Matematika 3

Redovi

(zadaci)

1 Brojni redovi

1. Ispitati konvergenciju i naći sumu redova

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)},\qquad B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Rešenje. $A=3/4$, $B=1$.

2. Ispitati konvergenciju i naći sumu redova

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{4},\qquad B=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big).$$

Rešenje. A - neodređeno divergentan, $B=+\infty$.

3. Dat je jednakostranični trougao $\triangle ABC$ površine $P=1$. Odrediti sredine stranica A_1, B_1 i C_1 i formirati trougao $\triangle A_1B_1C_1$. U trouglu $\triangle A_1B_1C$ naći sredine stranica A_2, B_2 i C_2 i formirati trougao $\triangle A_2B_2C_2$, itd. Odrediti površinu figure

$$\cup_{n=1}^{\infty}\triangle A_nB_nC_n.$$

Rešenje. $P=1/3$.

4. Dat je kvadrat $\square A_0B_0C_0D_0$ površine $P=1$. Odrediti tačke A_1, B_1, C_1 i D_1 kao sredine stranica A_0B_0, B_0C_0, C_0D_0 i D_0A_0 redom, a zatim formirati trougao $\triangle A_0A_1D_1$. U kvadratu $\square A_1B_1C_1D_1$ odrediti sredine stranica A_2, B_2, C_2 i D_2 i formirati trougao $\triangle A_1A_2D_2$, itd. Odrediti površinu figure

$$\cup_{n=1}^{\infty}\triangle A_nB_{n+1}D_{n+1}.$$

Rešenje. $P=1/4$.

5. (Kohova pahulja - Koch's snowflake) Dat je jednakostranični trougao $\triangle ABC$ čija je stanica $a>0$. Podeliti stranice na tri jednaka dela tačkama A_1^1, B_1^1, A_1^2, B_1^2 i A_1^3 i B_1^3 i formirati jednakostranične trouglove $A_1^1B_1^1C_1^1$,

$A_1^2B_1^2C_1^2$ i $A_1^3B_1^3C_1^3$ tako da tačke C_1^1, C_1^2 i C_1^3 budu izvan trougla ABC. Izbrisati duži $A_1^1B_1^1$, $A_1^2B_1^2$ i $A_1^3B_1^3$. Ponoviti ovaj postupak n - puta. Kolika je dužina tako dobijene Kohove krive, a kolika površina lika koji ona ograničava posle beskonačno mnogo koraka?

Rešenje. Obim i površina na početku su $O_0 = 3a$ i $P_0 = a^2\sqrt{3}/4$. Posle n-koraka oni iznose

$$O_n = 3a\Big(\frac{4}{3}\Big)^n, \qquad P_n = P_0\Big(1 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\big(\frac{4}{9}\big)^k\Big).$$

Posle beskonačno mnogo koraka, dobijamo da je Kohova kriva neograničene dužine $O = \infty$, a površina koju ograničava je konačna i iznosi $P = 8P_0/5$.

6. Ispitati konvergenciju redova

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}, \qquad B = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}, \qquad C = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n})^n}{n!}\ .$$

Rešenje. A-divergentan, B-konvergentan, C-konvergentan.

7. Ispitati konvergenciju redova

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sin\frac{1}{n}\Big)^n, \qquad B = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n2^{n+1}}, \qquad C = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n-2}{n+2}\Big)^{n(n+1)}.$$

Rešenje. A-konvergentan, B-divergentan, C-konvergentan.

8. Ispitati konvergenciju redova

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}, \qquad B = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}, \qquad C = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ .$$

Rešenje. A-konvergentan, B-konvergentan, C-divergentan.

Primeniti Košijev integralni kriterijum.

9. Ispitati konvergenciju redova

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}, \qquad B = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}, \qquad C = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n+4^n}\ .$$

Rešenje. A-konvergentan, B-divergentan, C-konvergentan.

10. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju redova

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}, \qquad B = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}, \qquad C = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Rešenje. Svi su uslovno neapsolutno konvergentni.

11. Zašto se ne može primeniti Lajbnicov test na red

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} + \cdots ?$$

Ispitati konvergenciju ovog reda poredbeim kriterijumom. *Rešenje.* Ovaj red se može napisati u obliku

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n, \quad \text{gde je} \quad b_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}-1}, b_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}+1} \ .$$

Kako je

$$b_{2n-1} - b_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}-1} - \frac{1}{\sqrt{2n-1}+1} = \frac{1}{n-1} > 0,$$

$$b_{2n} - b_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}+1} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}-1} = -\frac{2+\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{(\sqrt{2n-1}+1)(\sqrt{2n+1}-1)} < 0,$$

niz članova reda nije monoton, pa se ne sme primeniti Lajbnicov test iako je $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

S druge strane, važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_{2n-1} - b_{2n}) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} = +\infty,$$

pa je ovaj red određeno divergentan.

