Mašinski fakultet u Nišu - Diplomske studije - Proizvodno inženjerstvo

18. septembar 2015.

REŠENJA ZADATAKA
ISPITA IZ MATEMATIKE 3

1. zadatak. Odrediti oblast konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{4n+7}\right)^n x^n \,.$$

Rešenje: a) Primenom Košijevog korenom kriterijumu, dobijamo

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{4n+7}}=4.$$

Red konvergira na intervalu $(-4,\ 4)$.

2. Odrediti funkciju $w=f(z)=u+iv$ analitičku u kompleksnoj ravni čiji je imaginarni deo $v(x,y)=x^2+y-2xy-y^2$, a vrednost $f(0)=0$.

Rešenje: Parcijalni izvodi su:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2x-2y,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=1-2x-2y,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-2.$$

Kako funkcija $v(x,y)$ zadovoljava Laplasovu parcijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

ona je harmonijska funkcija i može biti imaginarni de analitičke funkcije $w=f(z)=u+iv$.

Analitička funkcija zadovoljava Koši-Rimanove uslove

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\,,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Odatle dobijamo

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1-2x-2y,$$

tj.

$$u=\int(1-2x-2y)dx+\varphi(y)=x-x^2-2xy+\varphi(y).$$

Diferenciranjem $u(x,y)$ po y-u i na osnovu drugog Koši-Rimanovog uslova, imamo

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2x + \varphi'(y) = -(2x - 2y).$$

Stoga je

$$\varphi'(y) = 2y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = \int 2y\,dy = y^2 + C.$$

Sada možemo kompletirati realni deo

$$u = x - x^2 - 2xy + y^2 + C$$

i analitičku funkciju f:

$$f(z) = u + iv = (x - x^2 - 2xy + y^2 + C) + i(x^2 + y - 2xy - y^2).$$

Ova funkcija definisana na realnoj pravoj glasi

$$f(x + i0) = (x - x^2 - 0 + 0 + C) + i(x^2 + 0 - 0 - 0),$$

Prema teoremi o analitičkom produženju, se može dodefiniati u kompleksnoj ravni kao

$$f(z) = z - z^2 + C + iz^2 \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Iz uslova $f(0) = 0$, određujemo $C = 0$, pa je konačni oblik analitičke funkcije

$$f(z) = z - (1 - i)z^2 \ .$$

3. Izračunati

$$\oint_{|z-i|=3} \frac{e^z\,dz}{z^2(z^2+9)} \ .$$

Rešenje: Kriva je krug sa središtem u $z_0 = i$ i poluprečnika $R = 3$.

Polovi funkcije $f(z)$ se dobijaju iz jednačine

$$z^2(z^2 + 9) = 0.$$

Unutar kruga su polovi $z_1 = 0$ reda $m = 2$ i $z_2 = 3i$ reda $m = 1$. Stoga ostatak funkcije računamo po formuli

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2 e^z}{z^2(z^2+9)}\right)' = \frac{1}{9} \ ,$$

$$\operatorname*{Res}_{z=3i} f(z) = \lim_{z\to 3i} \frac{(z-3i)z^2e^z}{z^2(z-3i)(z+3i)} = \lim_{z\to 3i} \frac{z^2e^z}{z^2(z+3i)} = \frac{i\cos 3 - \sin 3}{54}\ .$$

Vrednost integrala jednaka je

$$I = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=3i} f(z) \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{9} + \frac{i\cos 3 - \sin 3}{54} \right),$$

tj.

$$I = \frac{\pi}{27} \left(-\cos 3 + i(6 - \sin 3) \right).$$

4. Rešiti jednačinu

$$x(y+z)\frac{\partial z}{\partial x} + 2z(z-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 2y(y-z).$$

Rešenje: Ovo je nehomogena parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda. Pridruženi sistem diferencijalnih jednačina glasi

$$\frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{2z(z-y)} = \frac{dz}{2y(y-z)}.$$

Druga jednakost daje

$$\frac{dy}{z(z-y)} = \frac{dz}{y(y-z)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{-z} = \frac{dz}{y} \quad \Rightarrow \quad ydy = -zdz \quad \Rightarrow \quad y^2 + z^2 = C_1.$$

Prva i razlika druge i treće daje

$$\frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy - dz}{2z(z-y) - 2y(y-z)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{d(y-z)}{-2(y-z)} \quad \Rightarrow \quad x^2(y-z) = c_2.$$

Rešenje sistema preko prvih integrala glasi

$$\varphi_1 \equiv y^2 + z^2 = C_1, \quad \varphi_2 \equiv x^2(y-z) = C_2$$

Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine glasi

$$F\left(y^2 + z^2, x^2(y-z)\right) = 0.$$

5. Po nepoznatoj funkciji $y(t)$, rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y'' - 4y' + 3y = e^{3t}, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

U slučaju upotrebe Laplasove transformacije, koristiti tabelu

$$L[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}\ , \quad L[e^t] = \frac{1}{p-1}\ , \quad L[\cos t] = \frac{p}{p^2+1}\ , \quad L[\sin t] = \frac{1}{p^2+1}\ .$$

Rešenje: Označimo sa $L[y(t)] = Y(p)$.

Prema teoremi: *ako je* $L[y(t)] = Y(p)$, *tada je* $L[y'(t] = p\ Y(p) - y(0)$ *i* $L[y''(t] = p^2\ Y(p) - p\,y(0) - y'(0)$, nalazimo

$$p^2Y - p - 4(pY-1) + 3Y = \frac{1}{p-3} \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{7}{4(p-1)} - \frac{3}{4(p-3)} + \frac{1}{2(p-3)^2}$$

Prema teoremi: *ako je* $L[y(t)] = Y(p)$, *tada je* $L[t^n y(t)] = (-1)^n Y^{(n)}(p)$, imamo

$$L[e^{at}] = \frac{1}{p-a} \quad \Rightarrow \quad L[te^{at}] = -\left(\frac{1}{p-a}\right)' = \frac{1}{(p-a)^2}\ .$$

Rešenje

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{7}{4(p-1)}\right] - L^{-1}\left[\frac{3}{4(p-3)}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{2(p-3)^2}\right]$$

$$y = \frac{7}{4}e^x + \frac{1}{4}(2x-3)e^{3x}\ .$$

PREDMETNI NASTAVNIK

Dr *Predrag Rajković*, red. prof.