Mašinski fakultet u Nišu - Diplomske studije - Proizvodno inženjerstvo

14. januar 2015.

REŠENJA ZADATAKA
PRVOG KOLOKVIJUMA IZ MATEMATIKE 3

1. pitanje: Vrste konvergencije funkcionalnog reda. Vajerštrasov kriterijum.

1. zadatak: Odrediti oblast konvergencije stepenog reda u realnom domenu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt[3]{3^n}} .$$

Rešenje: Prepoznajemo stepeni red čiji je opšti koeficijent

$$a_n = \frac{2^n}{\sqrt[3]{3^n}}.$$

Primenom Dalamberovog kriterijuma, dobijamo poluprečnik intervala konvergencije

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^n}{\sqrt[3]{3^n}}}{\frac{2^{n+1}}{\sqrt[3]{3^{n+1}}}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}.$$

Red je konvergentan za $x \in \left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right)$ u realnom domenu. U tački $x = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$, red divergira određeno $\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$, a u tački $x = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$, red $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ divergira neodređeno.

2. pitanje: Definicija i konvergencija trigonometrijskog reda.

2. zadatak: Razviti u Furijeov red funkciju

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/4, & -\pi < x < 0, \\ \pi/4, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

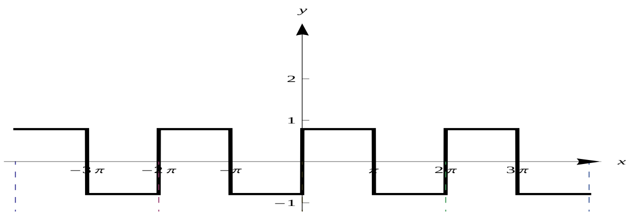
Primenom ovog reda odrediti sumu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Rešenje: Furijeov razvoj funkcije glasi

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

gde je

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad (n \ge 0), \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (n \ge 1).$$



Kako je funkcija neparna, tj. $f(-x) = -f(x)$, imamo $a_n = 0$ $(n \geq 0)$. S druge strane,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin nx \, dx.$$

tj.,

$$b_n = -\frac{1}{2} \frac{\cos nx}{n} \Big|_{x=0}^{x=\pi} = -\frac{\cos n\pi - 1}{2n} = \frac{1 - (-1)^n}{2n} \ .$$

Furijeov red glasi

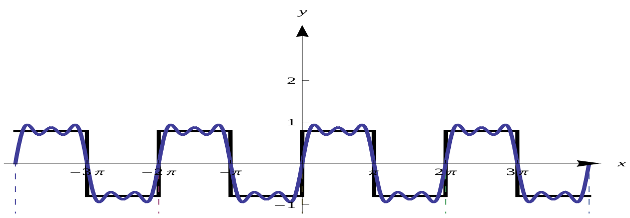
$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2n} \ \sin nx.$$

Parno članovi se anuliraju, tako da ostaje

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \ \sin(2n-1)x.$$

Zapazimo da je vrednost funkcije jednaka sumu reda u svim tačkama osim u tačkama prekida $0, \pm\pi, \pi 2\pi, \ldots$ gde je suma reda $S = 0$, a funkcija $f(0) = \pi/4$.

Konkreto za $x = \pi/2$, suma reda je $S = \pi/4$.



3. pitanje: Metod varijacije konstanata za nehomogene diferencijalne jednačine.

3. zadatak: Po nepoznatoj funkciji $y(x)$ rešiti jednačinu

$$2y'' + 5y' = \cos^2 x.$$

Rešenje: Prvo rešimo karakterističnu jednačinu

$$J(k) = 2k^2 + 5k = 0 \quad \leftrightarrow k(2k+5) = 0 \quad \Leftrightarrow k_1 = 0,\ k_2 = -5/2.$$

Tako dobijamo opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine

$$y_H(x) = C_1 + C_2 e^{-5x/2}\ .$$

Ako želimo da nastavimo metodom pogađanja partikularnog rešenja, primetimo da je

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$$

i da je $k = 0$ rešenje karakterisitične jednačine. Stoga tražimo rešenje u obliku

$$y_p(x) = Ax + B + C\cos 2x + D\sin 2x.$$

Drugi način je metodom varijacije konstanata.

Opšte rešenje glasi

$$y = C_1 + C_2 e^{-5x/2} + \frac{1}{10}x + \frac{5}{164}\sin 2x - \frac{1}{41}\cos 2x.$$

PREDMETNI NASTAVNIK

Dr *Predrag Rajković*, red. prof.