Mašinski fakultet u Nišu - Diplomske studije - Proizvodno inženjerstvo

12. jun 2015.

REŠENJA ZADATAKA
ISPITA IZ MATEMATIKE 3

1. Odrediti oblast konvergencije i odrediti sumu stepenog reda

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n(2n-1)} \ .$$

Rešenje: Primenom Dalamberovog kriterijuma, dobijamo poluprečnik intervala konvergencije

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n(2n-1)}}{\frac{1}{(n+1)(2n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)} = 1.$$

Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergira po integralnom kriterijumu. Soga je oblast konvergencije $[-1, 1]$.

Diferenciranjem reda član po član, dobijamo

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{n(2n-1)} \quad \Rightarrow \quad S''(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1) x^{2n-2}}{n(2n-1)}.$$

Stoga je

$$S''(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^{n-1} = \frac{-2}{1+x^2} \ .$$

Integracijom dobijamo

$$S'(x) = \int \frac{-2}{1+x^2}\, dx = -2\arctan x + C_1,$$

$$S(x) = -2\int (\arctan x + C_1)\, dx = -2x\arctan x + \ln(1+x^2) + C_1 x + C_2.$$

Posle primene parcijalne integracije i uslova $S(0) = S'(0) = 0$, dobija se suma reda
$$S(x) = -2x \arctan x + \ln(1 + x^2).$$

2. Odrediti funkciju $w = f(z) = u + iv$ analitičku u celoj kompleksnoj ravni čiji je realni deo $u(x, y) = x^2 + 2x + Ay^2 + 1$, a vrednost $f(0) = 1$. ***Rešenje:*** Parcijalni izvodi su:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2Ay, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2A.$$

Da bi $u(x, y)$ bila realni deo analitičke funkcije, mora biti harmonijska, tj. važi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \;\Rightarrow\; 2 + 2A = 0 \;\Rightarrow\; A = -1.$$

Sada funkcija $u(x, y)$ može biti realni deo analitičke funkcije $w = f(z) = u + iv$. Analitička funkcija zadovoljava Koši-Rimanove uslove

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Odatle dobijamo
$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2,$$
tj.
$$v = \int (2x + 2)dy + \varphi(x) = 2xy + 2y + \varphi(x).$$

Diferenciranjem $v(x, y)$ po x-u i na osnovu drugog Koši-Rimanovog uslova, imamo

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x) = 2y.$$

Stoga je
$$\varphi'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = C.$$

Sada možemo kompletirati funkciju

$$v = 2xy + 2y + C.$$

i analitičku funkciju:

$$f(z) = u + iv = (x^2 + 2x - y^2 + 1) + i(2xy + 2y + C).$$

Ova funkcija definisana na realnoj pravoj glasi $f(x + i0) = (x^2 + 2x + 1) + iC$. Prema teoremi o analitičkom produženju, ona se može dodefinisati u $\mathbb{C}$ kao

$$f(z) = (z^2 + 2z + 1) + iC \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Iz uslova $f(0) = 1$, određujemo $C = 0$, pa je konačni oblik analitičke funkcije

$$f(z) = (z + 1)^2.$$

3. Razviti u Loranov red funkciju

$$f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z-2)^2(z+2)}$$

oko tačke $z_0 = 2$ u prstenu $|z - 2| < 3/2$. Na osnovu reda izračunati

$$\oint\limits_{|z-2|=3/2} f(z)\, dz\ .$$

Rešenje: Kriva je krug sa središtem u $z_0 = 2$ i poluprečnika $R = 3/2$.

