Mašinski fakultet u Nišu - Diplomske studije - Proizvodno inženjerstvo

14. januar 2015.

REŠENJA ZADATAKA
PRVOG KOLOKVIJUMA IZ MATEMATIKE 3

1. pitanje: Vajerštrasov kriterijum.
1. zadatak: Odrediti oblast konvergencije funkcionalnog reda u realnom domenu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3 + x^4} \ .$$

Rešenje: Imamo da je

$$\left| \frac{\cos n}{n^3 + x^4} \right| < \frac{1}{n^3} \ .$$

Kako red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

konvergira po Košijevom integralnom kriterijumu, to dati funkcionalni red uniformno i apsolutno konvergira po Vajerštrasovom kriterujumu.

2. pitanje: Definicija i konvergencija trigonometrijskog reda.
2. zadatak: Razviti u Furijeov red funkciju

$$f(x) = \sin^2 x, \qquad -\pi < x < \pi.$$

Rešenje: Furijeov razvoj funkcije glasi

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

gde je

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad (n \geq 0), \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (n \geq 1).$$

Kako je funkcija parna, tj. $f(-x) = f(x)$, imamo $b_n = 0$ $(n = 1, \ldots)$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos x| \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x) \, dx \right) = \frac{4}{\pi},$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos x| \cos x \, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \cos x \cos x \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x)\cos x \, dx\right) = 0, \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos x| \cos nx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \cos x \cos nx \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x)\cos nx \, dx\right), \\
a_0 &= \frac{4}{\pi}, \quad a_1 = 0, \quad a_n = \frac{4\cos(n\pi/2)}{\pi(1-n^2)} \quad (n = 2, 3, \ldots).
\end{aligned}
$$

Iskoristiti adicionu formulu

$$
\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.
$$

3. pitanje: Nehomogena parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda.
3. zadatak: Rešiti

$$
xy\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial x} + x(1+x^2) = 0.
$$

Rešenje: Pridruženi sistem diferencijalnih jednačina glasi

$$
\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-y^2} = \frac{dz}{x(1+x^2)}
$$

Prvo, iz

$$
\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-y^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{-y}
$$

dobijamo

$$
\varphi_1 \equiv xy = C_1.
$$

Polazeći od

$$
\frac{dx}{xy} = \frac{dz}{x(1+x^2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{C_1} = \frac{dz}{x(1+x^2)} \quad \Rightarrow \quad (x+x^3)dx = C_1 dz
$$

dobijamo

$$
\varphi_2 \equiv 2x^2 + x^4 - 4xyz = C_2.
$$

Opšte rešenje glasi

$$F\left(xy, 2x^2 + x^4 - 4xyz\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4xyz = -x^4 - 2x^3 + f(xy).$$

PREDMETNI NASTAVNIK

Dr *Predrag Rajković*, red. prof.