Mašinski fakultet u Nišu - Diplomske studije - Proizvodno inženjerstvo

19. februar 2015.

REŠENJA ZADATAKA
ISPITA IZ MATEMATIKE 3

1. Ispitati konvergenciju redova

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3n-5}\,, \qquad\qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+10}{\sqrt{n^3}}\,.$$

Rešenje. a) Opšti član ne teži nuli, pa divergira:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-5}=\frac{1}{3}\,.$$

b) Prema Lajbnicovom kriterijumu, konvergira neapsolutno. Naime,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+10}{\sqrt{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{10}{n}}{\sqrt{n}}=0, \qquad \left(\frac{n+10}{\sqrt{n^3}}\right)'=-\frac{n+30}{2n^{5/2}}<0,$$

što znači da niz monotono opada ka nuli.

S druge strane, niz apslutnih vrednosti divergira jer je

$$\frac{n+10}{\sqrt{n^3}}>\frac{n}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{n^{1/2}}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}=+\infty,$$

prema integralnom Košijevom kriterijumu.

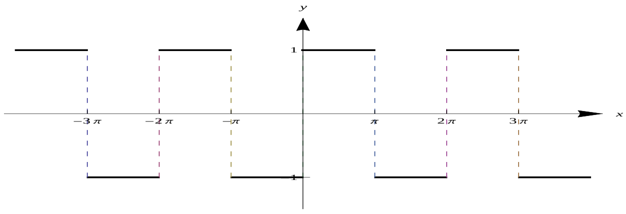
2. Data je funkcija $f(x) = 1$ na intervalu $(0,\pi)$. Dopuniti ovu funkciju vrednostima na intervalu $(-\pi, 0)$ tako da ima Furijeov razvoj samo po sinusima i odrediti taj red.

Rešenje. Furijeov razvoj ovako date periodične funkcije ima oblik

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

gde je

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad (n\ge 0), \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \quad (n\ge 1).$$



Da bismo imali razvoj samo po sinusima, treba da su svi koeficijenti

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = 0 \quad (n \geq 0).$$

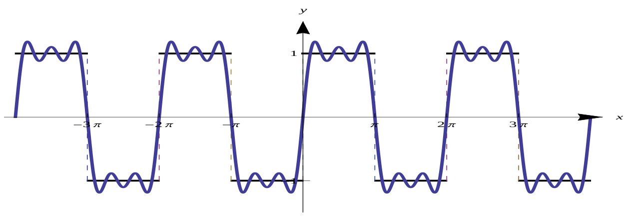
To je moguće ako je $f(x)$ neparna na $(-\pi, \pi)$. Dakle,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0\,, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Sada,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = 2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\,.$$

Slika pokazuje Furijeovu aproksimaciju funkcije sa $n = 5$ članova. Furijeov



razvoj glasi

$$f(x) \sim F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin nx.$$

U tačkama $x = k\pi$ postoji prekid funkcije $f(x)$, pa je

$$F(x) = \frac{f(k\pi - 0) + f(k\pi + 0)}{2}\,.$$

Stoga, imamo

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq k\pi \ , \\ 0, & x = k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{cases}$$

3. zadatak: Proveriti da li je analitička funkcija

$$f(z) = \frac{z}{|z|^2}$$

Rešenje: Kako je

$$f(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} \ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

i

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

Dakle, nisu ispunjeni Koši-Rimanovi uslovi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

pa funkcija $f(z)$ nije analitička.

4. Izračunati $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{ze^z}{z^3-6z^2+12z-8}\, dz.$

Rešenje: Kriva je krug sa središtem u $z_0 = 1$ i poluprečnika $R = 2$.

Polovi funkcije $f(z)$ se dobijaju iy jednačine $z^3-6z^2+12z-8 = (z-2)^3 = 0$. Jedini pol je $z_1 = 2$ reda $m = 3$. Stoga ostatak funkcije računamo po formuli

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_1} \left((z-z_1)^m f(z)\right)^{(m-1)} = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 2} \left((z-2)^3 \frac{ze^z}{(z-2)^3} \right)^{(2)}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{2} \lim_{z\to 2} (ze^z)'' = \frac{1}{2} \lim_{z\to 2} (z+2)e^z = \frac{4e^2}{2} \ .$$

Vrednost integrala jednaka je

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = 2\pi i \cdot 2e^2 = 4e^2 \pi i.$$

5. Po nepoznatim funkcijama $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ rešiti sistem diferencijalnih jednačina

$$x'(t) + y + z = 0, \quad y'(t) + z + x = 0, \quad z'(t) - x + y - 2z = 0.$$

Rešenje: Pretpostavimo da ima rešenja u obliku

$$x = Le^{rt}, \quad y = Me^{rt}, \quad z = Ne^{rt}.$$

Tada dobijamo linearan algebarski sistem

$$rL + M + N = 0, \quad L + rM + N = 0, \quad -L + M + (r-2)N = 0.$$

Determinanta sistema je

$$\begin{vmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 \\ -1 & 1 & r-2 \end{vmatrix} = (r+1)(r-1)(r-2)$$

Za $r = -1$, dobija se algebarski sistem

$$-L + M + N = 0, \quad L - M + N = 0, \quad -L + M - 3N = 0,$$

čije je jedno rešenje $L_1 = M_1 = 1,\ N_1 = 0.$

Za $r = 1$, dobija se sistem

$$L + M + N = 0, \quad L + M + N = 0, \quad -L + M - N = 0,$$

čije je jedno rešenje $L_1 = 1,\ M_1 = 0,\ N_1 = -1.$

Za $r = 2$, dobija se sistem

$$2L + M + N = 0, \quad L + 2M + N = 0, \quad -L + M = 0,$$

čije je jedno rešenje $L_1 = 1,\ M_1 = 1,\ N_1 = -3.$

Rešenje sistema diferencijalnih jednačina glasi

$$\begin{aligned} x(t) =& C_1e^{-t} + C_2e^{t} + C_3e^{2t} \\ y(t) =& C_1e^{-t} + C_3e^{2t} \\ z(t) =& -C_2e^{t} - 3C_3e^{2t}. \end{aligned}$$

PREDMETNI NASTAVNIK

Dr *Predrag Rajković*, red. prof.