Mašinski fakultet u Nišu - Diplomske studije - Proizvodno inženjerstvo

3. februar 2014.

REŠENJA ZADATAKA
DRUGOG KOLOKVIJUMA IZ MATEMATIKE 3

Grupa A

1. pitanje: Ostatak analitičke funkcije.

1. zadatak: Izračunati

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{e^z \, dz}{(z-i)^3(z+2)} \, .$$

Rešenje: Kriva je krug sa središtem u $z_0 = 1$ i poluprečnika $R = 2$.

Polovi funkcije

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-i)^3(z+2)}$$

su $z_1 = i$ i $z_2 = -2$. Unutar krive je samo pol $z_1 = i$ koji je trećeg reda ($m = 3$). Stoga ostatak funkcije računamo po formuli

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_1} \left((z-z_1)^m f(z)\right)^{(m-1)} . \quad \Rightarrow \quad \operatorname*{Res}_{z=i} = \frac{1}{2!} \lim_{z \to i} \left(\frac{e^z}{z+2}\right)^{(2)} .$$

Kako je

$$\left(\frac{e^z}{z+2}\right)' = \frac{(1+z)}{(z+2)^2}, \qquad \left(\frac{e^z}{z+2}\right)'' = \frac{(2+2z+z^2)}{(z+2)^3} e^z,$$

to je vrednost integrala jednaka

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \frac{(1+2i)}{2(i+2)^3} e^i = 2\pi i \Big(\frac{24-7i}{250}\Big) e^i \, ,$$

tj. u algebarskom obliku

$$I = \frac{\pi}{125}\Big((7\cos 1 - 24\sin 1) + i(24\cos 1 + 7\sin 1)\Big) \, .$$

2. pitanje: Homogena diferencijalna jednačina n-tog reda.

2. zadatak: Po nepoznatoj funkciji $y(x)$ rešiti jednačinu

$$y^{VI} + y''' = 0 \, .$$

Rešenje: Pridružena karakteristična jednačina glasi

$$k^6 + k^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k^3(k+1)(k^2 - k + 1) = 0.$$

Njena rešenja su $k_{1,2,3} = 0, \quad k_4 = -1, \quad k_{5,6} = \frac{1 \pm \mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$. Zapazimo da je

$$\mathbf{e}^{\frac{1\pm\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}x} = \mathbf{e}^{x/2}\Big(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \mathbf{i}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big) = \mathbf{e}^{x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \mathbf{i}\mathbf{e}^{x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

odakle možemo izdvojiti dva linearno nezavisna rešenja.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine je

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\mathbf{e}^{-x} + \mathbf{e}^{x/2}(C_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_6\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)\ .$$

3. pitanje: Nehomogena parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda.

3. zadatak: Rešiti

$$xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial x} = -xy.$$

Rešenje: Pridruženi sistem diferencijalnih jednačina glasi

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}.$$

Posle množenja sa z, iz prve jednačine dobijamo

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; \int\frac{dx}{x} = \int\frac{dy}{y} + C \;\Rightarrow\; \ln x - \ln y = C \quad\Rightarrow\quad \varphi_1 \equiv \frac{x}{y} = C_1.$$

Linearna kombinacija svih daje

$$\frac{ydx}{yxz} + \frac{xdy}{xyz} + \frac{2zdz}{-2zxy} = \frac{ydx + xdy + 2zdz}{0} \quad\Rightarrow\quad \varphi_1 \equiv xy + z^2 = C_2.$$

Rešenje sistema preko prvih integrala glasi

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad xy + z^2 = C_2$$

Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine glasi

$$F\left(\frac{x}{y}, xy + z^2\right) = 0.$$

Provera.

$$F'_x = F'_{\varphi_1} \cdot \frac{1}{y} + F'_{\varphi_2} \cdot (y + 2z\frac{\partial z}{\partial x}), \quad F'_y = F'_{\varphi_1} \cdot \frac{-x}{y^2} + F'_{\varphi_2} \cdot \left(x + 2z\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

odakle je

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{y}\frac{F'_{\varphi_1}}{F'_{\varphi_2}} - y, \quad 2z\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y^2}\frac{F'_{\varphi_1}}{F'_{\varphi_2}} - x.$$

Zamenom ovih izraza u parcijalnu diferecnijalnu jednačinu, potvrđujemo da su ovo njena rešenja.

Napomena. Kada je teško pronaći drugi prvi integral, treba iskoristiti već nađeni tako što se on ubaci u sistem, pa pronađe još jedno rešenje, a potom elimiše prva konstanta.

4. pitanje: Laplasova transformacija n-tog izvoda funkcije.

4. pitanje: Po nepoznatim funkcijama $x(t)$ i $y(t)$, primenom Laplasove transformacije, rešiti sistem

$$x' - 2x - 4y = \cos t, \quad y' + x + 2y = \sin t, \quad x(0) = y(0) = 0.$$

Koristiti tabelu

$$L[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^t] = \frac{1}{p-1}, \quad L[\cos t] = \frac{p}{p^2+1}, \quad L[\sin t] = \frac{1}{p^2+1}.$$

Rešenje: Označimo sa $X(p) = L[x]$ i $Y(p) = L[y]$. Primenom Laplasove transformacije na sistem

$$L[x'] - 2L[x] - 4L[y] = L[\cos t], \quad L[y'] + L[x] + 2L[y] = L[\sin t],$$

dobijamo algebarski sistem

$$pX(p) - 2X(p) - 4Y(p) = \frac{p}{1+p^2}, \quad pY(p) + X(p) + 2Y(p) = \frac{1}{1+p^2}.$$

čija su rešenja

$$X(p) = \frac{p^2+2p+4}{p^2(1+p^2)}, \quad Y(p) = \frac{-2}{p^2(1+p^2)}.$$

Odavde se primenom inverzne Laplasove transformacije dobija

$$x = 4t + 2 - 2\cos t - 3\sin t, \quad y = -2t + 2\sin t.$$

Grupa B

1. pitanje: Loranov red funkcije.

