*Mašinski fakultet u Nišu - Diplomske studije - Proizvodno inženjerstvo*

*17. januar 2014.*

**REŠENJA ZADATAKA**
**PRVOG KOLOKVIJUMA IZ MATEMATIKE 3**

**Grupa A**

*1. pitanje:* Poredbeni kriterijumi za ispitivanje konvergencije redova.

*1. zadatak:* Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \,.$$

*Rešenje:* Označimo sa $b_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$. Očigledno je $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Kako je

$$n+1 < n+3 \;\Rightarrow\; \sqrt{(n+1)(n+2)} < \sqrt{(n+2)(n+3)} \;\Rightarrow\; b_n > b_{n+1}.$$

Dakle, niz $\{b_n\}$ monotono opada ka nuli. Zato red uslovno konvergira po Lajbnicu. Apsolutno divergira na osnovu poredbenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

*2. pitanje:* Vrste konvergencije funkcionalnog reda. Vajerštrasov kriterijum.

*2. zadatak:* Odrediti oblast konvergencije stepenog reda u realnom i kompleksnom slučaju:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}(x-1)^{2n}}{(2n+1)^2} \,.$$

*Rešenje:* Poluprečnik konvergencije je $R = \sqrt{2}/2$. Red je konvergentan na intervalu $(1-\sqrt{2}/2, 1+\sqrt{2}/2)$ u realnom domenu, a u kompleksnom u krugu $|z-1| < \sqrt{2}/2$. U tačkama $1 \pm \sqrt{2}/2$ takođe konvergira.

*3. pitanje:* Definicija i konvergencija trigonometrijskog reda.

*3. zadatak:* Razviti u Furijeov red funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-\pi-x}{3}, & -\pi < x < 0 \\ \frac{\pi-x}{3}, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Na osnovu toga naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

*Rešenje:* Furijeov razvoj funkcije glasi

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

gde je

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad (n \geq 0), \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad (n \geq 1).$$

Kako je funkcija neparna, tj. $f(-x) = -f(x)$, imamo $a_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Za $n = 1, 2, \ldots,$, važi

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{3}\sin nx\,dx.$$

tj.,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi}{3}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx - \frac{1}{3}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\Big).$$

Primenom parcijalne integracije, dobijamo

$$b_n = \frac{2}{3n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Kako je funkcija $f$ neprekidna to je Furijeov red jednak funkciji

$$f(x) = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

Konkretno, za $x = \pi/2$, imamo

$$\frac{\pi - \pi/2}{3} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}\ .$$

Kako je $\sin n\pi = 0,\ \sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, ostaje

$$\frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1} \quad \Rightarrow \quad S = \pi/4.$$

*4. pitanje:* Izdvajanje realnog i imaginarnog dela kompleksne funkcije $e^{z^2}$.

*4. zadatak:* Odrediti funkciju $w = f(z) = u + iv$ analitičku u celoj kompleksnoj ravni čiji je realni deo $u(x, y) = x + x^2 + xy - y^2$, a vrednost $f(0) = 0$.

*Rešenje*. Prvi parcijalni izvodi su:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 2x + y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y,$$

Kako važi
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0,$$
funkcija $u(x,y)$ može biti realni deo analitičke funkcije $w = f(z) = u + iv$. Analitička funkcija zadovoljava Koši-Rimanove uslove
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$
Odatle dobijamo
$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1 + 2x + y,$$
tj.
$$v = \int (1 + 2x + y)dy + \varphi(x) = y + 2xy + \frac{1}{2}y^2 + \varphi(x).$$
Diferenciranjem $v(x,y)$ po $x$-u i na osnovu drugog Koši-Rimanovog uslova, imamo
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x) = -(x - 2y).$$
Stoga je
$$\varphi'(x) = -x \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C.$$
Sada možemo kompletirati funkciju $v$
$$v = y + 2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$$
i analitičku funkciju $f$:
$$f(z) = u + iv = (x + x^2 + xy - y^2) + i(y + 2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C).$$
Ova funkcija definisana na realnoj pravoj
$$f(x+i0) = (x+x^2+x0-0^2)+i(0+2x0+\frac{1}{2}0^2-\frac{1}{2}x^2+C) = x+x^2-\frac{i}{2}x^2+C,$$
prema teoremi o analitičkom produženju, se može dodefiniati u kompleksnoj ravni kao
$$f(z) = z + z^2 - \frac{i}{2}z^2 + C \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Iz uslova $f(0) = 0$, određujemo $C = 0$, pa je konačni oblik analitičke funkcije

$$f(z) = \big(1 - \frac{i}{2}\big)z^2 + z.$$

### Grupa B

*1. pitanje:* Košijev koreni i integralni kriterijum konvergencije redova.

