Решења са испита из Математике 2

09.09.2014.

① Решити д.ј. $y''-y'-2y=xe^{2x}$.

Р] I начин. (метод неодређених коефицијената)

$k^2-k-2=0 \Rightarrow k_1=2,\ k_2=-1 \Rightarrow y_h(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$.

Како је $k_1=2=\alpha$, партикуларно решење тражимо у облику

$y_p(x)=x\cdot(Ax+B)e^{2x}=e^{2x}\cdot(Ax^2+Bx)$.

добија се

$$y_p'(x)=e^{2x}\cdot\left(2Ax^2+(2A+2B)x+B\right)$$

$$y_p''(x)=e^{2x}\left(4Ax^2+(8A+4B)x+2A+4B\right)$$

Заменом у почетну д.ј. добијамо

$$e^{2x}(6Ax+2A+3B)=e^{2x}\cdot x$$

одакле је $6A=1$ и $2A+3B=0$ па је $A=\frac{1}{6},\ B=-\frac{1}{9}$.

Следи $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{9}x\right)e^{2x}$.

II начин. (метод варијације констаната)

Као и малопре, $y_h(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$.

Опште решење тражимо у облику $y(x)=C_1(x)e^{2x}+C_2(x)e^{-x}$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{2x}+C_2'(x)e^{-x}=0 \\ C_1'(x)(e^{2x})'+C_2'(x)(e^{-x})'=xe^{2x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)e^{2x}+C_2'(x)e^{-x}=0 \\ 2C_1'(x)e^{2x}-C_2'(x)e^{-x}=xe^{2x}\end{cases}$$

Сабирањем добијамо, $3C_1'(x)e^{2x}=xe^{2x}$ тј. $C_1'(x)=\frac{x}{3}$.

Заменом у прву ј-ну добијамо $C_2'(x)=-\frac{1}{3}xe^{3x}$.

$$C_1(x)=\int\frac{x}{3}\,dx=\frac{x^2}{6}+D_1$$

$$C_2(x)=\int-\frac{1}{3}xe^{3x}\,dx=\left|\begin{array}{l} u=x\to du=dx \\ dv=e^{3x}dx\to v=\int e^{3x}dx=\left|\begin{array}{l}t=3x\\ dt=3dx\end{array}\right|= \\ \qquad =\int e^t\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}e^t=\frac{1}{3}e^{3x}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x}\right)=-\frac{1}{9}xe^{3x}+\frac{1}{27}e^{3x}+D_2$$

Дакле, $y(x)=\left(\frac{x^2}{6}+D_1\right)e^{2x}+\left(-\frac{1}{9}xe^{3x}+\frac{1}{27}e^{3x}+D_2\right)e^{-x}=$

$=\frac{x^2}{6}e^{2x}-\frac{1}{9}xe^{2x}+\boxed{D_1e^{2x}+\frac{1}{27}e^{2x}}+D_2e^{-x}$ → Можемо да заменимо са D_3e^{2x}, где је $D_3=D_2+\frac{1}{27}$

(2) Испитати екстремне вр. ф-је $z(x,y)=9x^3+\frac{y^2}{2}+3xy-3x+y$.

Р.

$$\left.\begin{array}{l} z'_x = 27x^2+3y-3=0\,/:3 \longrightarrow 9x^2+y-1=0 \\ z'_y = y+3x+1=0 \longrightarrow y=-3x-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2+(-3x-1)-1=0 \longrightarrow 9x^2-3x-2=0$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{2}{3},\ x_2=-\frac{1}{3} \Rightarrow y_1=-3\cdot\frac{2}{3}-1=-3,$$

$$y_2=-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-1=0 \Rightarrow M_1\left(\frac{2}{3},-3\right),\quad M_2\left(-\frac{1}{3},0\right).$$

$$z''_{xx}=54x \qquad z''_{yy}=1 \qquad z''_{xy}=3 \Rightarrow D=54x-9.$$

1) $D(M_1)=54\cdot\frac{2}{3}-9>0$, $z''_{xx}=54\cdot\frac{2}{3}>0 \Rightarrow$

Ф-ја достиже лок. минимум у $M_1(\frac{2}{3},-3)$ и он износи

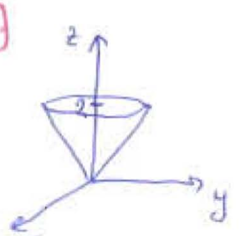
$z_{min}=z(\frac{2}{3},-3)=\cdots=-\frac{23}{6}$.

2) $D(M_2)=54\cdot(-\frac{1}{3})-9<0 \Rightarrow$ ф-ја не достиже екстр. вр.

у тачки $M_2(-\frac{1}{3},0)$ тј. M_2 је седласта тачка.

(3) Изр. запремину тела ограниченог конусом $x^2+y^2=4z^2$ и равни $z=2$.

Р.



$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$$

Преласком на цилиндричне координате добијамо

$x=r\cos\varphi$

$y=r\sin\varphi$

$z=h$

$x^2+y^2=r^2$

$J=r$

$x^2+y^2=4z^2 \longrightarrow r^2=4h^2 \longrightarrow \boxed{h=\frac{r}{2}}$

$z=2 \longrightarrow \boxed{h=2} \longrightarrow 2=\frac{r}{2} \longrightarrow \boxed{r=4}$.