2 Funkcionalni redovi

1. Ispitati konvergenciju redova

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^3}, \qquad B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha} \quad (\alpha > 1).$$

Rešenje. Uniformno konvergentni po Vajerštrasovom kriterijumu.

2. Odrediti oblast konvergencije stepenih redova

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \ , \qquad B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} x^n.$$

Rešenje. $I_A = [-1, 1]$; $\quad I_B = (-2, 2]$

3. Odrediti oblast konvergencije stepenih redova

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(2n+1)^2} \ , \qquad B = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n^2} (x-1)^n.$$

Rešenje. $I_A = [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$; $\quad I_B = (1 - 1/e, 1 + 1/e]$

4. Odrediti oblast konvergencije stepenih redova

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n; \qquad B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}} \ .$$

Rešenje. $I_A = \{0\}$; $\quad I_B = (-\infty, +\infty)$

5. Sledeće funkcije razviti u stepeni red i odrediti oblast konvergencije

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 10x + 24} \ , \qquad g(x) = \frac{x-3}{(x+1)^2} \ .$$

Rešenje.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{8 \cdot 4^n} - \frac{1}{4 \cdot 6^n} \Big) x^n \quad (|x| < 4);$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Big(1 - 4(n+1) \Big) x^n \quad (|x| < 1)$$

6. Sledeće funkcije razviti u stepeni red i odrediti oblast konvergencije

$$f(x) = \arcsin x \ , \qquad g(x) = \arctan x.$$

Rešenje.

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| \le 1);$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| \le 1)$$

7. Odrediti oblast konvergencije i sumu reda

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1}$$

Rešenje. $A(x)=\frac{2}{(2-x)^2}$, $x\in(-2,2)$.

8. Odrediti oblast konvergencije stepenog reda i sumu redova

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{3^n}, \qquad B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3\cdot 4^n}\ .$$

Rešenje. $A(x)=\frac{3}{(3-x)^2}$, $x\in(-3,3)$; $B=\frac{4}{27}$.

9. Odrediti oblast konvergencije stepenog reda i sumu redova

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n, \qquad B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2^n}\ .$$

Rešenje. $A(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, $x\in(-1,1)$; $B=-\frac{2}{27}$.

10. Odrediti oblast konvergencije stepenog reda i sumu redova

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n, \qquad B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\cdot 3^n}\ .$$

Rešenje. $A(x)=-\ln(1-x)+\frac{x}{1-x}$, $x\in(-1,1)$; $B=\frac{1}{2}-\ln\frac{2}{3}$.

11. Odrediti oblast konvergencije stepenog reda i sumu redova

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n-1}\ , \qquad B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(n+1)2^{n-1}}\ .$$

Rešenje. $A(x)=\frac{1}{x^2}\left(\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}\right)$, $x\in(-1,1)$; $B=4(\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{2})$.

12. Odrediti oblast konvergencije stepenog reda i sumu redova

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}x^n, \qquad B=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}.$$

Rešenje. $A(x)=e^x(x+1)$, $x\in(-\infty,+\infty)$; $B=3e^2$.

3 Trigonometrijski redovi

1. Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x < 0 \\ bx, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

($a < 0 < b$) razviti u Furijeov red na intervalu $(-\pi, \pi)$, a zatim izračunati sumu reda $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Rešenje.

$$f(x) = \frac{b-a}{4}\pi + \frac{2}{\pi}(a-b)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + (a+b)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\sin nx,$$

$$S = f(0) = \frac{\pi^2}{8}\ .$$

2. Funkciju

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

razviti u Furijeov red, a zatim naći zbir reda $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Rešenje. $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad S = f(0) = \frac{\pi^2}{12}$.

3. Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2, & -\pi \le x \le 0 \\ (x-\pi)^2, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

razviti u Furijeov red, a zatim naći sumu reda: $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Rešenje. $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \qquad S = f(0) = \frac{\pi^2}{6}$.

4. Funkciju

$$f(x) = |\sin x|, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

razviti u Furijeov red, a zatim naći zbir reda $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Rešenje. $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}, \qquad S = f(0) = \frac{1}{2}$.

5. Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2}, & 0 \le x < \pi \\ -\frac{\pi+x}{2}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

razviti u Furijeov red.

Rešenje. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

6. Funkciju

$$f(x) = \frac{\pi}{8}\, x(\pi - x), \quad 0 \le x < \pi,$$

razviti u Furijeov red po sinusima i naći sumu reda $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

Rešenje. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}, \qquad S = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^3}{32}$.

7. Funkciju

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin x, \quad x \in [0, \pi],$$

razviti u Furijeov red po kosinusima i naći sumu reda $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}$.

Rešenje. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}, \qquad S = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

Predmetni nastavnik