Mašinski fakultet u Nišu - Diplomske studije - Proizvodno inženjerstvo

26. avgust 2015.

REŠENJA ZADATAKA
ISPITA IZ MATEMATIKE 3

1. Ispitati konvergenciju redova

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n)^2}{(1+n^2)^2}\,, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \cdot \frac{2^{n-1}}{n^n}\,.$$

Rešenje: a) Prvi red se ponaša kao red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Primenom poredbenog kriterijuma, zaključujemo da red konverira.

b) Red aspolutnih vrednosti konvergira po Košievom korenom kriterijumu. Prema tome, dati red apsolutno konvergira.

2. Koristeći razvoj funkcije $\ln(1+t)$, funkciju

$$f(x) = \ln(1 - 3x + 2x^2)$$

razviti u stepeni red i odrediti oblast konvergencije.

Rešenje: Kako je

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

imamo

$$f(x) = \ln(1-x) + \ln(1-2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-2x)^n$$

Prvi red konvergira u $[-1, 1)$, a drugi u $[-1/2, 1/2)$. Stoga je

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{n} x^n, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

3. Razviti u Furijeov red funkciju

$$f(x) \;=\; x^3, \qquad x \in (-\pi,\ \pi).$$

Rešenje:

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n^2\pi^2 - 6)}{n^3} \cos nx$$

4. Odrediti funkciju $w = f(z) = u + iv$ analitičku u kompleksnoj ravni čiji je realni deo $u(x, y) = -\frac{1+x}{(1+x)^2+y^2}$, a vrednost $f(0) = -1$.

Rešenje:

$$v = \frac{y}{(1+x)^2 + y^2} \ .$$

$$f(z) = -\frac{1}{1+z} \ .$$

5. Po nepoznatim funkcijama $x(t)$ i $y(t)$, rešiti sistem

$$x' + x - y = 1 + \sin t, \quad y' - x' + y = t - \sin t, \quad x(0) = 0, \ y(0) = 1.$$

U slučaju upotrebe Laplasove transformacije, koristiti tabelu

$$L[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}} \ , \quad L[e^t] = \frac{1}{p-1} \ , \quad L[\cos t] = \frac{p}{p^2+1} \ , \quad L[\sin t] = \frac{1}{p^2+1} \ .$$

Rešenje: Označimo sa $L[x(t)] = X(p)$ i $L[y(t)] = Y(p)$. Dobijamo

$$X(p) = \frac{2p^2+1}{p^2(p^2+1)}, \qquad Y(p) = \frac{p^3+p^2+1}{p^2(p^2+1)} \ .$$

$$x = t + \sin t, \qquad y = t + \cos t.$$

PREDMETNI NASTAVNIK

Dr *Predrag Rajković*, red. prof.