Razbijanjem na elemementarne razlomke, dobijamo

$$f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z-2)^2(z+2)} = \frac{A}{(z-2)^2} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z+2}\ .$$

Nalazimo

$$f(z) = \frac{7/4}{(z-2)^2} + \frac{13/16}{z-2} + \frac{3/16}{z+2} = \frac{7/4}{(z-2)^2} + \frac{13/16}{z-2} + \frac{3}{64} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n (z-2)^n\ .$$

Poslednji razvoj sledi iz geometrijskog reda. Odavde se vidi da je ostatak funkcije $A_{-1} = 13/16$, pa je integral jednak

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 2\pi i \frac{13}{16} = \frac{13}{8}\pi i.$$

4. Rešiti parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$x(y+z)\frac{\partial z}{\partial x}+z(z-y)\frac{\partial z}{\partial y}=y(y-z).$$

Rešenje: Ovo je nehomogena parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda. Pridruženi sistem diferencijalnih jednačina glasi

$$\frac{dx}{x(y+z)}=\frac{dy}{z(z-y)}=\frac{dz}{y(y-z)}.$$

Druga jednakost daje

$$\frac{dy}{z(z-y)}=\frac{dz}{y(y-z)} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{-z}=\frac{dz}{y} \quad\Rightarrow\quad ydy=-zdz \quad\Rightarrow\quad y^2+z^2=C_1.$$

Prva i razlika druge i treće daje

$$\frac{dx}{x(y+z)}=\frac{dy-dz}{z(z-y)-y(y-z)} \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{x}=\frac{d(y-z)}{-(y-z)} \quad\Rightarrow\quad x(y-z)=c_2.$$

Rešenje sistema preko prvih integrala glasi

$$\varphi_1\equiv y^2+z^2=C_1,\quad \varphi_2\equiv x(y-z)=C_2$$

Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine glasi

$$F\left(y^2+z^2,x(y-z)\right)=0.$$

5. Po nepoznatim funkcijama $x(t)$ i $y(t)$, naći rešenje sistema diferencijalnih jednačina

$$x'(t)-x+y=e^t,\quad y'(t)-x-y=e^{-t},$$

koje zadovoljava početne uslove $x(0)=0,\ y(0)=1.$

Koristiti tabelu

$$L[t^n]=\frac{n!}{p^{n+1}}\ ,\quad L[e^t]=\frac{1}{p-1}\ ,\quad L[\cos t]=\frac{p}{p^2+1}\ ,\quad L[\sin t]=\frac{1}{p^2+1}\ .$$

Rešenje: Označimo sa $L[x(t)]=X(p)$ i $L[y(t)]=Y(p)$. Primenom linearnosti Laplasove transformacije i teoreme:

ako je $L[y(t)]=Y(p)$, *tada je* $L[y'(t)]=pY(p)-y(0)$, nalazimo

$$(p-1)X + Y = \frac{1}{p-1}, \qquad -X + (p-1)Y = \frac{p+2}{p+1}\,.$$

Odatle, razbijanjem na elementarne razlomke, dobijamo

$$X = \frac{-1}{(p+1)((p-1)^2+1} = \frac{-1}{5(p+1)} + \frac{p-3}{5((p-1)^2+1)}\,.$$

$$Y = \frac{p^3-2p+3}{(p-1)(p+1)((p-1)^2+1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{2}{5(p+1)} + \frac{2p-1}{5((p-1)^2+1)}\,.$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije, dobija se

$$x(t) = L^{-1}\left[X(p)\right] = L^{-1}\left[\frac{-1}{5(p+1)}\right] + L^{-1}\left[\frac{p-3}{5((p-1)^2+1)}\right].$$

$$y(t) = L^{-1}\left[Y(p)\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{p-1}\right] - L^{-1}\left[\frac{2}{5(p+1)}\right] + L^{-1}\left[\frac{2p-1}{5((p-1)^2+1)}\right].$$

Primenom teoreme:

ako je $L[x(t)] = X(p)$, tada je $L[e^{at}x(t)] = X(p-a)$,

imamo

$$L[e^t \sin t] = \frac{1}{(p-1)^2+1}, \quad L[e^t \cos t] = \frac{p-1}{(p-1)^2+1}\,.$$

Rešenje glasi

$$x = \frac{1}{5}e^{-t}\left(-1 + e^{2t}(\cos t - 2\sin t)\right), \quad y = \frac{1}{5}e^{-t}\left(-2 + e^{2t}(5 + 2\cos t + \sin t)\right).$$

PREDMETNI NASTAVNIK

Dr *Predrag Rajković*, red. prof.