Mašinski fakultet u Nišu - Diplomske studije - Proizvodno inženjerstvo

27. avgust 2014.

REŠENJA ZADATAKA
ISPITA IZ MATEMATIKE 3

1. Funkciju

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$$

razviti u stepeni red i odrediti oblast konvergencije.

Rešenje. Razlaganjem na elementarne razlomke funkcije, dobijamo

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{x}{(x-1)(x-3)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - x/3} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x}.$$

Na osnovu sume geometrijskog reda sledi

$$f(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Prvi red konvergira za $|x/3| < 1$, a drugi za $|x| < 1$. Stoga je

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)x^n \qquad (|x| < 1).$$

2. Razviti u Furijeov red funkciju sa osnovnim periodom $(-\pi, \pi)$ i datu slikom

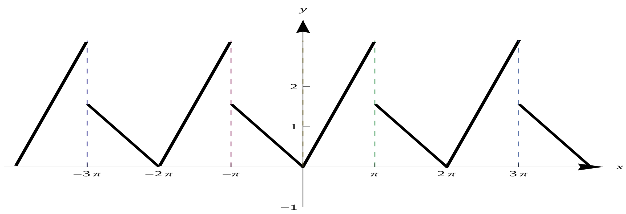
$$f(x) = \begin{cases} -x/2, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

Rešenje. Furijeov razvoj ovako date periodične funkcije ima oblik

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

gde je

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n \ge 0), \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n \ge 1).$$



Sada je

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{-x}{2}\right)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \frac{3\pi}{4}\ .$$

Za $n = 1, 2, \ldots$, imamo

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{-x}{2}\right)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx, .$$

Primenom parcijalne integracije, dobijamo

$$a_n = 3\frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi}\ .$$

Slično,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{-x}{2}\right)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx,$$

tj.

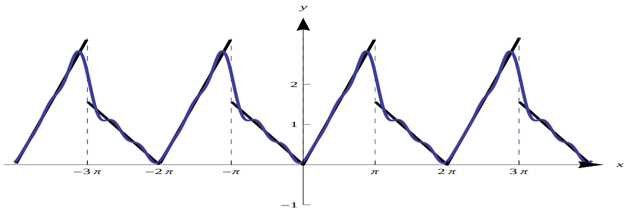
$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\ .$$

Furijeov razvoj glasi

$$f(x) \sim F(x) = \frac{3\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^n - 1}{2n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\sin nx.$$

U tačkama $x = (2k+1)\pi$ postoji prekid funkcije $f(x)$, pa je

$$F(x) = \frac{f((2k+1)\pi - 0) + f((2k+1)\pi + 0)}{2}\ .$$



Stoga, imamo

$$F(x) \;=\; \begin{cases} f(x), & x \neq (2k+1)\pi\ , \\ 3\pi/4, & x = (2k+1)\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{cases}$$

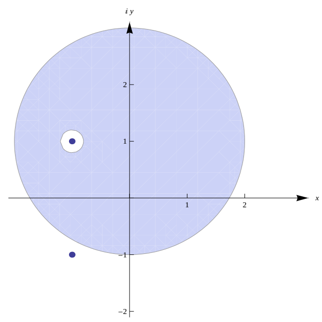
Slika pokazuje Furijeovu aproksimaciju funkcije sa $n = 5$ članova.

3. Izračunati kompleksni integral

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + 2z + 2}$$

po krivoj $C: \; |z - i| = 2$.

Rešenje: Kriva je krug sa središtem u $z_0 = i$ i poluprečnika $R = 2$.



Polovi funkcije

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$$

se dobijaju iy jednačine $z^2 + 2z + 2 = 0$ i iznose $z_1 = -1 + i$ i $z_2 = -1 - i$. Unutar krive je samo pol $z_1 = -1 + i$ koji je prvog reda $(m = 1)$. Stoga ostatak funkcije računamo po formuli

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_1} \left((z - z_1)^m f(z)\right)^{(m-1)},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{1}{2i}\ .$$

Vrednost integrala jednaka je

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = 2\pi i \frac{(1)}{2i} = \pi.$$

4. Naći opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine po nepoznatoj funkciji $z(x,y)$:

$$4yz\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -2y.$$

Rešenje: Ovo je nehomogena parcijalna diferencijalna jednačina

$$A(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + B(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = C(x,y,z)$$

Ona se rešava tako što joj se pridruži sistem diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C}\ .$$

Prvi integrali $\varphi_1(x,y,z),\ \varphi_2(x,y,z)$ ovog sistema, odredjuju rešenje PDJ

$$F(\varphi_1,\ \varphi_2) = 0.$$

U ovom slučaju, pridruženi sistem diferencijalnih jednačina glasi

$$\frac{dx}{4yz} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{-2y}\ .$$

Prvi prvi integral dobijamo iz

$$\frac{dx}{4yz} = \frac{dz}{-2y} \ \Rightarrow\ dx = -2z\,dz \ \Rightarrow\ \int dx = \int(-2z)\,dz + K_1 \ \Rightarrow\ x = -z^2 + K_1.$$

Odavde je

$$\varphi_1 \equiv x + z^2 = C_1.$$

Drugi prvi integral dobijamo iz

$$\frac{dy}{1} = \frac{dz}{-2y} \ \Rightarrow\ 2y\,dy = -dz\ .$$

Integracijom dobijamo

$$\int (2y)\; dy = -\int dz + K_2 \;\Rightarrow\; y^2 = -z + K_2.$$

Drugi prvi integral glasi

$$\varphi_2 \equiv y^2 + z = C_2.$$

Rešenje PDJ je

$$F\left(x + z^2\;,\; y^2 + z\right) = 0.$$

5. Po nepoznatoj funkciji $y(t)$ rešiti jednačinu

$$y'''(t) + y'(t) = t^2, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

U slučaju primene Laplasove transformacije, koristiti tabelu

$$L[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}\;, \quad L[e^t] = \frac{1}{p-1}\;, \quad L[\cos t] = \frac{p}{p^2+1}\;, \quad L[\sin t] = \frac{1}{p^2+1}\;.$$

Rešenje: Uvedimo oznaku $Y(p) = L[y(t)]$. Primenom Laplasove transformacije, dobijamo

$$L[y'''] + L[y'] = L[t^2],$$

tj.

$$p^3Y(p) + pY(p) = \frac{2}{p^3} \;\Rightarrow\; Y(p) = \frac{2}{p^4(1+p^2)}.$$

Razlaganjem na elementarne razlomke, dobijamo

$$Y(p) = \frac{2}{p^4} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{1+p^2}.$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije dobijamo

$$y(x) = L^{-1}[Y(p)] = \; L^{-1}\left[\frac{2}{p^4}\right] - L^{-1}\left[\frac{2}{p^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{2}{1+p^2}\right].$$

Rešenje je

$$y(t) = -2t + \frac{1}{3}t^3 + 2\sin t.$$

PREDMETNI NASTAVNIK

Dr *Predrag Rajković*, red. prof.