Математика 2 — 25. 09. 2014.

октобарски рок – решења

(1) а) Наћи опште решење хомогене д. ј. $y''-6y'+9y=0$.
б) Наћи опште и оно партикуларно решење д. ј. $y'+2y=x$ које задовољава услов $y(0)=0$.

Р] а) $y''-6y'+9y=0$

Карактеристична ј-на је $k^2-6k+9=0$, а њена решења су $k_1=k_2=3$. Због тога је опште решење једнако

$$y(x)=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}=e^{3x}(c_1+c_2x).$$

б) Линеарну д. ј. $y'+2y=x$ решавамо помоћу познате ф-ле

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\cdot\left(c+\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx\right),$$

где је $p(x)=2$ и $q(x)=x$.

$$\int p(x)dx=\int 2dx=2x$$

$$\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx=\int xe^{2x}dx$$

Овај интеграл решавамо парцијалном интеграцијом,

$u=x \Rightarrow du=dx$

$$dv=e^{2x}dx \Rightarrow v=\int e^{2x}dx=\left|\begin{matrix}t=2x\\ dt=2dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right|=\int e^t\cdot\frac{1}{2}dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int e^tdt=\frac{1}{2}e^t=\frac{1}{2}e^{2x}$$

Следи $\int xe^{2x}dx=\left(u\cdot v-\int v\,du\right)=x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx=$

$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=$ (~~слично као малопре~~ израчунали смо малопре) $=$

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}=e^{2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)$$

Дакле, $y(x)=e^{-2x}\cdot\left(c+e^{2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\right)=c\cdot e^{-2x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

Ово је опште решење. Партикуларно добијамо из услова $y(0)=0$. Како је $y(0)=c\cdot e^{-2\cdot 0}+\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{4}=c-\frac{1}{4}$ то је $c-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow c=\frac{1}{4}$, па је парт. реш. једнако

$$y_p(x)=\frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}.$$

② а) Дата је ф-ја $z(x,y)=\ln(x^4+x^2y^2+y^4)$.

Доказати идентитет $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=4$.

б) Израчунати интеграл

$$\iiint\limits_V (xz+y)\,dx\,dy\,dz$$

где је V област одређена са $-3\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2,\quad 2\le z\le x$.

Р. а) Када тражимо парцијални извод по x онда остале промен-љиве посматрамо као да су константе.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^4+x^2y^2+y^4}\cdot\frac{\partial(x^4+x^2y^2+y^4)}{\partial x}=\frac{1}{x^4+x^2y^2+y^4}\cdot(4x^3+2xy^2+0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^4+x^2y^2+y^4}\cdot\frac{\partial(x^4+x^2y^2+y^4)}{\partial y}=\frac{1}{x^4+x^2y^2+y^4}\cdot(0+x^2\cdot 2y+4y^3).$$

Следи

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{4x^3+2xy^2}{x^4+x^2y^2+y^4}+y\cdot\frac{2yx^2+4y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}=$$

$$=\frac{4x^4+2x^2y^2+2y^2x^2+4y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}=\frac{4(x^4+x^2y^2+y^4)}{x^4+x^2y^2+y^4}=4.$$

б) $I=\int_{-3}^{1}dx\int_0^2 dy\int_2^x (xz+y)\,dz$. Користимо Фубинијеву теорему.

Када тражимо интеграл по z онда остале променљиве посматрамо као да су константе.

$$\int_2^x(xz+y)\,dz=\int_2^x xz\,dz+\int_2^x y\,dz=x\cdot\int_2^x z\,dz+y\int_2^x dz=$$

$$=x\cdot\frac{z^2}{2}\Big|_{z=2}^{z=x}+y\cdot z\Big|_{z=2}^{z=x}=\frac{x}{2}\cdot(x^2-2^2)+y\cdot(x-2)=$$

$$=\frac{x^3}{2}-2x+y\cdot(x-2)$$

Сада тражимо

$$\int_0^2\left(\frac{x^3}{2}-2x+y(x-2)\right)dy=\int_0^2\left(\frac{x^3}{2}-2x\right)dy+\int_0^2 y(x-2)\,dy=$$

$$=\left(\frac{x^3}{2}-2x\right)\int_0^2 dy+(x-2)\int_0^2 y\,dy=\left(\frac{x^3}{2}-2x\right)\cdot y\Big|_{y=0}^{y=2}+(x-2)\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=2}$$

$$=\left(\frac{x^3}{2}-2x\right)\cdot(2-0)+\frac{x-2}{2}\cdot(2^2-0^2)=x^3-4x+(x-2)\cdot 2=x^3-2x-4$$

Најзад

$$I=\int_{3}^{1}(x^3-2x-4)\,dx=\left(\frac{x^4}{4}-\cancel{2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}-4x\right)\Big|_{-3}^{1}=\frac{1^4}{4}-1^2-4\cdot1-\left(\frac{(-3)^4}{4}-(-3)^2-4\cdot(\right.$$

