PRVI DOMAĆI ZADATAK IZ MATEMATIKE I

1 KOMPLEKSNI BROJEVI

1. a) Predstaviti u trigonometrijskom obliku brojeve $1 + i\sqrt{3}$, $-1 + i$, $\sqrt{3} - i$ i izračunati

$$(1 + i\sqrt{3})(-1 + i), \quad \frac{\sqrt{3} - i}{-1 + i}.$$

b) Korišćenjem rezultata pod a) naći $(1 + i\sqrt{3})^6$, $\quad \sqrt[3]{\sqrt{3} - i}$.

2 DETERMINANTE, MATRICE I MATRIČNE JEDNAČINE

1. Za koju vrednost realnog parametra p matrica A nema inverznu matricu? (Uputstvo: Matrica nema inverznu ako joj je determinanta jedanka 0.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & p \\ p-1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Izračunati vrednost determinante

$$a) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (= 2d - a - b - c).$$

3. Date su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunati one od izraza $3B$, A^{-1}, B^T, AB, BA, CB, C^{-1} koji se mogu izračunati. Za one koji se ne mogu izračunati objasniti zašto to nije moguće.

4. Rešiti matrične jednačine $AX - 2I = B - 2X$ i $XA - 2I = B - 2X$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Naći rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & -4 \\ 33 & 11 & 22 & 0 \end{bmatrix}$$

3 SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

1. Rešiti sistem linearnih jednačina.

$$a) \begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -2x + y + 3z &= 0 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned} \quad b) \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= -7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 9 \end{aligned}$$

2. U zavisnosti od vrednosti realnog parametra p, reši i diskutovati sistem linearnih jednačina.

$$a) \begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + y + z &= 7 - p \\ x + 2y + pz &= 10 \end{aligned} \quad b) \begin{aligned} px + y - 2z &= 7 \\ 2x - y + z &= -1 \\ x + 2y - 3z &= 8 \end{aligned} \quad c) \begin{aligned} (p+2)x + 2y + 4z &= 1 \\ -2x + y + 3z &= 0 \\ 4x + y + (p+2)z &= p + 5 \end{aligned}$$

3. Odrediti vrednost parametra p za koji sistem ima i drugih rešenja sem trivijalnih i zatim naći ta rešenja

$$\begin{aligned}(p+2)x - y + 2z &= 0\\ -6x + py - 3z &= 0\\ 2x + y + z &= 0\end{aligned}$$

4 VEKTORSKA ALGEBRA

1. Dati su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$.
   a) Odrediti intezitet vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kao i njihov skalarni proizvod. Odrediti ugao izmedju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
   b) Odrediti uglove koje vektor $\vec{b}$ zaklapa sa koordinatnim osama.
   c) Odrediti jedinični vektor normalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$. (Uputstvo: Naći vektorski proizvod ovih vektora. Neka je to vektor $\vec{c}$. Zatim naći intezitet od $\vec{c}$ i podeliti kordinate vektora $\vec{c}$ tim intezitetom.)
2. Date su tačke $A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,2)$ i $D(1,1,3)$.
   a) Odrediti površinu trougla odredjenog tačkama A, B i C. Odrediti visinu AA_1 trougla ABC koja odgovara stranici BC. Odrediti ugao trougla ABC kod temena A.
   b) Odredi zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ i $\vec{AD}$. Odrediti zapreminu tetraedra koji je odredjen tačkama A, B, C i D kao i visinu iz temena D tog tetraedra.
3. Naći vektor $\vec{x}$ iz uslova $\vec{x} \cdot \vec{a} = 1$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = 2$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = 3$, gde je $\vec{a}(2,-4,3)$, $\vec{b}(3,-1,5)$, $\vec{c}(1,-2,4)$.
4. Dati su vektori $\vec{a}(p+2,-1,2)$, $\vec{b}(-6,p,-3)$, $\vec{c}(-p,2,-1)$.
   a) Odrediti parametar p tako da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ budu ortogonalni.
   b) Odrediti parametar p tako da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ budu komplanarni, i u tom slučaju razložiti vektor $\vec{a}$ u pravcu vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

5 ANALITIČKA GEOMETRIJA

1. Napisati jednačinu ravni koja
   a)Sadrži tačku $M(-2,1,5)$ i ortogonalna je na vektor $\vec{n}(2,5,-3)$.
   b)Sadrži tačke $A(1,2,3), B(-1,2,5), C(7,0,-1)$.
   c)Sadrži tačku $M(-2,1,4)$ i normalna je na y-osu.
2. Date su dve prave p i q. Odrediti parametar m tako da ove prave pripadaju istoj ravni. Zatim naći presečnu tačku ovih pravih.
$$(p): \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1}, \quad (q): \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{m}.$$
3. Naći ugao izmedju prave $(p): \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{-4}$ i ravni $\alpha: -4x + 5y - 7z + 24 = 0$ i odrediti tačku prodora prave kroz ravan.
4. Odrediti parametar t tako da ravni $\alpha: 3x + 6y + z + 5 = 0$ i $\beta: tx - y + 3tz + 2 = 0$ budu ortogonalne.
5. Naći tačku simetričnu tački $M(0,-2,1)$ u odnosu na ravan $\alpha: 4x - y + 3z - 1 = 0$. Odrediti rastojanje tačke M od ravni α.
6. Date su jednačine ravni α i β:
$$\alpha: \ x + 3y + z - 3 = 0 \quad \text{i} \quad \beta: \ x - z - 1 = 0.$$
   a) Naći ugao koji zaklapaju ravni α i β.
   b) Napisati jednačinu prave koju formiraju ravni α i β.
   c) Napisati jednačinu normale na ravan α koja prolazi kroz tačku $M(1,1,1)$.
7. Date su tačke $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$ i prava $q: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-5}{7} = \frac{z}{11}$
   a) Napisati jednačinu prave p koja prolazi kroz tačke A i B.
   b) Napisati jednačinu ravni α koja je paralelna pravoj p i dadrži pravu q.
   c) Naći ugao između pravih p i q.
8. Date su tačke $A(2,3,5)$, $B(0,-1,4)$, $C(1,0,3)$ i $D(-1,-2,m)$.
   a) Odrediti ravan α koja prolazi kroz tačke A, B i C.
   b) Odrediti parametar m tako da sve četiri tačke pripadaju istoj ravni.