za ovu oblast primene je posebno značajna sposobnost opruge da:

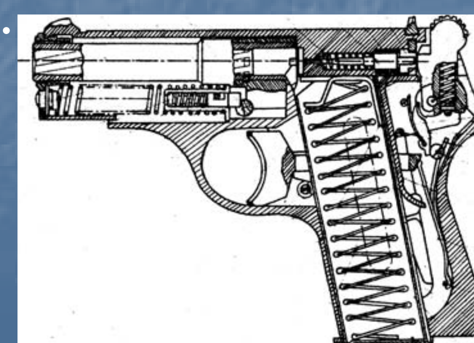
- akumulira relativno veliku količinu energije po jedinici zapremine

i realizuje 2 osnovna zahteva kod pogonskih procesa u aparatima:

- mogućnost startovanja u bilo kom odabranom trenutku i

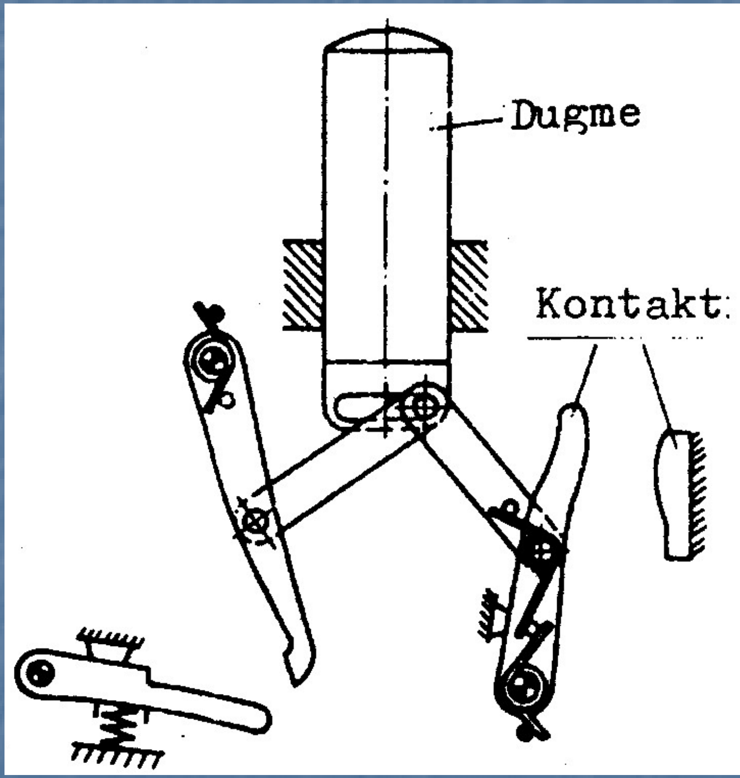
- što je moguće kraći vremenski interval, potreban da se akumulirana energija preda mehanizmu aparata.



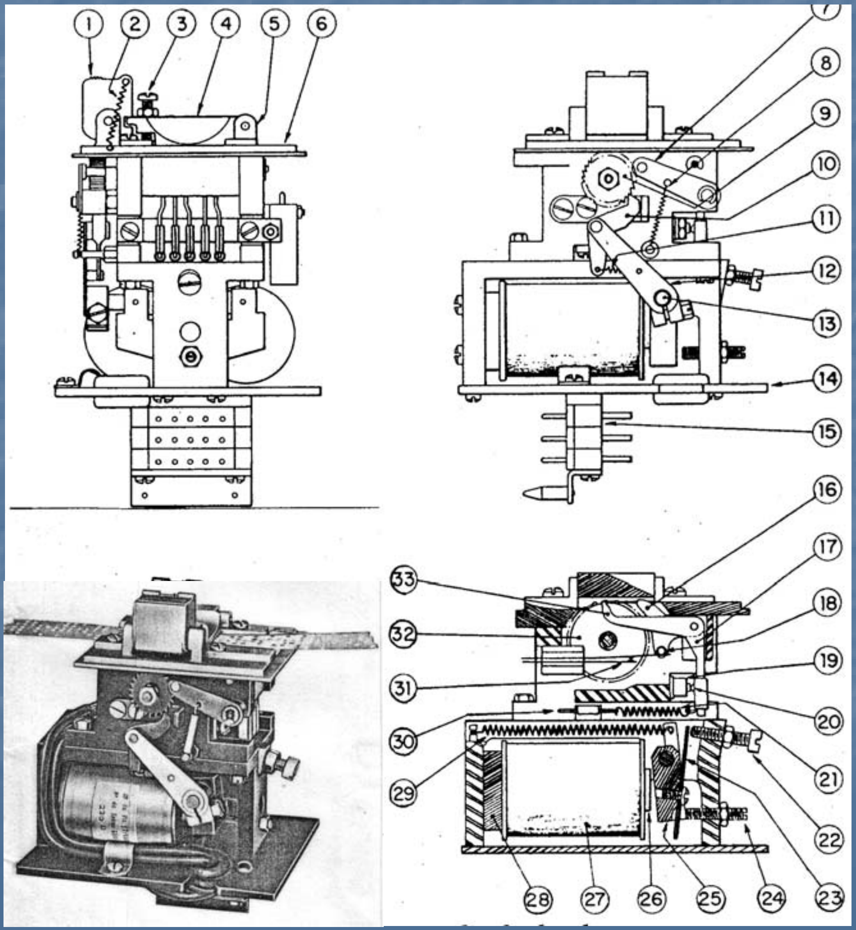


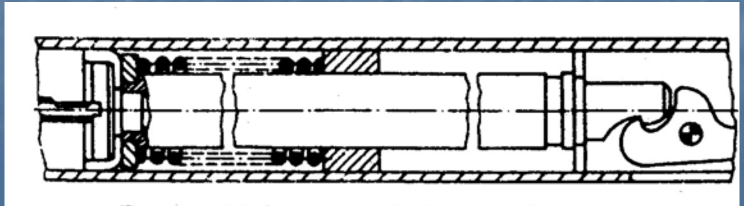
Sopstvena masa opruge

Dinamička analiza pogonskog procesa znatno bi se pojednostavila da je moguće zanemariti sopstvenu masu opruge, kao veličinu nižeg reda u odnosu na masu dela koji opruga treba da pomeri, ili je zameniti odgovarajućom konstantnom ekvivalent-masom.



