Mašinski fakultet u Nišu - Diplomske studije - Proizvodno inženjerstvo

17. april 2015.

REŠENJA ZADATAKA
ISPITA IZ MATEMATIKE 3

1. Ispitati konvergenciju redova

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ , \qquad\qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ .$$

Rešenje. a) Opšta delimična suma glasi

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{m} \ln\frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{m} (\ln(n+1)-\ln n) = \ln(m+1)\ .$$

Kako je $\lim_{m\to\infty} S_m = +\infty$, red je odredjeno divergentan.

b) Opšti član reda je

$$a_n = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}\ .$$

Prema integralnom Košijevom kriterijumu, red $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergira jer je

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg|_{x=1}^{x=\infty} = 1.$$

Stoga i dati red konvergira. Odavde zaključujemo da red $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ može da konvergira iako redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiraju.

2. Odrediti Furijeov razvoj funkcije $f(x)=\cos(x\sqrt{2})$ na intervalu $(-\pi,\pi)$ i odatle pokazati da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-2} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{\pi\sqrt{2}}{\sin(\pi\sqrt{2})}\right)\ .$$

Rešenje. Furijeov razvoj ovako date periodične funkcije ima oblik

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx,$$

gde je

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n \geq 0), \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n \geq 1).$$

Ovde je

$$a_n = \frac{2\sqrt{2}\sin(\pi\sqrt{2})}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-2} \quad (n = 0, 1, \ldots), \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

3. Izračunati

$$\oint_C \frac{z}{z^3 - 2z^2 + 4z - 8}\,dz,$$

gde je $C = \{z : |z-1| = 2\}$.

Rešenje: Kriva je krug sa središtem u $z_0 = 1$ i poluprečnika $R = 2$.

Polovi funkcije $f(z)$ se dobijaju iz jednačine

$$z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = (z-2)(z^2+4) = 0.$$

Jedino pol je $z_1 = 2$ reda $m = 1$ je unutar kruga, a polovi $z_2 = 2i$ i $z_3 = -2i$ su izvan. Stoga ostatak funkcije računamo po formuli

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z}{(z-2)(z^2+4)} = \lim_{z\to 2}\frac{z}{z^2+4} = \frac{2}{2^2+4} = \frac{1}{4}\,.$$

Vrednost integrala jednaka je

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} i.$$

4. Rešiti parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$(x-1)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + (z+1)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Rešenje: Pridruženi sistem diferencijalnih jednačina glasi

$$\frac{dx}{x-1} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z+1}.$$

Rešenje sistema preko prvih integrala glasi

$$\varphi_1 \equiv \frac{x-1}{y} = C_1, \quad \varphi_2 \equiv \frac{z+1}{y} = C_2$$

Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine glasi

$$u = F\left(\frac{x-1}{y}, \frac{z+1}{y}\right).$$

5. Po nepoznatoj funkciji $x(t)$ rešiti diferencijalnu jednačinu

$$x''(t) - 2x'(t) = te^t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$$

Rešenje:

Rešenje: Označimo sa $L[x(t)] = X(p)$. Primenom linearnosti Laplasove transformacije, dobijamo

$$L[x''(t)] - 2L[x'(t)] = L\left[te^t\right].$$

Prema teoremi: *ako je* $L[x(t)] = X(p)$, *tada je* $L[x'(t] = pX(p) - y(0)$ *i* $L[x''(t] = p^2X(p) - px(0) - x'(0)$, nalazimo

$$L[x'(t)] = pX(p), \qquad L[x''(t)] = p^2X(p) - 1.$$

Prema teoremi *ako je* $L[y(t)] = Y(p)$, *tada je* $L[t^n y(t)] = (-1)^n Y^{(n)}(p)$, imamo

$$L\left[e^t\right] = \frac{1}{p-1} \quad \Rightarrow \quad L\left[te^t\right] = -\left(\frac{1}{p-1}\right)' = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Odatle je

$$p^2X(p) - 1 - 2pX(p) = \frac{1}{(p-1)^2} \quad \Rightarrow \quad X(p) = \frac{p^2-2p+2}{p(p-1)^2(p-2)}.$$

Razbijajući na elementarne razlomke, dobijamo

$$X(p) = -\frac{1}{p} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-2}.$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije, dobija se

$$x(t) = L^{-1}\left[X(p)\right] = -L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{(p-1)^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{p-2}\right].$$

Rešenje je

$$x(t) = -1 - te^t + e^{2t}.$$

PREDMETNI NASTAVNIK

Dr *Predrag Rajković*, red. prof.