Mašinski fakultet u Nišu - Diplomske studije - Proizvodno inženjerstvo

18. septembar 2015.

REŠENJA ZADATAKA
ISPITA IZ MATEMATIKE 3

1. Ispitati konvergenciju redova

$$a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 n}\,, \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tan \frac{1}{n}\,.$$

Rešenje. a) Funkcija $f(x) = \frac{1}{x \ln^4 x}$ je monotono opadajuća na intervalu $(2, \infty)$ jer je

$$f'(x) = -\frac{4 + \ln x}{x^2 \ln^5 x} < 0, \quad x \in (2, \infty).$$

Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^4 x}\, dx = (\text{smena } t = \ln x) = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^4}\, dt = \frac{t^{-3}}{-3}\Big|_{t=\ln 2}^{\infty} = \frac{1}{3 \ln^3 2}$$

je konvergentan. Primenom Košijevog integralnog kriterijuma, zaključujemo da je red je konvergentan. Približno je $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 n} \approx 2.55912$.

b) Konvergira uslovno po Lajbnicu. Naime

$$\tan \frac{1}{n} > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n\to\infty} \tan \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}} = 0.$$

Takođe,

$$0 < \tan\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{\tan \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n+1}}{1 + \tan \frac{1}{n} \cdot \tan \frac{1}{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \tan \frac{1}{n} > \tan \frac{1}{n+1}\,.$$

Približno je $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tan \frac{1}{n} \approx 1.21357$.

2. Razviti u Furijeov red funkciju sa osnovnim periodom $(-1, 1)$ i datu slikom

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 < x < 0, \\ x^2/\pi, & 0 \le x < 1. \end{cases}$$

Rešenje. Furijeov razvoj funkcije $f(x)$ definisane na $(-L, L)$ i periodične inače, ima oblik

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L},$$

gde je

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad (n \geq 0),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad (n \geq 1).$$

Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x, \qquad \int x^2\cos x\,dx = 2x\cos x + (x^2-2)\sin x,$$

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x, \qquad \int x^2\sin x\,dx = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x.$$

Kako je $L = 1$, to dobijamo

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(-x)\,dx + \int_{0}^{1}\frac{x^2}{\pi}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\pi}\ .$$

Za $n = 1, 2, \ldots$, imamo

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx = \int_{-1}^{0}(-x)\cos n\pi x\,dx + \int_{0}^{1}\frac{x^2}{\pi}\cos n\pi x\,dx,$$

$$a_n = \frac{-\pi + (-1)^n(2+\pi)}{n^2\pi^3}\ ,$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx = \int_{-1}^{0}(-x)\sin n\pi x\,dx + \int_{0}^{1}\frac{x^2}{\pi}\sin n\pi x\,dx,$$

$$b_n = \frac{2\big((-1)^n - 1\big) + (-1)^n n^2(\pi-1)\pi^2}{n^3\pi^4}\ .$$

3. Odrediti Loranov red funkcije

$$f(z) = \frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$$

u tački $z = 0$. Izračunati

$$\oint_L f(z)\, dz, \qquad \text{gde je} \qquad L = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}.$$

Rešenje: Kriva je krug sa središtem u $S = 0$ i poluprečnika $R = 2$.

Funkciju rastavljamo na elementarne razlomke

$$f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1} \ .$$

Dobijamo $A = 0$, $B = C = 1$. Kako geometrijski red ima razvoj

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (|z| < 1)$$

to dobijamo da je

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ .$$

Funkcija $f(z)$ u tački $z = 0$ ima pol reda $m = 2$ i vrednost reziduuma se vidi iz stepenog reda

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0.$$

Pol $z_1 = 1$, je pol reda $m = 1$ i leži unutar kruga. Stoga ostatak funkcije računamo po formuli

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)} = \lim_{z \to 1} \frac{z^2 + z - 1}{z^2} = 1.$$

Vrednost integrala je

$$I = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) \right) = 2\pi i.$$

4. Rešiti parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + \left(y - x \ \tan \frac{y}{x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} = z + x^2 \ln x.$$

Rešenje: Pridruženi sistem diferencijalnih jednačina glasi

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y - x\ \tan\frac{y}{x}} = \frac{dz}{z + x^2 \ln x}.$$

Prva diferencijalna jednačina se može napisatiu obliku

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y - x\ \tan\frac{y}{x}} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \frac{y}{x} - \tan\frac{y}{x}\ .$$

Ovo je homogena linearna diferencijalna jednačina prvog reda. Smenom $y(x) = x \cdot u(x)$, ona se svodi na d.j. koja razdvaja promenljive

$$x \cdot u'(x) = -\tan u \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos u\ du}{\sin u} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\sin u| = -\ln x + K_1,$$

odakle je prvi prvi integral

$$\varphi_1 \equiv x \sin\frac{y}{x} = C_1.$$

Druga diferencijalna jednačina glasi

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z + x^2 \ln x} \quad \Rightarrow \quad , z'(x) - \frac{1}{x} z(x) = x \ln x.$$

Prepoznajemo linearnu diferecnijalnu jednačinu čije rešenje se dobija po formuli

$$z = e^{-\int P(y)\ dy} \left(C_2 + \int Q(y) e^{\int P(y)\ dy} \right)$$

$$z = x\left(C_2 + x \ln x - x\right).$$

Tako dobijamo drugi prvi integral

$$\varphi_2 \equiv \frac{z}{x} - x \ln x + x = C_2\ .$$

Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine glasi

$$F\left(x \sin\frac{y}{x}, \frac{z}{x} - x \ln x + x\right) = 0.$$

5. Odrediti stepeni red funkcije $f(t) = \sin\sqrt{t}$ oko tačke $t = 0$. Primeniti Laplasovu transformaciju na ovaj red i pokazati da je

$$L[\sin\sqrt{t}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{p^{3/2}\ e^{1/(4p)}}\ .$$

Koristiti tabelu

$$L[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}\ , \quad L[t^{n+1/2}] = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{p^{n+3/2}}\ , \quad L[e^t] = \frac{1}{p-1}\ .$$

Rešenje: Kako je Tejlorov red

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,$$

to imamo

$$\sin\sqrt{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{t})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1/2}}{(2n+1)!}\ .$$

Primenom linearnosti Laplasove transformacije, dobijamo

$$L\left[\sin\sqrt{t}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} L\left[t^{n+1/2}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{p^{n+3/2}}\ ,$$

odakle je

$$L\left[\sin\sqrt{t}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+1)!} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n p^n}. = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! 2^n} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n p^n},$$

tj.

$$L\left[\sin\sqrt{t}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{-1}{4p}\right)^n = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}} \cdot\ e^{-1/(4p)}\ .$$

PREDMETNI NASTAVNIK

Dr *Predrag Rajković*, red. prof.