Cilindrične zavojne opruge

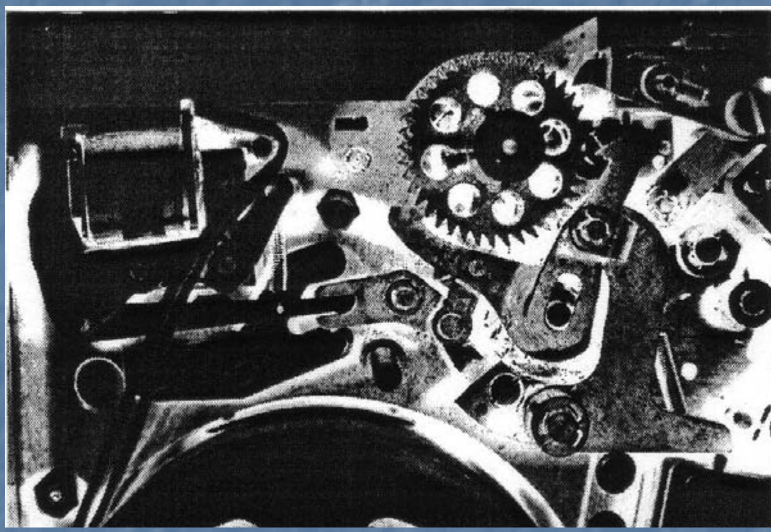


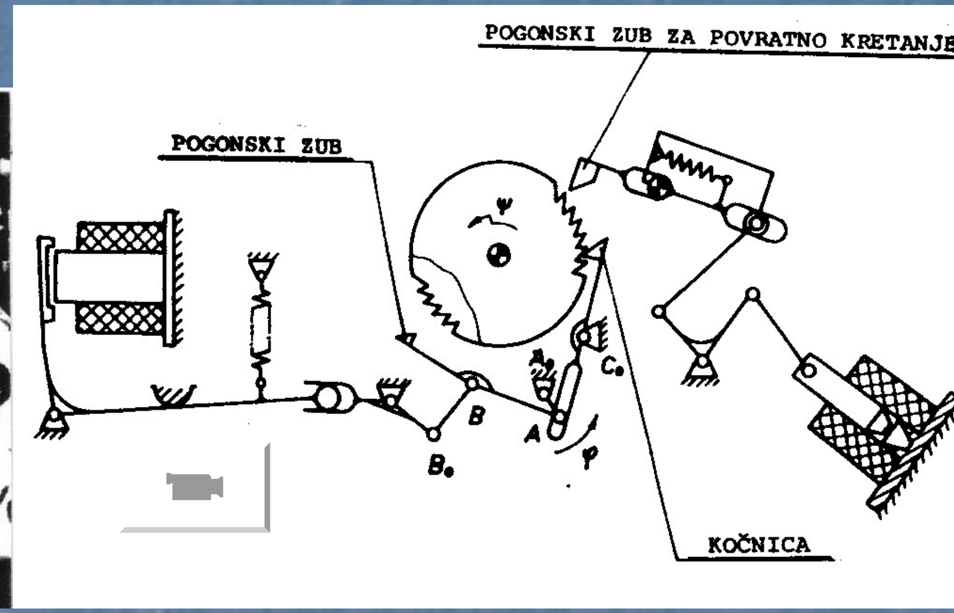


Pogon klipa vazdušne puške

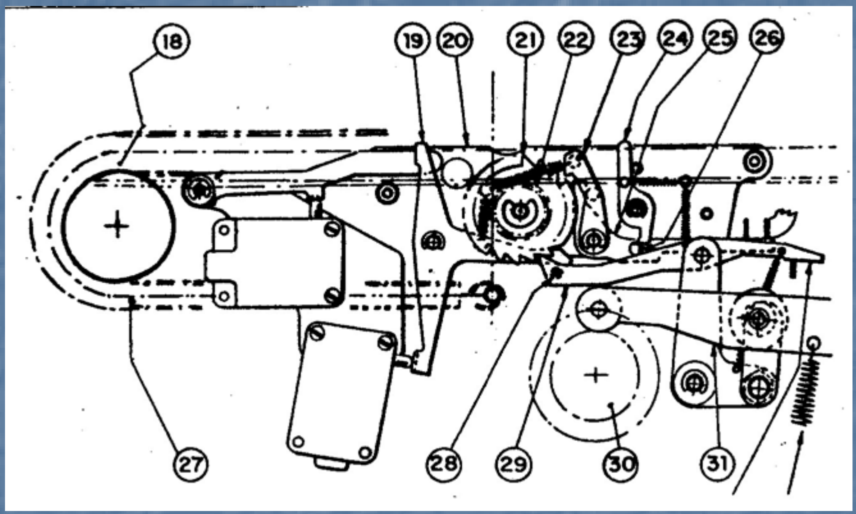
Opruge kao pogonski elementi *Uvod*

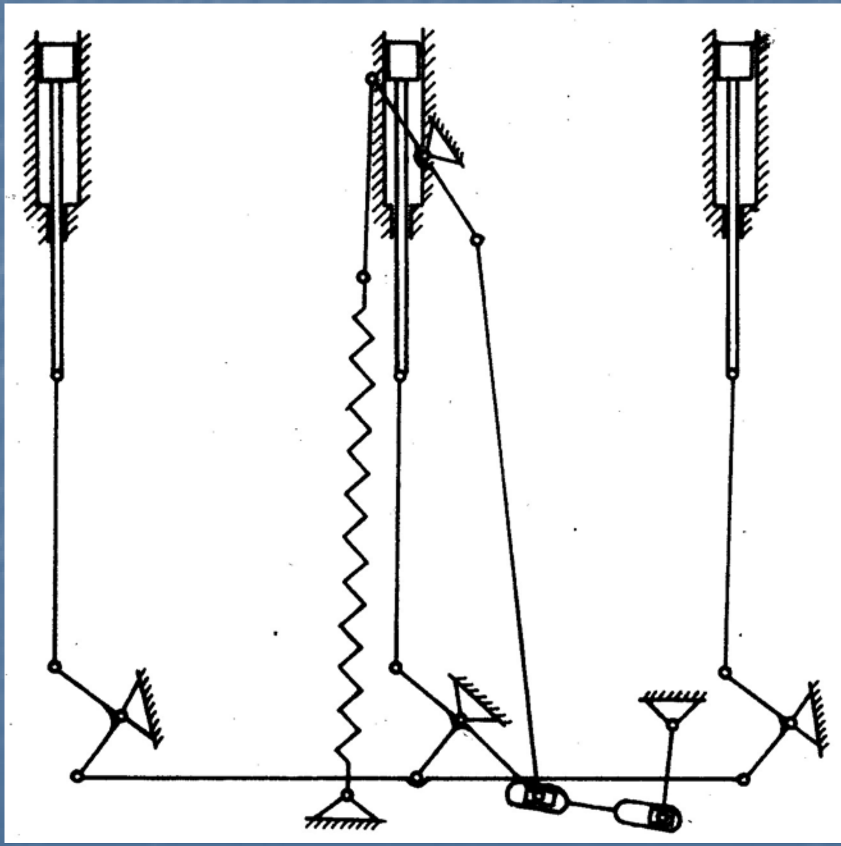
Cilindrične zavojne opruge



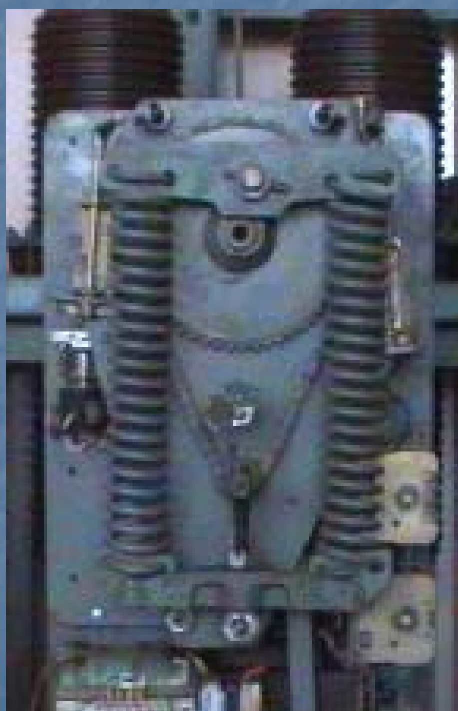


Cilindrične zavojne opruge



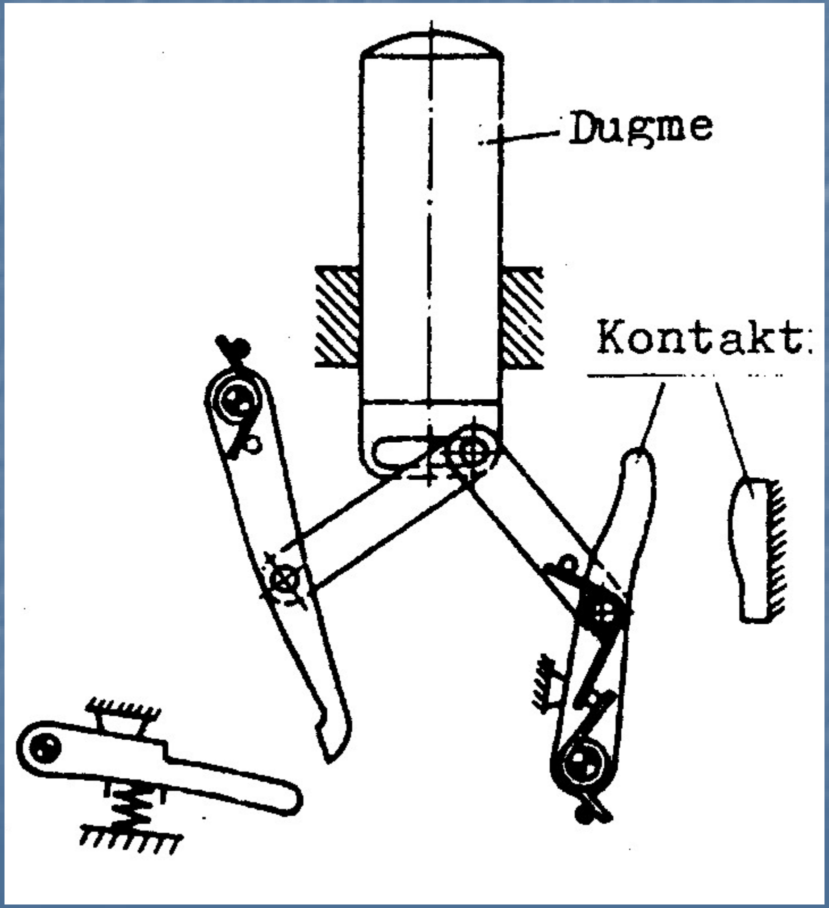


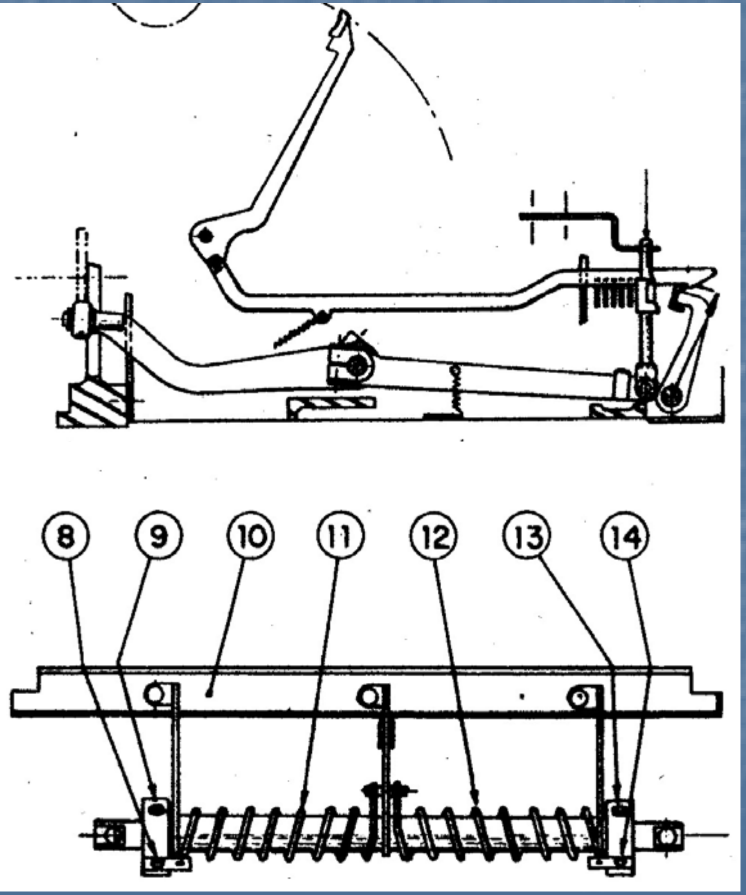
Zatezne opruge prekidača od 35 kV



Opruge kao pogonski elementi *Uvod*

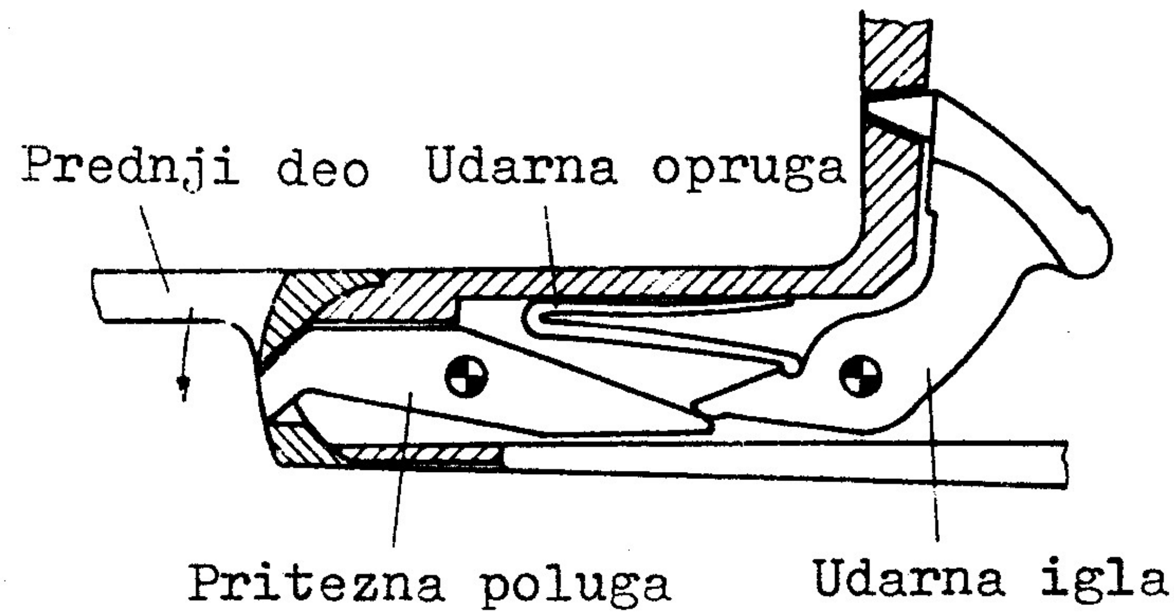
Uvrtne zavojne opruge





Uvrtne zavojne opruge

Lisnate opruge kao pogonski elementi



Pogon udarne igle lovačke puške

Opruge kao pogonski elementi

Detaljan opis opruge kao pogonskog elementa zahteva poznavanje niza parametara koje odredjuje njena:

- ***funkcija:*** vreme za koje opruga izvrši pomeranje, aktivni hod, početni otklon, veličine sila korisnog i nekorisnog otpora i njihova promena u toku pogonskog procesa, vek trajanja, pouzdanost,...

- ***struktura:*** karakteristike materijala od koga je opruga izradjena, prečnik žice, prečnik opruge, broj zavojaka, korak opruge,...

- ***okolina:*** ugradni prostor, položaj opruge i njegova promena tokom pogonskog procesa, vrsta veze završetaka opruge sa susednim elementima sklopa, vrsta kretanja elemenata sklopa,...

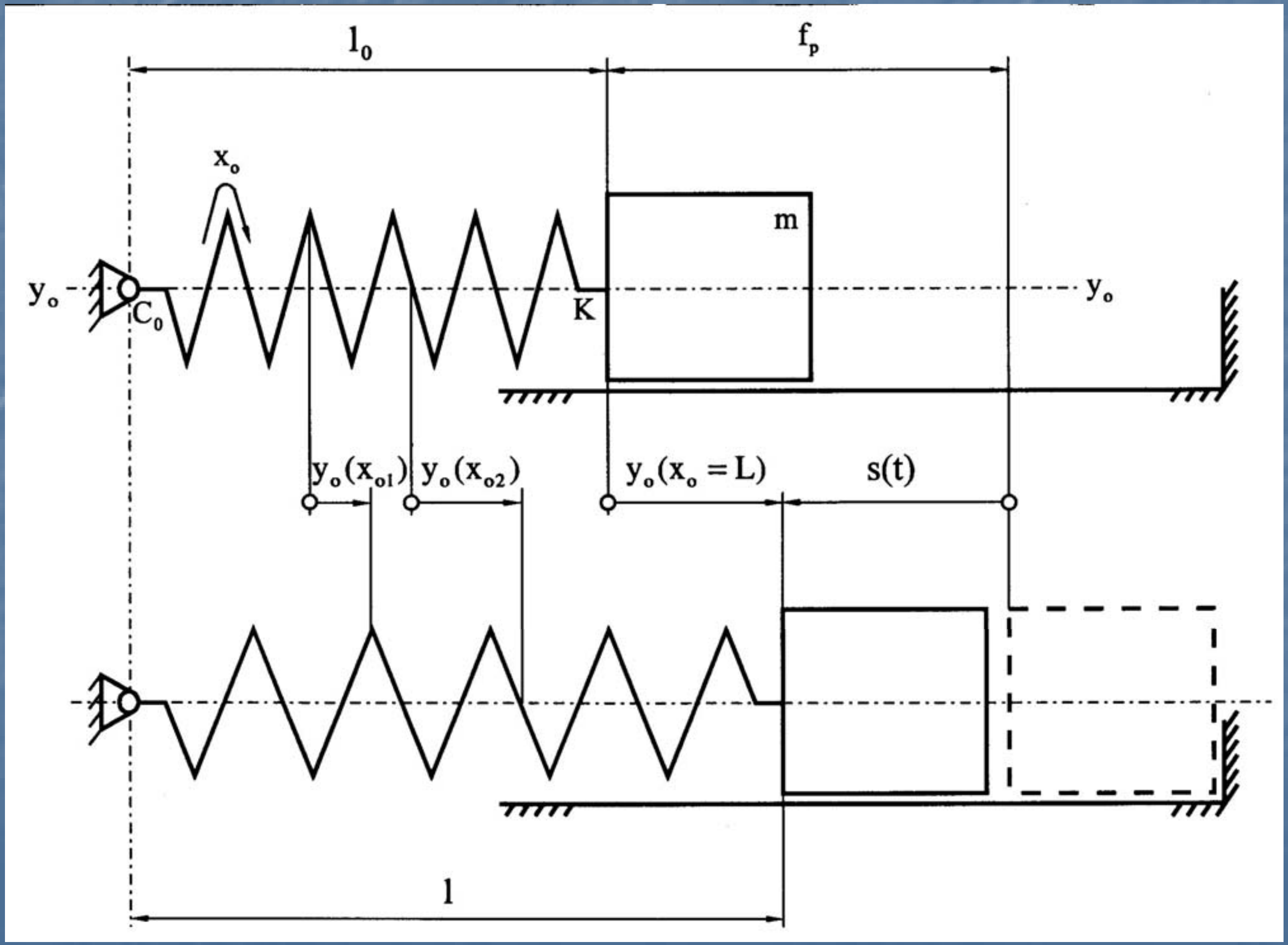
Cilindrične i uvrtne opruge

Cilindrične i uvrtne zavojne opruge bitno se razlikuju samo u:

	cilindrične opruge	uvrtne opruge
naprezanje žice opruge	pretežno na uvijanje	pretežno na savijanje
vrsta kretanja dela koji opruga treba da pomeri	pretežno translacija (kružni lukovi su delom aproksimirani pravama)	pretežno rotacija
oblici završetaka opruge	ušice (zatezne) stopala (pritisne)	kraci u tangentnom, radijalnom i aksijalnom pravcu

