*Mašinski fakultet u Nišu - Diplomske studije - Proizvodno inženjerstvo*

*17. april 2015.*

**REŠENJA ZADATAKA**
**ISPITA IZ MATEMATIKE 3**

**1.** Ispitati konvergenciju redova

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}\,, \qquad \left(\text{zna se}: \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right) \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} q^{n+\sqrt{n}} \quad (q>0)\,.$$

*Rešenje*. a) Posle smene $x = \pi/n$, imamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1 \;\Rightarrow\; \sin \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n} \quad (n\to\infty).$$

To znači da se opšti član $a_n$ ponaša kao

$$a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n} \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n^2}$$

Zaista,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n^2}} = 1$$

Prema integralnom Košijevom kriterijumu, red $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergira jer je

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=\infty} = 1.$$

To znači da i dati red konvergira po poredbenom kriterijumu.

b) Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} q^{\frac{n+\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n\to\infty} q^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = q,$$

prema Košijevom korenovom kriterijumu, ovaj red konvergira za $0 \le q < 1$ i devergira za $q > 1$. Za $q = 1$ takodje divergira.

**2.** Odrediti funkciju $w = f(z) = u + iv$ analitičku u celoj kompleksnoj ravni čiji je imaginarni deo $v(x, y) = x^2 + y + xy + Ay^2$, a vrednost $f(0) = 0$.

*Rešenje*. parcijalni izvodi su:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + x + 2Ay, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2A.$$

Da bi $v(x, y)$ bila imaginarni de analitičke funkcije, mora biti harmonijska, tj. važi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \;\Rightarrow\; 2 + 2A = 0 \;\Rightarrow\; A = -1.$$

Sada funkcija $v(x, y)$ može biti realni deo analitičke funkcije $w = f(z) = u + iv$. Analitička funkcija zadovoljava Koši-Rimanove uslove

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Odatle dobijamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + x - 2y,$$

tj.

$$u = \int (1 + x - 2y)dx + \varphi(y) = x + \frac{1}{2}x^2 - 2xy + \varphi(y).$$

Diferenciranjem $u(x, y)$ po $y$-u i na osnovu drugog Koši-Rimanovog uslova, imamo

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2x + \varphi'(x) = -(2x + y).$$

Stoga je

$$\varphi'(y) = -y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C.$$

Sada možemo kompletirati funkciju

$$u = x + \frac{1}{2}x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2 + C$$

i analitičku funkciju:

$$f(z) = u + iv = (x + \frac{1}{2}x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2 + C) + i(x^2 + y + xy - y^2).$$

Ova funkcija definisana na realnoj pravoj glasi $f(x+i0) = (x + \frac{1}{2}x^2 + C) + ix^2$. Prema teoremi o analitičkom produženju, ona se može dodefinisati u $\mathbb{C}$ kao

$$f(z) = z + \frac{1}{2}z^2 + C + iz^2 \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Iz uslova $f(0) = 0$, određujemo $C = 0$, pa je konačni oblik analitičke funkcije $f(z) = z + (1/2 + i)z^2$.

**3.** Razviti u Loranov red funkciju

$$f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z-1)^2(z+2)}$$

oko tačke $z_0 = 1$ u prstenu $|z - 1| < 3/2$. Na osnovu reda izračunati

$$\oint\limits_{|z-1|=3/2} f(z)\, dz\ .$$

*Rešenje:* Razlaganjem na elementarne razlomke, dobijamo

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+2}\ .$$

U prstenu $|z - 1| < 3/2$, važi razvoj

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z-1+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{3}\right)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{3}\right)^n .$$

Poslednji razvoj sledi iz geometrijskog reda. Dakle,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n (z-1)^n\ .$$

Odavde se vidi da je ostatak funkcije $A_{-1} = \frac{2}{3}$, pa je integral jednak

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 2\pi i \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi i.$$

**4.** Rešiti parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = -2xy.$$

*Rešenje:* Pridruženi sistem diferencijalnih jednačina glasi

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{-2xy}.$$

Prvo rešavamo diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \;\Leftrightarrow\; x\,dx = -y\,dy \;\Leftrightarrow\; \int x\,dx = -\int y\,dy + \bar{C}_1 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \bar{C}_1.$$

Uvedimo $C_1 = 2\bar{C}_1$. Zatim rešavamo drugu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dx}{y} = \frac{dz}{-2xy} \;\Leftrightarrow\; 2x\,dx = -\,dz \;\Leftrightarrow\; \int 2x\,dx = -\int dz + C_2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + z = C_2.$$

Rešenje sistema preko prvih integrala glasi

$$\varphi_1 \equiv x^2 + y^2 = C_1, \quad \varphi_2 \equiv x^2 + z = C_2$$

Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine glasi

$$F\left(x^2 + y^2, x^2 + z\right) = 0.$$

**5.** Po nepoznatim funkcijama $x(t)$ i $y(t)$, naći rešenje sistema diferencijalnih jednačina

$$x'(t) + 7x - y = 0, \quad y'(t) + 2x + 5y = 0,$$

koje zadovoljava početne uslove $x(0) = 1,\ y(0) = 2$.

*Rešenje:*

**Prvi način**: Označimo sa $L[x(t)] = X(p)$ i $L[y(t)] = Y(p)$. Primenom linearnosti Laplasove transformacije, dobijamo

$$L[x'(t)] + 7L[x] - L[y] = 0, \quad L[y'(t)] + 2L[x] + 5L[y] = 0.$$

Prema teoremi: *ako je* $L[y(t)] = Y(p)$, *tada je* $L[y'(t] = pY(p) - y(0)$ , nalazimo

$$pX(p) - 1 + 7X(p) - Y(p) = 0, \quad pY(p) - 2 + 2X(p) + 5Y(p) = 0.$$

Rešavanjem sistema dobijamo

$$X(p) = \frac{p+7}{p^2+12p+37} = \frac{(p+6)+1}{(p+6)^2+1},\ Y(p) = \frac{2(p+6)}{p^2+12p+37} = \frac{2(p+6)}{(p+6)^2+1}.$$

Podsetimo se teoreme: *ako je* $L[f(t)] = F(p)$, *tada je* $L[e^{at}f(t)] = F(p-a)$. Iz tablice je

$$L[\cos t] = \frac{p}{p^2+1} \ \Rightarrow\ L\left[e^{-6t}\cos t\right] = \frac{p+6}{(p+6)^2+1}\ ,$$

$$L[\sin t] = \frac{1}{p^2+1} \ \Rightarrow\ L\left[e^{-6t}\sin t\right] = \frac{1}{(p+6)^2+1}\ .$$

Sada je

$$x(t) = L^{-1}\left[X(p)\right] = L^{-1}\left[\frac{p+6}{(p+6)^2+1}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{(p+6)^2+1}\right],$$

$$y(t) = L^{-1}\left[Y(p)\right] = 2L^{-1}\left[\frac{p+6}{(p+6)^2+1}\right].$$

Rešenje je

$$x(t) = e^{-6t}(\cos t + \sin t), \quad y(t) = 2e^{-6t}\cos t.$$

**Drugi način**: Pretpostaviti da sistem ima rešenja u obliku $x = Le^{rt}$, $y = Me^{rt}$. Problem svodimo na algebarski sistem jednačina.

**PREDMETNI NASTAVNIK**

Dr *Predrag Rajković*, red. prof.