Mašinski fakultet u Nišu - Diplomske studije - Proizvodno inženjerstvo

26. avgust 2015.

REŠENJA ZADATAKA
ISPITA IZ MATEMATIKE 3

1. Ispitati konvergenciju redova

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n+1)^n} \quad (\text{zna se}: \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1), \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{100n-99}\ .$$

Rešenje. a) Primenom Košijevog korenom kriterijumu, dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Red je konvergentan.

b) Apsolutna vrednost opšteg člana reda ne teži nuli jer je

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{100n-99} = \frac{1}{100}\ .$$

Prema tome red divergira. Zaista, n-te delimične nagomilavaju se oko dveju tačaka: $S_{2n} \approx 0.983$ i $S_{2n+1} \approx 0.993$ za $n > 100$.

2. Odrediti oblast konvergencije i sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)2^n}.$$

Rešenje.

$$f(x) = x + (2-x)\ln\Big(1 - \frac{x}{2}\Big), \quad x \in [-2, 2).$$

3. Odrediti vrstu singulariteta i vrednost reziduuma funkcije $h(z) = \sin\frac{1}{z}$ u tački $z = 0$. Izračunati

$$\oint_C \frac{\sin\frac{1}{z}}{z^3 - 7z^2 + 15z - 9}\, dz,$$

gde je $C = \{z : |z-4| = 2\}$.

Rešenje: Kriva je krug sa središtem u $s = 4$ i poluprečnika $R = 2$.
Funkcija
$$h(z) = \sin\frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\frac{1}{z})^{2n-1}}{(2n-1)!!)}$$
u tački $z = 0$ ima esencijalni (neotklonjivi) singularitet i vrednost reziduuma se vidi iz reda
$$\operatorname*{Res}_{z=0} h(z) = 1.$$
Pored esencijalnog singularitita $z_0 = 0$, postoje i polovi funkcije $f(z)$ koji se dobijaju iz jednačine
$$z^3 - 7z^2 + 15z - 9 = (z-3)^2(z-1) = 0.$$
Jedino pol $z_1 = 3$ reda $m = 2$ je unutar kruga, a pol $z_2 = 1$ je izvan. Stoga ostatak funkcije računamo po formuli
$$\operatorname*{Res}_{z=3} f(z) = \lim_{z\to 3}\left((z-3)^2\frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-3)^2(z-1)}\right)' = \frac{1}{36}\left(-2\cos\frac{1}{3} - 9\sin\frac{1}{3}\right).$$
Kako je
$$\left(\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}\right)' = \frac{\cos\frac{1}{z}\left(\frac{-1}{z^2}\right)(z-1) - \sin\frac{1}{z}}{(z-1)^2} = \frac{(1-z)\cos\frac{1}{z} - z^2\sin\frac{1}{z}}{z^2(z-1)^2},$$
vrednost integrala je
$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=3} f(z) = 2\pi i\cdot\frac{1}{36}\left(-2\cos\frac{1}{3} - 9\sin\frac{1}{3}\right) = i\frac{\pi}{18}\left(-2\cos\frac{1}{3} - 9\sin\frac{1}{3}\right).$$

4. Rešiti parcijalnu diferencijalnu jednačinu
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2y + z.$$
Rešenje: Pridruženi sistem diferencijalnih jednačina glasi
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{x^2y + z}.$$
Rešenje prve diferencijalne jednačine
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y} + K_1 \quad\Rightarrow\quad \ln x = \frac{1}{2}\ln y + K_1.$$

odredjuje prvi prvi integral

$$\varphi_1 \equiv \frac{x^2}{y} = C_1.$$

Rešenje druge diferencijalne jednačine

$$\frac{dy}{2y} = \frac{dz}{x^2y + z},$$

dobićemo uključivanjem rešenja prve $x^2 = C_1 y$:

$$\frac{dy}{2y} = \frac{dz}{C_1y^2 + z} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dy} = \frac{C_1y^2 + z}{2y} \ .$$

Prepoznajemo linearnu diferecnijalnu jednačinu

$$\frac{dz}{dy} - \frac{1}{2y}z = \frac{C_1 y}{2} \ .$$

Njeno rešenje se dobija po formuli

$$z = e^{-\int P(y)\ dy}\left(C_2 + \int Q(y)e^{\int P(y)\ dy}\right)$$

$$z = C_2\sqrt{y} + \frac{1}{3}C_1y^2$$

Eliminacijom C_1, dobijamo drugi prvi integral

$$\varphi_2 \equiv \frac{3z - x^2y}{3\sqrt{y}} \ .$$

Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine glasi

$$F\left(\frac{x^2}{y}, \frac{3z - x^2y}{3\sqrt{y}}\right) = 0.$$

Drugi način. Kako je $d(x^2y) = 2xy\ \mathrm{d}x + x^2\ \mathrm{d}y$, to pišemo

$$\frac{2xydx}{2x^2y} = \frac{x^2dy}{2x^2y} = \frac{dz}{x^2y + z} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(x^2y)}{4x^2y} = \frac{dz}{x^2y + z}.$$

Posle smene $t = x^2y$, dobićemo linearnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dt}{4t} = \frac{dz}{t + z} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} - \frac{1}{4t}z = \frac{1}{4}.$$

Odatle dobijamo drugi prvi integral:

$$z = C_2 t^{1/4} + \frac{1}{3}t \quad \Rightarrow \quad \frac{3z - x^2y}{\sqrt{x}\sqrt[4]{y}} = C_2.$$

5. Po nepoznatoj funkciji $y(t)$ rešiti diferencijalnu jednačinu

$$4y''(t) + y(t) = \sin t, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

U slučaju upotrebe Laplasove transformacije, koristiti tabelu

$$L[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}\ , \quad L[e^t] = \frac{1}{p-1}\ , \quad L[\cos t] = \frac{p}{p^2+1}\ , \quad L[\sin t] = \frac{1}{p^2+1}\ .$$

Rešenje: Označimo sa $L[y(t)] = Y(p)$. Primenom linearnosti Laplasove transformacije, dobijamo

$$4L[y''(t)] + L[y(t)] = L\left[\sin t\right].$$

Prema teoremi: *ako je* $L[y(t)] = Y(p)$, *tada je* $L[y'(t)] = pY(p) - y(0)$ *i* $L[y''(t)] = p^2Y(p) - py(0) - y'(0)$, nalazimo

$$L[y'(t)] = pY(p) - 1, \qquad L[y''(t)] = p^2Y(p) - p + 1.$$

Odatle je

$$4(p^2Y(p) - p + 1) + Y(p) = \frac{1}{p^2+1} \quad \Rightarrow \quad (4p^2+1)Y(p) = \frac{1}{p^2+1} + 4p - 4.$$

Razbijajući na elementarne razlomke, dobijamo

$$Y(p) = -\frac{1}{3}\frac{1}{p^2+1} + \frac{4}{3}\frac{1}{4p^2+1} + \frac{4p}{4p^2+1} - \frac{4}{4p^2+1}\ .$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije

$$y(t) = L^{-1}\left[Y(p)\right],$$

dobija se

$$y(t) = -\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right] + \left(\frac{4}{3} - 4\right)L^{-1}\left[\frac{1}{4p^2+1}\right] + L^{-1}\left[\frac{4p}{4p^2+1}\right].$$

Rešenje je

$$y = -\frac{1}{3}\sin t - \frac{4}{3}\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\ .$$

PREDMETNI NASTAVNIK

Dr *Predrag Rajković*, red. prof.