Дакле, границе су

$0\le\varphi\le 2\pi$

$0\le r\le 4$

$\frac{r}{2}\le h\le 2$ → види се са слике

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4 dr\int_{\frac{r}{2}}^2 r\,dh=$$

$$=\boxed{\varphi\Big|_0^{2\pi}}\cdot\int_0^4 dr\cdot r\cdot h\Big|_{h=\frac{r}{2}}^{h=2} = (2\pi-0)\cdot\int_0^4 r\cdot\left(2-\frac{r}{2}\right)dr=$$

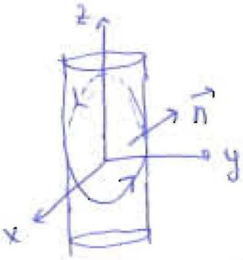
Можемо одмах да рачунамо јер се φ ~~не јавља~~ више нигде не јавља.

$$=2\pi\int_0^4\left(2r-\frac{r^2}{2}\right)dr=$$

$$=2\pi\cdot\left(r^2-\frac{r^3}{6}\right)\Big|_0^4=2\pi\cdot\left(16-\frac{64}{6}\right)=$$

$$=\frac{32}{3}\pi.$$

(4) Изр. циркулацију в. п. $\vec{F} = (2z-y^2)\vec{i} + (2x-z^2)\vec{j} + (2y-x^2)\vec{k}$ по контури насталој у пресеку равни $x+y+z=4$ и цилиндра $x^2+y^2=16$. Контура је позитивно оријентисана када се гледа са врха z-осе.

Р. 

Циркулација је криволинијски интеграл II врсте

$$C = \oint_{\vec{c}} (2z-y^2)\,dx + (2x-z^2)\,dy + (2y-x^2)\,dz$$

Можемо применити Стоксову ф-лу

$$C = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z-y^2 & 2x-z^2 & 2y-x^2 \end{vmatrix} dS = \iint_S \big(\cos\alpha(2+2z) - \cos\beta(-2x-2) + \cos\gamma(2+2y)\big)\,dS$$

Површ S је ограничена кривом $\vec{c}$ па је S део равни $x+y+z=4$.

$$z = 4-x-y \;\rightarrow\; p = z'_x = -1,\quad q = z'_y = -1,\quad \sqrt{p^2+q^2+1} = \sqrt{3}.$$

$$\cos\alpha = \frac{-1}{\pm\sqrt{3}},\quad \cos\beta = \frac{-1}{\pm\sqrt{3}},\quad \cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{3}}$$

Узимамо знак $-$ јер је γ оштар угао. Сада је

$$C = \iint_S \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(2+2z) - \frac{1}{\sqrt{3}}(-2x-2) + \frac{1}{\sqrt{3}}(2+2y)\right] dS = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (x+y+z+3)\,dS$$

По познатој ф-ли је

$$C = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_D (x+y+(4-x-y)+3)\cdot \overbrace{\boxed{\sqrt{p^2+q^2+1}}}^{\sqrt{3}}\,dx\,dy = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_D 7\sqrt{3}\,dx\,dy$$

$$C = 14 \iint_D dx\,dy = 14\cdot P(D)$$

D је пројекција површи S на раван xy. Све се налази унутар цилиндра $x^2+y^2=16$, па је D круг.

$$D:\; x^2+y^2 = 16 = 4^2 \implies P(D) = 4^2\pi = 16\pi$$

$$\boxed{C = 14\cdot 16\pi = 224\pi.}$$

Интеграл $\iint_D dx\,dy$ можемо рачунати и преласком на поларне координате

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$J = r$
$0 \le \varphi \le 2\pi$
$0 \le r \le 4$

$$\iint_D dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 r\,dr = 2\pi\cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^4 = 16\pi.$$

⑤ Дато је в. п. $\vec{F} = (x^2+az)\vec{i} + 3yz^2\vec{j} + (by^2z+2x)\vec{k}$.

Одр. a и b тако да поље буде потенцијално и нађи његов потенцијал.

Р] $\vec{F}$ је потенцијално ако и само ако је $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$.

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+az & 3yz^2 & by^2z+2x \end{vmatrix} = \vec{i}\,(2byz - 6yz) - \vec{j}\,(2-a) + \vec{k}\,(0-0).$$

Следи $2byz - 6yz = 0 \Rightarrow \boxed{b=3}$ и $2-a=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$.

Потенцијал налазимо по познатој ф-ли.

$$f(x,y,z) = \int_0^x P(t,0,0)\,dt + \int_0^y Q(x,t,0)\,dt + \int_0^z R(x,y,t)\,dt$$

$$P(t,0,0) = (x^2+2z)\big|_{(t,0,0)} = t^2 + 2\cdot 0 = t^2$$

$$Q(x,t,0) = (3yz^2)\big|_{(x,t,0)} = 3\cdot t\cdot 0^2 = 0$$

$$R(x,y,t) = (3y^2z+2x)\big|_{(x,y,t)} = 3y^2t + 2x$$

$$f(x,y,z) = \int_0^x t^2\,dt + \int_0^y 0\cdot dt + \int_0^z (3y^2t+2x)\,dt =$$

$$= \frac{t^3}{3}\Big|_0^x + 0 + \left(3y^2\cdot\frac{t^2}{2} + 2x\cdot t\right)\Big|_{t=0}^{t=z} =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}y^2z^2 + 2xz.$$