Pogonske opruge *Osnove proračuna*

Zakon puta realizovanog cilindričnom oprugom



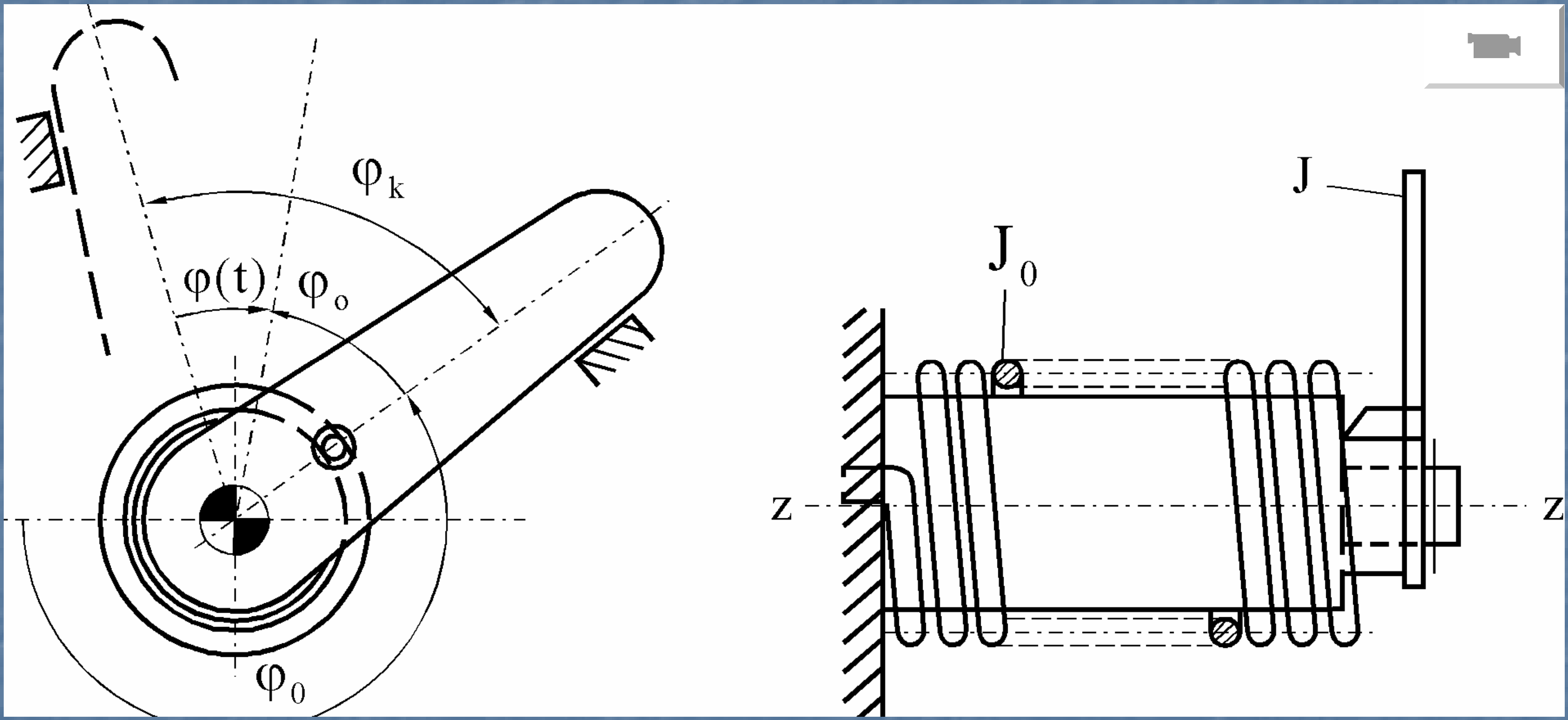
$$m \cdot \ddot{y}_o + c_s \cdot y_o = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c_s}{m}}$$

$$s(t) = f_p \cdot (1 - \cos\ \omega t)$$

Pogonske opruge *Osnove proračuna*

Zakon puta realizovanog uvrtnom oprugom



$$J \cdot \ddot{\varphi}_o + c_\varphi \varphi_o = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c_\varphi}{J}}$$

$$\varphi(t) = \varphi_p \cdot (1 - \cos\ \omega t)$$

Cilindrična i uvrtna opruga

$$m \cdot \ddot{y}_o + c_s \cdot y_o = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c_s}{m}}$$

$$s(t) = f_p \cdot (1 - \cos\ \omega t)$$

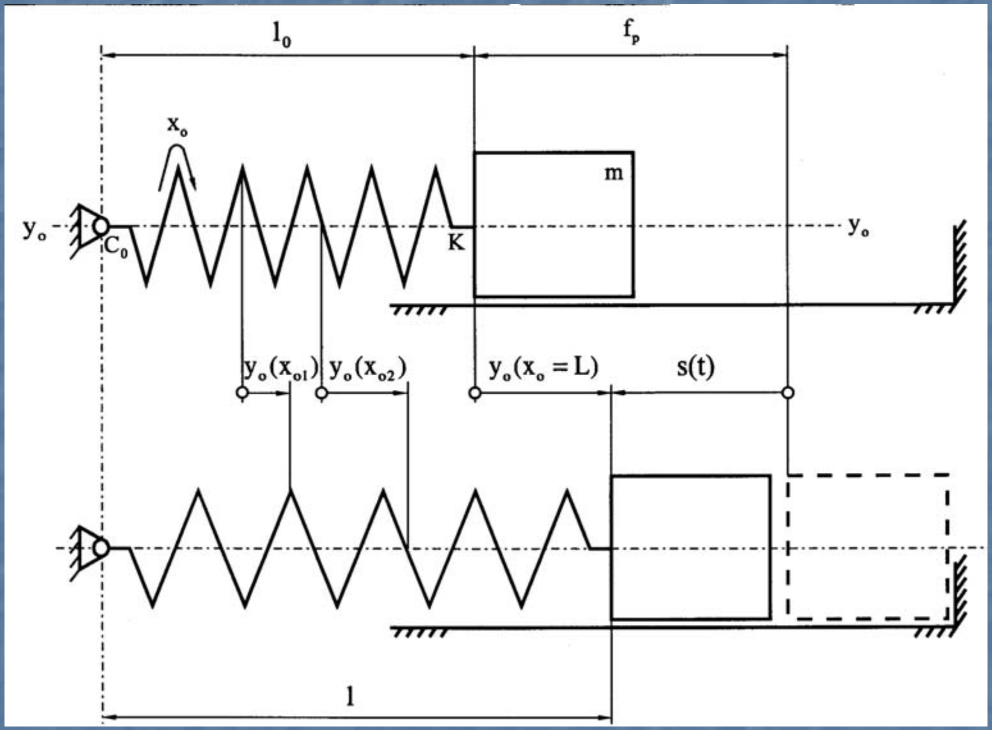
$$J \cdot \ddot{\varphi}_o + c_\varphi \varphi_o = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c_\varphi}{J}}$$

$$\varphi(t) = \varphi_p \cdot (1 - \cos\ \omega t)$$

Pogonske opruge *Osnove proračuna*

Talasna jednačina oscilacija



$$\frac{F_o}{c_s \cdot L} = \frac{\partial y_o}{\partial x_o}$$

$$dF_o = c_s \cdot L \cdot \frac{\partial^2 y_o}{\partial x_o^2} \cdot dx_o$$

$$dF_i = dm_o \cdot \ddot{y}_o = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 y_o}{\partial t^2} \cdot dx_o$$

$$\frac{\partial^2 y_o}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y_o}{\partial x_o^2}$$

$$c = L \cdot \sqrt{\frac{c_s}{m_o}}$$

Partikularno rešenje jednačine

$$\frac{\partial^2 y_o}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y_o}{\partial x_o^2}$$

$$y_o(x_o, t) = X(x_o) \cdot T(t)$$

$$X'' \cdot T - c^{-2} \cdot T'' \cdot X = 0$$

$$X'' + C \cdot X = 0$$

$$T'' + c^2 \cdot C \cdot T = 0$$

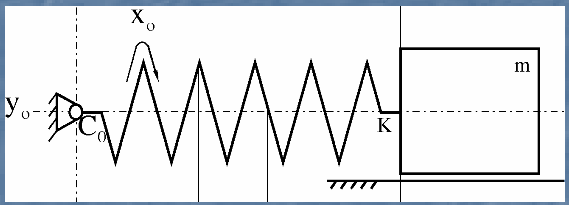
opšti integral:

$$y_o(x_o, t) = [A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t] \cdot \left[C \cdot \cos\left(\frac{\omega}{c} \cdot x_o\right) + D \cdot \sin\left(\frac{\omega}{c} \cdot x_o\right)\right]$$

Partikularno rešenje jednačine

Granični uslovi:

- na nepokretnom kraju opruge: $y_o(0,t)=0$



- na pokretnom kraju opruge: $c_s \cdot L \cdot \left(\frac{\partial y_o}{\partial x_o}\right)_L = -m \cdot \left(\frac{\partial^2 y_o}{\partial t^2}\right)_L$

$$y_o(x_o,t) = [A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t] \cdot \left[C \cdot \cos\left(\frac{\omega}{c} \cdot x_o\right) + D \cdot \sin\left(\frac{\omega}{c} \cdot x_o\right)\right]$$