*1. zadatak:* Ispitati konvergenciju i naći sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \, .$$

*Rešenje:* $S = 1/3$

*2. pitanje:* Razvijanje funkcija u stepene redove.

*2. zadatak:* Funkciju

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 12}$$

razviti u stepeni red i odrediti oblast konvergencije.

*Rešenje:*

$$f(x) = -\frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \Big( \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}} \Big) x^{n+1} \qquad (|x| < 3)$$

*3. pitanje:* Furijeov red parne funkcije.

*3. zadatak:* Razviti u Furijeov red funkciju

$$f(x) \; = \; |2x|, \qquad x \in (-\pi, \pi),$$

a zatim izračunati sumu reda $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

*Rešenje:* Furijeov razvoj funkcije glasi

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

gde je

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad (n \geq 0), \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (n \geq 1).$$

Kako je funkcija parna, tj. $f(-x) = f(x)$, imamo

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\,dx = \frac{2}{\pi}x^2\Big|_0^{\pi} = 2\pi.$$

Za $n = 1, 2, \ldots,$, važi

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx.$$

Primenom parcijalne integracije dva puta, dobijamo

$$a_n = \frac{4}{\pi}\Big(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\Big),$$

tj.

$$a_n = \frac{4((-1)^n - 1)}{n^2\pi}\ .$$

Zapazimo ad su $a_{2k} = 0$. Zbog parosti $f$, imamo $b_n = 0$ $(n \geq 1)$.

Kako je funkcija $f$ neprekidna to je Furijeov red jednak funkciji

$$|2x| = \pi - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

Konkretno, za $x = 0$ imamo

$$0 = \pi - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 0}{(2n-1)^2} \quad \Rightarrow \quad S = \pi^2/8.$$

*4. pitanje:* Izvod kompleksne funkcije.

*4. zadatak:* Odrediti funkciju $w = f(z) = u + iv$ analitičku u celoj kompleksnoj ravni čiji je imaginarni deo $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, a vrednost $f(1) = 1 + i$.

*Rešenje*. Prvi parcijalni izvodi su:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

Kako važi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

funkcija $v(x,y)$ može biti imaginarni deo analitičke funkcije $w = f(z) = u + iv$. Analitička funkcija zadovoljava Koši-Rimanove uslove

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Lakši integral se dobija ako koristimo drugi uslov. Zaista, imamo

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \Rightarrow \quad u = -2x\int \frac{y}{(x^2+y^2)^2}dy + \varphi(x).$$

Posle smene $t = x^2 + y^2$, dobijamo

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} + \varphi(x).$$

Diferenciranjem $u(x,y)$ po $x$-u i na osnovu drugog Koši-Rimanovog uslova, imamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(x) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Stoga je

$$\varphi'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = C.$$

Sada možemo kompletirati funkciju $u$:

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} + +C$$

i analitičku funkciju $f$:

$$f(z) = u + iv = \frac{x}{x^2+y^2} + C + i\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Ova funkcija definisana na realnoj pravoj

$$f(x+i0) = \frac{x}{x^2+0^2} + C + i\frac{-0}{x^2+0^2} = \frac{1}{x} + C\,,$$

prema teoremi o analitičkom produženju, se može dodefiniati u kompleksnoj ravni kao

$$f(z) = \frac{1}{z} + C \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Iz uslova $f(1) = 1 + i$, određujemo $C = i$, pa je konačni oblik analitičke funkcije

$$f(z) = i + \frac{1}{z}.$$

**PREDMETNI NASTAVNIK**

Dr *Predrag Rajković*, red. prof.