

Matematika 3

Kompleksna analiza

(zadaci)

1 Kompleksne funkcije, nizovi i redovi

1. Nacrtati sledeće skupove kompleksnih brojeva:

a) $A : |z-i| > 1$, b) $B : \pi/3 < \arg(z+i) \leq \pi/3$, c) $C : \operatorname{Re}(z-1-i) > 1$.

Rešenje. a) Kompleksna ravan bez kruga $K(i, 1)$;

b) Isečak izmedju polupravih $y = x - 1$ i $y = \sqrt{3}x - 1$ za $x > 0$;

c) Kompleksna poluravan $x > 2$.

2. Napisati u algebarskom obliku kompleksne brojeve:

a) $A = e^{\ln 5 + \pi i}$, b) $B = \cos(2 + i)$, c) $C = i^i$.

Rešenje. a) $A = 5$; b) $B = \cos 2 \cosh 1 - i \sin 2 \sinh 1$;

c) $C = e^{(2k-1/2)\pi}$ ($k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$).

3. Odrediti granične vrednosti:

a) $A = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i}$, b) $B = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - |z|}{1 - z}$.

Rešenje. a) $A = 2i$, b) ne postoji.

4. Odrediti oblasti u kompleksnoj ravni u kojoj konvergiraju redovi:

a) $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - 2 - i)^n$, b) $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{n!}$.

Rešenje. a) krug $|z - 2 - i| < 1$, b) svuda u \mathbb{C} .

5. Odrediti oblasti u kompleksnoj ravni u kojoj konvergiraju redovi:

a) $A(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$, b) $B(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n(z - i)^n}{2^n}$,

Rešenje. a) prsten $1 < |z| < 3$, b) prsten $1 < |z - i| < 2$.

2 Analitičke funkcije

1. Odrediti oblasti u kompleksnoj ravni u kojima su analitičke funkcije:

$$a) w = e^z, \quad b) w = \frac{2-z}{2+z}, \quad c) w = |z|z.$$

Rešenje. a) $A = \mathbb{C}$, b) $B = \mathbb{C} \setminus \{-2\}$, c) nigde.

2. Odrediti funkciju $w = f(z)$ analitičku u celoj kompleksnoj ravni čiji je imaginarni deo $v(x, y) = 1 + x - 2xy$, a vrednost $f(0) = i$.

Rešenje. $f(z) = -z^2 + i(1+z)$.

3. Odrediti funkciju $w = f(z)$ analitičku u celoj kompleksnoj ravni čiji je imaginarni deo $v(x, y) = x^3 - 3xy^2$, a vrednost $f(0) = 1$.

Rešenje. $f(z) = 1 + iz^3$.

4. Odrediti funkciju $w = f(z)$ analitičku u kompleksnoj ravni čiji je imaginarni deo $v(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, a vrednost $f(2) = 0$.

Rešenje. $f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{z}$.

5. Odrediti funkciju $w = f(z)$ analitičku u celoj kompleksnoj ravni čiji je realni deo $u(x, y) = x^2 + xy - y^2$, a vrednost $f(0) = 0$.

Rešenje. $f(z) = \frac{2-i}{2}z^2$.

6. Odrediti funkciju $w = f(z)$ analitičku u celoj kompleksnoj ravni čiji je realni deo $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y) + x - 2y$, a vrednost $f(0) = 0$.

Rešenje. $f(z) = ze^z$.

7. Odrediti funkciju $w = f(z)$ analitičku u celoj kompleksnoj ravni čiji je realni deo $u(x, y) = x^2 + x - y^2$, a vrednost $f(0) = i$.

Rešenje. $f(z) = z^2 + z + i$.

8. Da li postoji funkcija $w = f(z)$ analitička u celoj kompleksnoj ravni čiji je realni deo $u(x, y) = x^2y - 4x + 5xy^2$?

Rešenje. Ne, zato što $u(x, y)$ nije harmonijska funkcija jer važi $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 2y + 10x$.

Predmetni nastavnik

dr *Predrag Rajković*, red. prof.