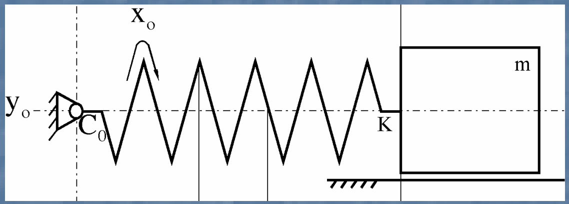
partikularno rešenje jednačine:

$$y_o(x_o,t) = (A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t) \cdot \sin\left(\frac{\omega}{c} \cdot x_o\right)$$

Frekventna jednačina

i frekventna jednačina: $$\frac{1}{\omega} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{c} \cdot L\right) = m \cdot \frac{c}{c_s \cdot L}$$

odnosno: $$\operatorname{ctg} k = \chi \cdot k$$



gde je: $$\chi = \frac{m}{m_o}$$

Beskonačno mnogo rešenja ove jednačine k_n definišu beskonačno mnogo sopstvenih kružnih frekvenci:

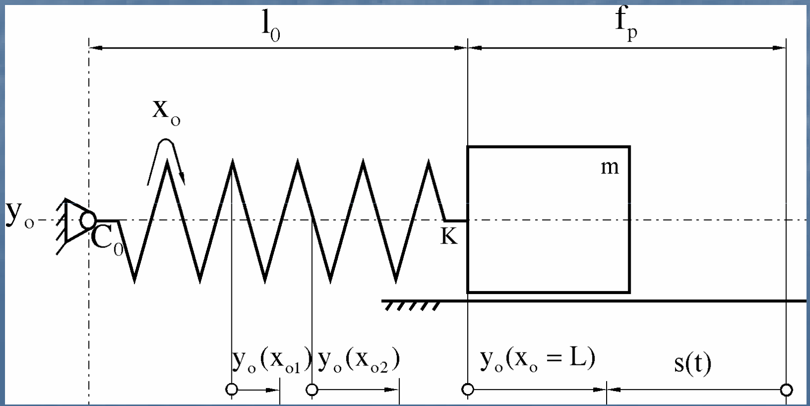
$$\omega_n = k_n \cdot \sqrt{\frac{c_s}{m_o}} \qquad n=1,2,3,\ldots\infty$$

Partikularno rešenje jednačine

Pošto je zbir rešenja homogene jednačine takodje njeno rešenje to se sva partikularna rešenja mogu napisati u obliku zbira:

$$y_o(x_o,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cdot\cos\omega_n t+B_n\cdot\sin\omega_n t\right)\cdot\sin\left(\frac{k_n}{L}\cdot x_o\right)$$

Pored graničnih moraju biti zadovoljeni i početni uslovi kretanja:



$$\dot{y}_o(x_o,0)=0$$

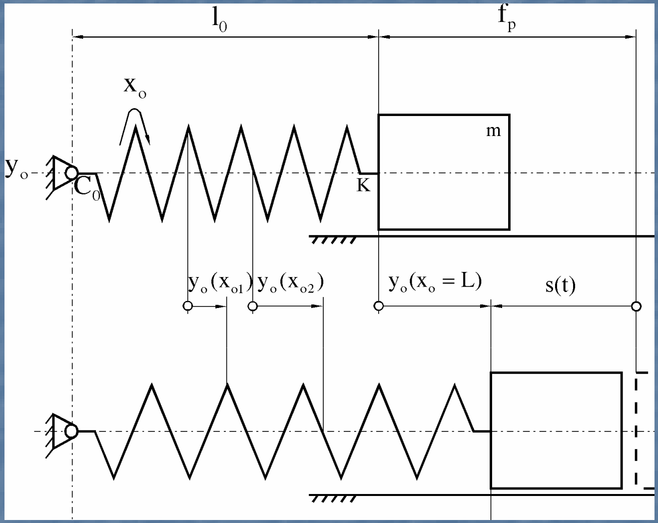
$$y_o(x_o,0)=f_p\cdot\frac{x_o}{L}$$

Pogonske opruge *Osnove proračuna*

Zakon puta

Zakon slobodnih longitudinalnih oscilacija horizontalnog oscilatora:

$$y_o(x_o, t) = 4\, f_p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k_n \cdot \sin\left(k_n \frac{x_o}{L}\right)}{k_n (2\, k_n + \sin 2k_n)} \cdot \cos \omega_n t$$



Zakon puta pokretnog kraja opruge (x_o=L):

$$y_o(L, t) = 4\, f_p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k_n}{k_n (2\, k_n + \sin 2k_n)} \cdot \cos \omega_n t$$

$$\sin k_1 \approx k_1$$

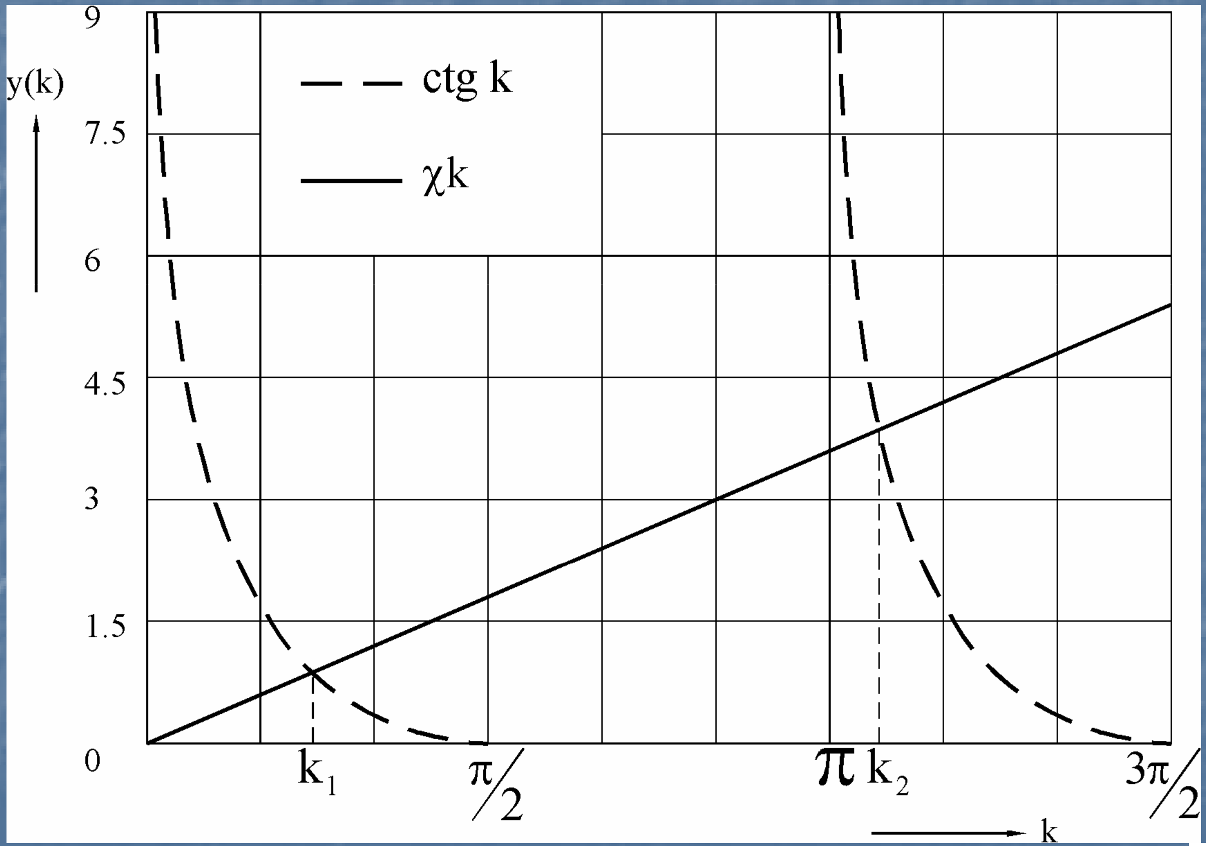
$$y_o(L, t) = f_p \cdot \cos \omega_1 t$$