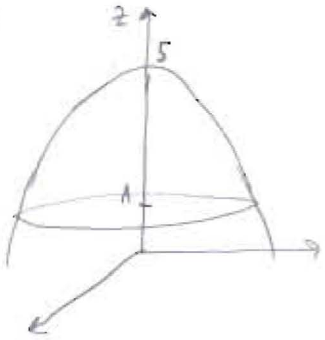
$$=\frac{1}{4}-1-4-\left(\frac{81}{4}-9+12\right)=\frac{1}{4}-5-\frac{81}{4}-3=-\frac{80}{4}-8=-28.$$

3. Израчунати флукс векторског поља

$$\vec{F} = xz\cdot\vec{i} + xy\,\vec{j} - xz\,\vec{k}$$

кроз спољну страну површи која је ограничена параболоидом $z = 5 - x^2 - y^2$ и равни $z = 1$.

Р.



Флукс се рачуна као површински интеграл другог реда

$$\Phi = \iint_S P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy,$$

где је $P = xz$, $Q = xy$, $R = -xz$.

Површ је затворена па можемо применити ф-лу Гаус-Остроградског

$$\Phi = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = z, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -x \implies \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = z.$$ Следи

$$\Phi = \iiint_V z\,dxdydz,$$ где је V област ограничена параболоидом и равни. S је била површ која ограничава област V.

Уводимо цилиндричне координате.

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = h$
$J = r$
$x^2 + y^2 = r^2$

$$\left.\begin{aligned} z = 5 - x^2 - y^2 &\implies h = 5 - r^2 \\ z = 1 &\implies h = 1 \end{aligned}\right\} \implies \underline{1 \le h \le 5 - r^2}$$

$$\left.\begin{aligned} h &= 5 - r^2 \\ h &= 1 \end{aligned}\right\} \implies 5 - r^2 = 1 \implies r^2 = 4 \implies r = 2 \implies \underline{0 \le r \le 2}$$

За φ нисмо добили никакво ограничење па је $\underline{0 \le \varphi \le 2\pi}$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_1^{5-r^2} \underset{J}{r} \cdot \underset{z}{h}\,dh = \cancel{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\,dr} \cdot -$$

$$\int_1^{5-r^2} r\cdot h\,dh = r\cdot\int_1^{5-r^2} h\,dr = r\cdot\frac{h^2}{2}\Big|_{h=1}^{h=5-r^2} = \frac{r}{2}\cdot\left((5-r^2)^2 - 1^2\right) =$$

$$= \frac{r^5}{2} - 5r^3 + 12r$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(\frac{r^5}{2} - 5r^3 + 12r\right)dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{r^6}{6} - 5\cdot\frac{r^4}{4} + 12\cdot\frac{r^2}{2}\right)\Big|_{r=0}^{r=2} = \int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\left(\frac{2^6}{12} - \frac{5}{4}\cdot 2^4 + 6\cdot 2^2 - 0\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{28}{3} = \frac{28}{3}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{28}{3}\cdot(2\pi - 0) = \frac{56}{3}\pi.$$

4. Израчунати циркулацију вект. поља $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ по контури насталој у пресеку цилиндра $x^2+y^2=1$ и равни $y+z=2$. Контура је позитивно оријентисана кад се гледа са врха z осе.

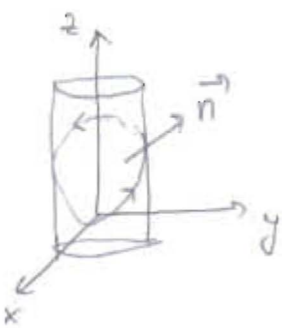
Р. Задатак је врло сличан са 4. задатком из претходног рока. Дајемо укратко решење.

$C = \oint_{\vec{c}} z\,dx + x\,dy + y\,dz$. Можемо применити Стоксову ф-лу

$$C = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} dS = \iint_S \left(\cos\alpha\cdot(1-0) - \cos\beta\cdot(0-1) + \cos\gamma\cdot(1-0)\right) dS$$

S је површ ограничена кривом $\vec{c}$ која припада равни $y+z=2$.

Дакле, S: $z = 2-y$, $p = z'_x = 0$, $q = z'_y = -1$, $\sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{2}$.



Угао γ је оштар па је $\cos\gamma > 0$.

$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}$ Узимамо знак $-$.

$\cos\alpha = \frac{0}{-\sqrt{2}} = 0$, $\cos\beta = \frac{-1}{-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cancel{C = \iint_S \left(-\frac{1}{\sqrt{}} \right.}$

$$C = \iint_S \left(0\cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1\right) dS = \frac{2}{\sqrt{2}}\iint_S dS$$

$$C = \frac{2}{\sqrt{2}}\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy = \frac{2}{\sqrt{2}}\iint_D \sqrt{2}\,dx\,dy = 2\iint_D dx\,dy.$$

Уводећи поларне координате добијамо $C = 2\pi$.

Или, $C = 2\iint_D dx\,dy = 2\cdot P(D)$, D је круг $x^2+y^2=1$

па је $C = 2\cdot 1^2\pi = 2\pi$.