1. zadatak: Razviti u Loranov red funkciju

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

oko tačke $z_0 = 1$ u prstenu $|z-1| < 1$. Na osnovu reda izračunati

$$\oint\limits_{|z-1|=1/2} \frac{dz}{(z-1)(z-2)} \ .$$

Rešenje: Primenom razvoja u geometrijski red, dobijamo

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{-1}{(1-(z-1))} = \frac{-1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n,$$

odakle

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \cdots - (z-1)^n - \cdots \ .$$

Odavde se vidi da je ostatak funkcije $A_{-1} = -1$, pa je integral jednak

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 2\pi i(-1) = -2\pi i.$$

2. pitanje: Metod varijacije konstanata za nehomogene diferencijalne jednačine.

2. zadatak: Po nepoznatoj funkciji $y(x)$ rešiti jednačinu

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{1+x}.$$

Rešenje: Rešavanjem karakteristične jednačine

$$E(k) = k^2 + 2k + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_{1,2} = -1,$$

nalazimo opšte rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine

$$y_H(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Metod varijacije konstanata problem se svodi na sistem

$$C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)xe^{-x} = 0,$$
$$C_1'(x)(-e^{-x}) + C_2'(x)e^{-x}(1-x) = 3e^{-x}\sqrt{1+x}.$$

Rešenja ovog sistema su

$$C_1'(x) = -3x\sqrt{1+x}, \quad C_2'(x) = 3\sqrt{1+x}.$$

Integracijom dobijamo

$$C_1(x) = -3\int x\sqrt{1+x}\,dx = -\frac{2}{5}(1+x)^{3/2}(-2+3x) + D_1,$$
$$C_2(x) = 3\int \sqrt{1+x}\,dx = 2(1+x)^{3/2} + D_2,$$

Opšte rešenje je

$$y = e^{-x}(D_1 + D_2x) + \frac{4}{5}\,e^{-x}(1+x)^{5/2}\,.$$

3. pitanje: Algebarski sistemi diferencijalnih jednačina.
3. zadatak: Po nepoznatim funkcijama $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$, rešiti sistem

$$x'(t) = y+z, \quad y'(t) = z+x, \quad z'(t) = x+y.$$

Rešenje. Ovaj sistem možemo napisati u obliku linearnog sistema diferencijalnih jednačina

$$x'(t) = y+z, \quad y'(t) = z+x, \quad z'(t) = x+y.$$

Pretpostavljajući da ima rešenja u obliku $x = \lambda e^{rt}$, $y = \mu e^{rt}$ i $x = \nu e^{rt}$, problem svodimo na algebarski sistem

$$r\lambda - \mu - \nu = 0, \quad -\lambda + r\mu - \nu = 0, \quad -\lambda - \mu + r\nu = 0.$$

Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} r & -1 & -1 \\ -1 & r & -1 \\ -1 & -1 & r \end{vmatrix} = (r+1)^2(r-2).$$

Za $r = -1$ sistem se svodi na jednu jednačinu $\lambda + \mu + \nu = 0.$ Stoga imamo 2 slobodne promenljive i 2 linearno nezavisna rešenja $\lambda_1 = 1,\ \mu_1 = 0,\ \nu_1 = -1$ i $\lambda_2 = 0,\ \mu_2 = 1,\ \nu_2 = -1$.

Za $r = 2$ sistem se svodi na dve jednačine $2\lambda - \mu - \nu = 0$ i $-\lambda + 2\mu - \nu = 0.$ Jedno rešenje je $\lambda_3 = 1,\ \mu_3 = 1,\ \nu_3 = 1.$

Opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina glasi

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_3 e^{2t}, \quad y(t) = C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}, \quad z(t) = -(C_1 + C_2) e^{-t} + C_3 e^{2t}.$$

4. pitanje: Laplasova transformacija trigonometrijskih funkcija.
4. zadatak: Primenom Laplasove transformacije rešiti jednačinu

$$y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 2, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$$

Koristiti tabelu

$$L[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}\,, \quad L[e^t] = \frac{1}{p-1}\,, \quad L[\cos t] = \frac{p}{p^2+1}\,, \quad L[\sin t] = \frac{1}{p^2+1}\,.$$

Rešenje: Označimo sa $Y(p) = L[y]$. Primenom Laplasove transformacije na jednačinu

$$L[y''] - L[y'] - 6L[y] = L[2],$$

dobijamo

$$(p^2 Y(p) - py(0) - y'(0)) - (pY(p) - y(0)) - 6Y(p) = \frac{2}{p}\,,$$

tj.

$$(p^2 Y(p) - p) - (pY(p) - 1)) - 6Y(p) = \frac{2}{p},$$

odakle je

$$Y(p) = \frac{p^2 - p + 2}{p(p+2)(p-3)}.$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije, dobijamo

$$y = \frac{1}{15}(-5 + 8e^{3t} + 12e^{-2t})$$

.

PREDMETNI NASTAVNIK

Dr *Predrag Rajković*, red. prof.