$$s(t) = f_p - y_o(L, t) = f_p (1 - \cos \omega_1 t)$$

Pogonske opruge *Osnove proračuna*

Karakteristične vrednosti

$$\omega_n = k_n \cdot \sqrt{\frac{c_s}{m_o}}$$



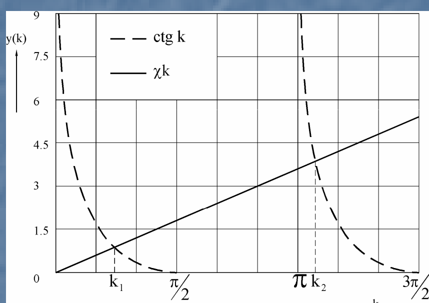
$$\operatorname{ctg} k = \chi \cdot k$$

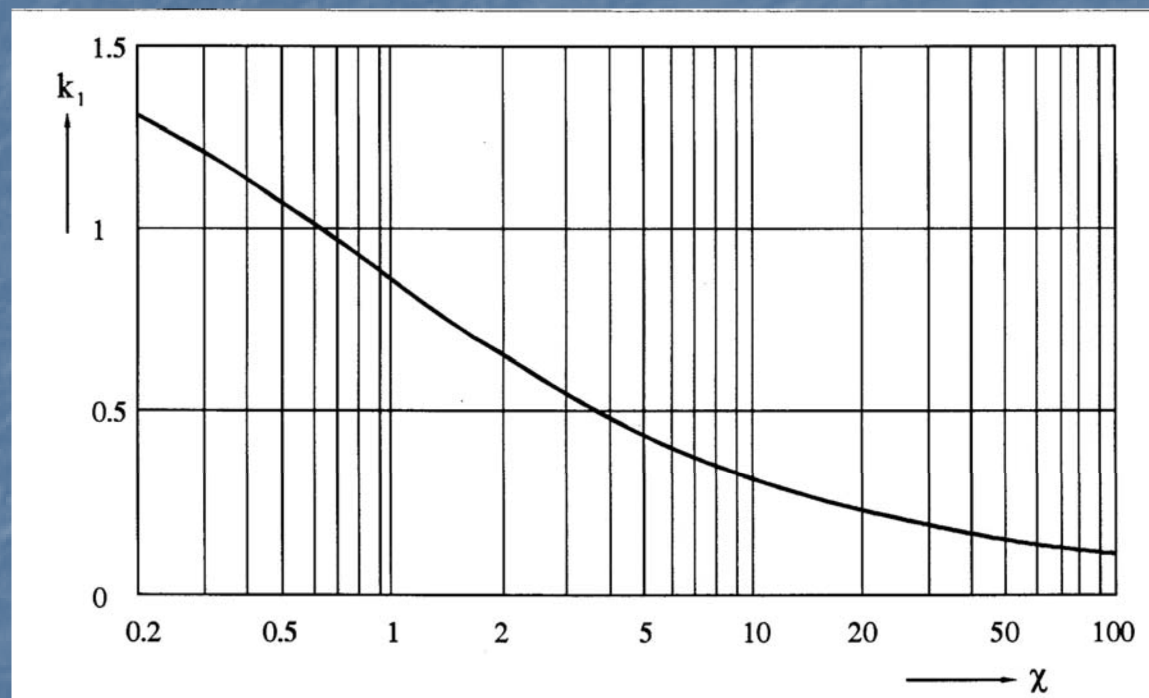
$$\chi = \frac{m}{m_o}$$

Pogonske opruge *Osnove proračuna*

Karakteristična vrednost osnovnog harmonika

$$\mathrm{ctg}\,k = \chi \cdot k$$





Karakteristična vrednost osnovnog harmonika

$$\mathrm{ctg}\,k = \chi \cdot k$$

$$\mathrm{ctg}\,k_1 = \frac{1}{k_1} - \frac{k_1}{3} - \frac{k_1^3}{45} - \frac{2k_1^5}{945} - \ldots\ldots$$

$$\omega_n = k_n \cdot \sqrt{\frac{c_s}{m_o}}$$

$$\chi = \frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{3}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{3}{3\chi + 1}}$$

$\chi > 5$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\,c_s}{(3\chi + 1)\cdot m_o}}$$

$m_o = 0 \quad (\chi \to \infty)$

$$\omega = \sqrt{\frac{c_s}{m}}$$

$m = 0 \quad (\chi = 0)$

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{3\,c_s}{m_o}}$$

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{c_s}{m + \frac{m_o}{3}}}$$

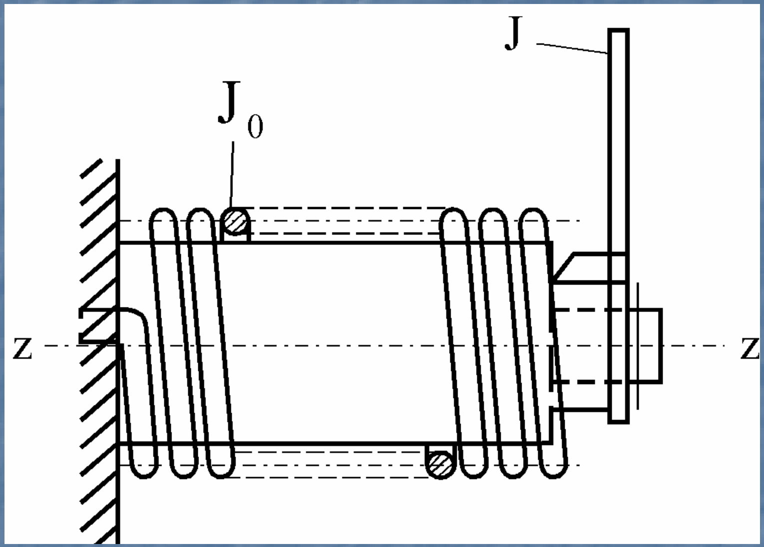
$m^* = m + m_o/3$ – redukovana masa

Jednačina kretanja uvrtne opruge

Uvrtna opruga sa mnogo zavojaka može približno da se opiše modelom torziono elastičnog šupljeg cilindra izloženog uvijanju:

$$\frac{\partial^2 \varphi_o}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_o}{\partial z_o^2}$$

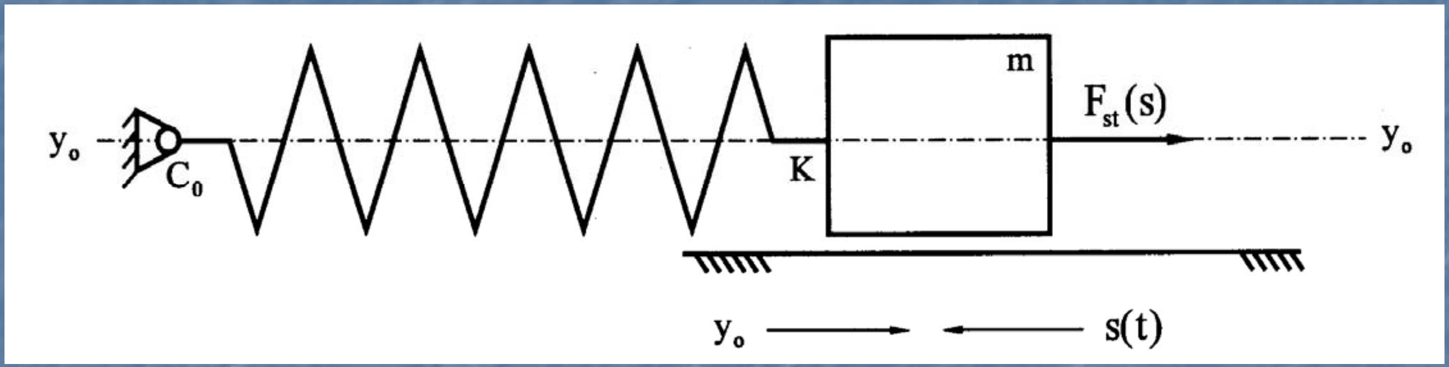
$$c = L_o \cdot \sqrt{\frac{c_\varphi}{J_o}}$$



Znatno širu primenu ima model prostorno zakrivljenog štapa izloženog savijanju za koji se dobija parcijalna diferencijalna jednačina kretanja najmanje četvrtog reda.

Pogonske opruge *Osnove proračuna*

Veličina otpora se ne menja s vremenom

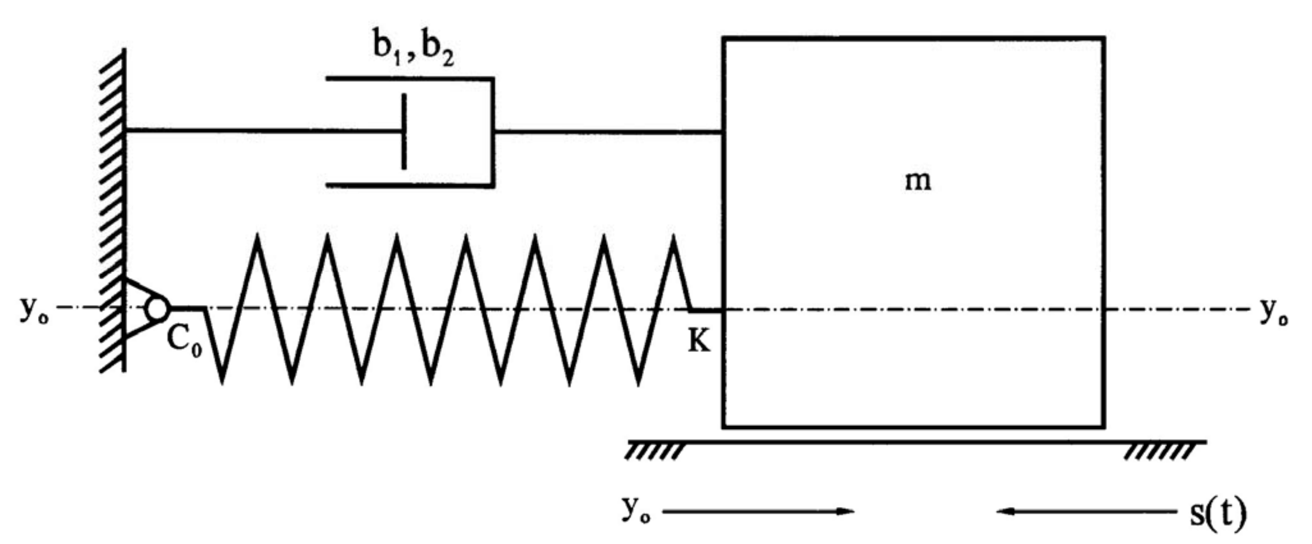


Ako se zanemari sopstvena masa opruge, diferencijalna jednačina kretanja sa statičkim otporom biće:

-za pogon cilindričnom zavojnom oprugom: $m \cdot \ddot{y}_o + c_s \cdot y_o - F_{st}(s) = 0$

-za pogon uvrtnom zavojnom oprugom: $J \cdot \ddot{\varphi}_o + c_\varphi \cdot \varphi_o - M_{st}(\varphi) = 0$

Veličina otpora se menja s vremenom



Ako se zanemari sopstvena masa opruge, a kretanje je prigušeno otpornom silom: $F_W = b_1 \cdot \dot{y}_o + b_2 \cdot \dot{y}_o^2 = -\left(b_1 \cdot \dot{s} + b_2 \cdot \dot{s}^2\right)$ diferencijalna jednačina kretanja biće :

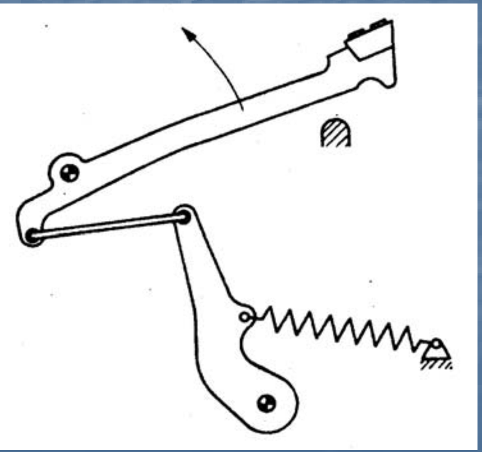
$$m \cdot \ddot{y}_o + c_s \cdot y_o + b_1 \cdot \dot{y}_o + b_2 \cdot \dot{y}_o^2 = 0$$

Opruga pomera sklop promenljive mase

Ako opruga pomera neki mehanizam, masa **m** (moment inercije **J**) menja svoju vrednost i može se izraziti kao promenljiva od pomeranja. U tom slučaju se i za najjednostavniji model (nema prigušenja ni statičkih otpornih sila, zanemarena sopstvena masa opruge) dobija nelinearna diferencijalna jednačina kretanja:

$$m \cdot \ddot{y}_o + \frac{1}{2}\frac{dm}{dy_o} \cdot \dot{y}_o^2 + c_s \cdot y_o = 0$$

$$J \cdot \ddot{\varphi}_o + \frac{1}{2}\frac{dJ}{d\varphi_o} \cdot \dot{\varphi}_o^2 + c_\varphi \cdot \varphi_o = 0$$

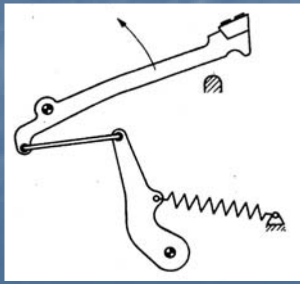


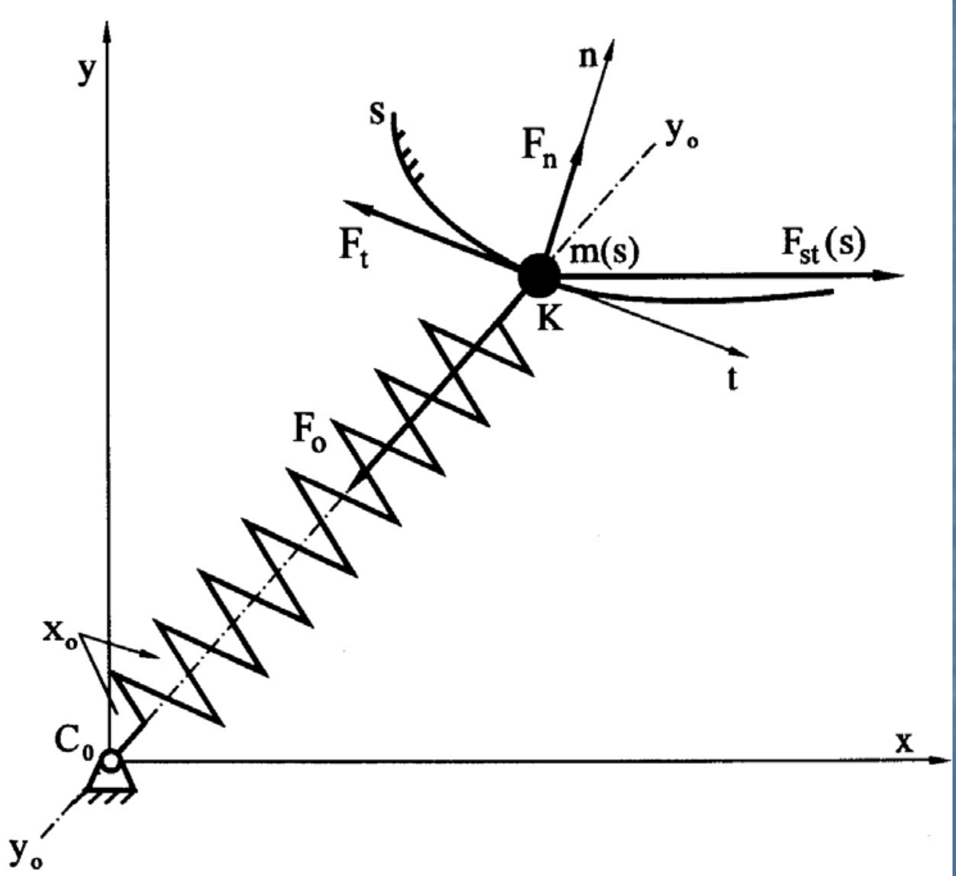
Opruga ne menja položaj svoje ose

Model :	zanemaruje masu opruge ili je uvodi preko redukovane mase		ne zanemaruje masu opruge	
Otporne sile :	konstantne i linearno zavisne od pomeranja	nelinearno zavisne od puta i vremena ($m \neq$ const, prigušenje)	konstantne i linearno zavisne od pomeranja	nelinearno zavisne od puta i vremena ($m \neq$ const, prigušenje)
Diferencijalna jednačina kretanja :	obična linearna diferencijalna jednačina	obična nelinearna diferencijalna jednačina	parcijalna difer. jedn. s linearnim granič. uslovima	parcijalna diferenc. jedn. s nelinearnim graničnim uslovima
Mogućnost rešavanja dif. jedn. :	egzistira eksplicitno rešenje	ne egzistira ekspli-citno rešenje; rešiva samo računarom	egzistira eksplicitno rešenje	nije rešiva; do rešenja se može doći samo linearizacijom

Osa opruge menja položaj

Proračun opruge čija **osa menja položaj** tokom pogonskog procesa moguć je samo ako se zanemari masa opruge pošto bi se u suprotnom dobila nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina kretanja.



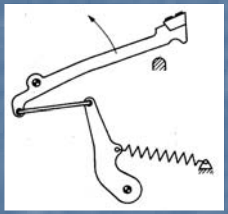


Pogonske opruge *Osnove proračuna*

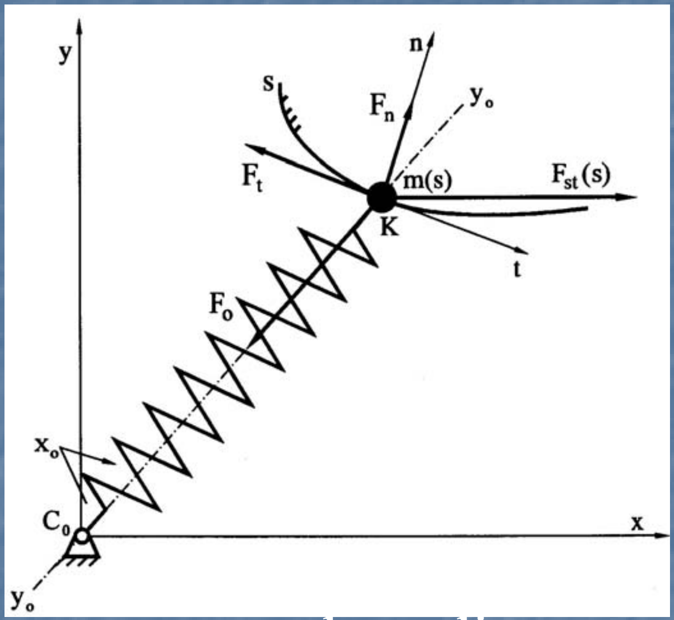
Osa opruge menja položaj

Ako se zanemari sopstvena masa opruge,

- masa sklopa nije konstantna: **m**(s),



- otporna sila nije konstantna: $\mathbf{F_{st}}$(s),
- kretanje je prugušeno otpornom silom,



dobija se diferencijalna jednačina kretanja u pravcu x-koordinate:

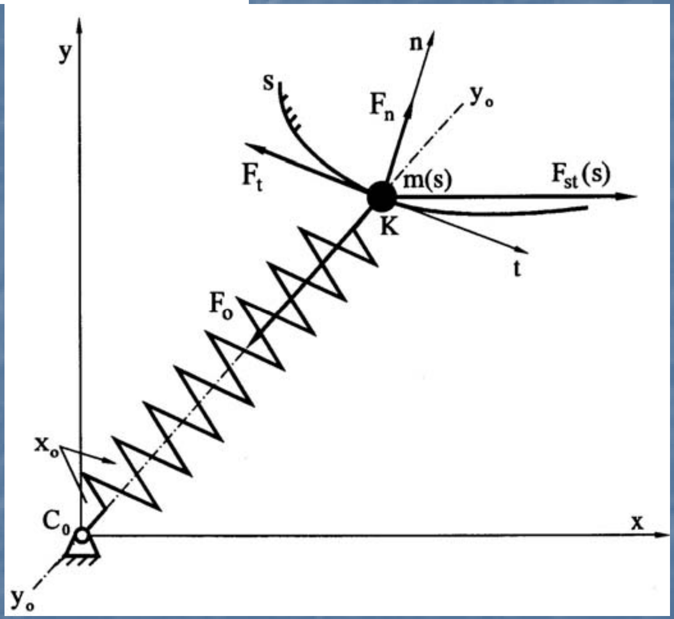
$$m(x)\cdot\ddot{x} + m(x)\cdot\frac{y'\cdot y''}{1+y'^2}\cdot\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{dm(x)}{dx}\cdot\dot{x}^2 + b_1\cdot\dot{x} + b_2\cdot\sqrt{1+y'^2}\cdot\dot{x}^2 +$$

$$+ c_s\cdot(l-l_0)\cdot\frac{x+y\cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(1+y'^2\right)} - F_{st}(x)\cdot\frac{1}{1+y'^2} = 0$$

Pogonske opruge *Osnove proračuna*

Osa opruge menja položaj

$$m(x)\cdot\ddot{x}+m(x)\cdot\frac{y'\cdot y''}{1+y'^2}\cdot\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{dm(x)}{dx}\cdot\dot{x}^2+b_1\cdot\dot{x}+b_2\cdot\sqrt{1+y'^2}\cdot\dot{x}^2+$$
$$+c_s\cdot(l-l_0)\cdot\frac{x+y\cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(1+y'^2\right)}-F_{st}(x)\cdot\frac{1}{1+y'^2}=0$$



Ukoliko su zavisnosti y(x), **m**(x) i $\mathbf{F_{st}}$(x) zadate tabelarno ili grafički, neophodno je aproksimirati ih polinomima (npr. 5. reda).

Za model s konstantnom ekvivalent-masom opruge, zamena **m**(x) redukovanom masom **m∗**(x) = **m**(x) + $\mathbf{m_o}$/3.

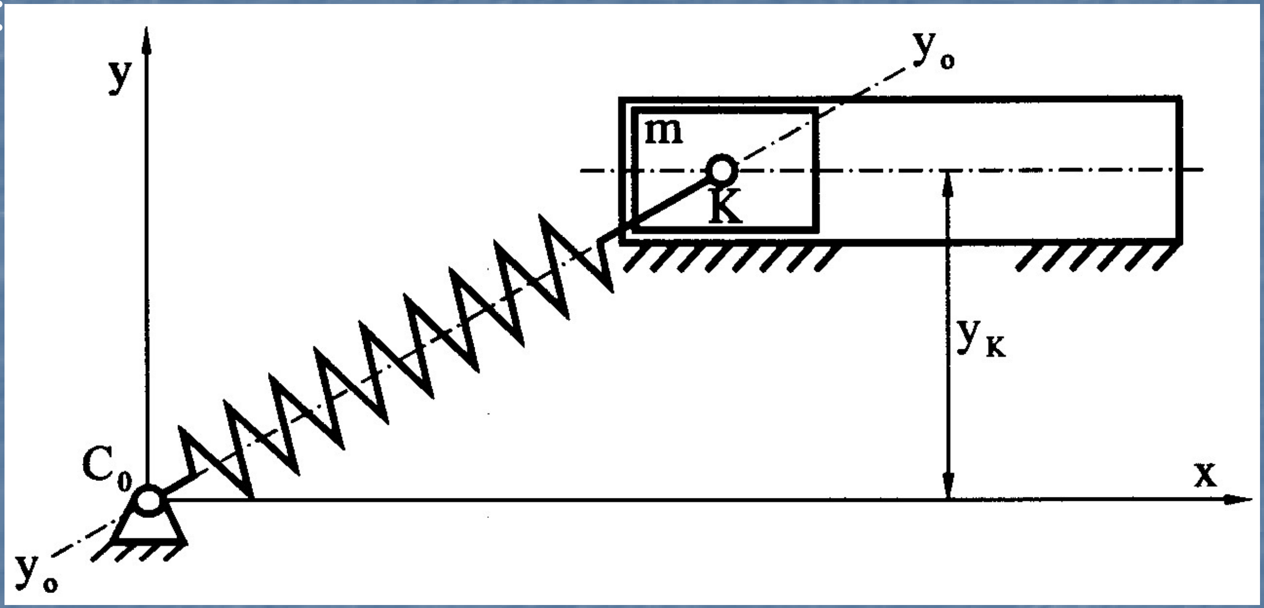
Putanja tačke **K** je paralelna x-osi

Uvodjenjem smena:

$$y = y_K$$

$$l_0 + y_o = l$$

$$x^2 + y_K^2 = l^2$$

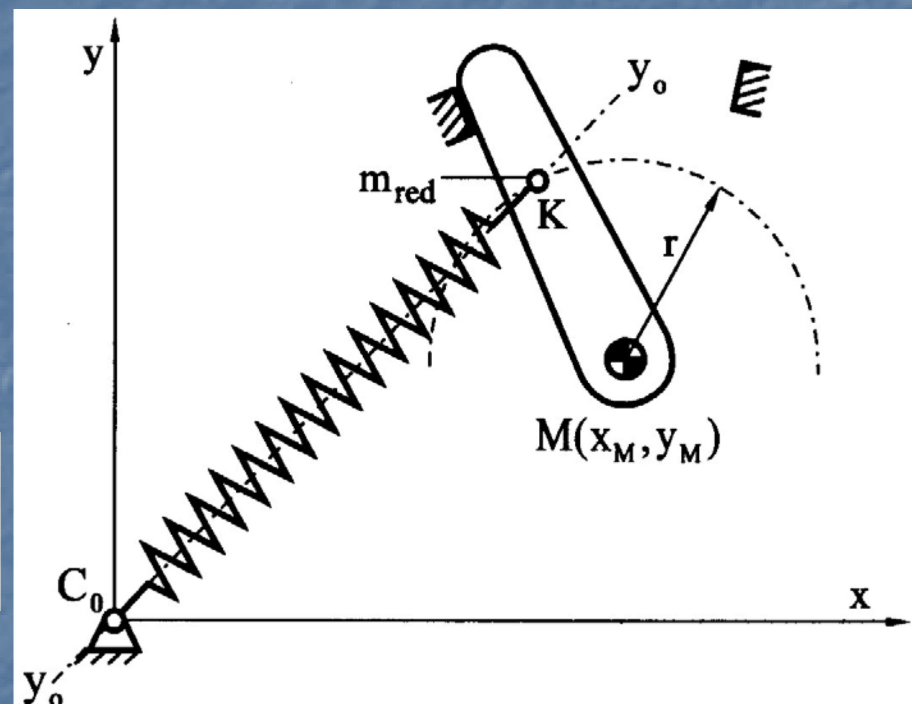


$$m \cdot \ddot{x} + c_s \cdot \left(1 + \frac{l_0}{l}\right) \cdot x = 0$$

Putanja tačke K je kružni luk

Uvodjenjem smene:

$$y = \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2} + y_M$$



$$l = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{r^2 - (x - x_M)^2} + y_M\right)^2}$$

$$\frac{c_s \cdot (l - l_0)}{r^2 \cdot l} \cdot \left\langle x_M \cdot \left[r^2 - (x - x_M)^2\right] - (x - x_M) \cdot y_M \cdot \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2} \right\rangle$$

$$+ m \cdot \ddot{x} + m \cdot \frac{x - x_M}{r^2 - (x - x_M)^2} \cdot \dot{x}^2 = 0$$