# LAPLASOVA TRANSFORMACIJA

Ova transformacija je nazvan po francuskom matematičaru Pjeru Laplasu (Pierre-Simon Laplace, 1749-1827). Uvođenjem ovakvih transformacija, moguće je probleme iz jedne oblasti matematike prevesti u drugu u kojoj se lakše rešavaju. Na primer, rešavanje diferencijalnih jednačina svodi se na rešavanje algebarskih jednačina.

## 1. UVOD

**Definicija 1.** Neka je *f(t)* kompleksna funkcija realne promenljive, koja zadovoljava sledeće uslove:

1. Funkcija *f (t)* zajedno sa svojim izvodima do *n*-tog reda je deo po deo neprekidna;
2. *f(t)* = 0 za *t* < 0;
3. Postoje pozitivni brojevi *M* i *s* takvi da je

$$|f(t)| < Me^{st} \qquad (t > 0).$$

Takva funkcija predstavlja *original*.

**Definicija 2.** *Laplaceova transformacija* ili *slika* originala *f (t)* definisana je sa

$$\boldsymbol{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt} dt \qquad (p \in C). \qquad (1)$$

Ovaj integral nosi naziv *Laplaceov* integral.

***Teorema 1. (Konvergencija Laplaceovog integrala)*** *Ako je f (t) original tada Laplaceov integral (1) konvergira u svakoj oblasti* $\{p : \mathrm{Re}(p) \geq a\}$, *gde je* $a > s$.

**Dokaz.** Neka su ispunjei uslovi iz Definicije 2 i neka je $\mathrm{Re}(p) \geq a > s$. Tada je

$$|F(p)| \leq \int_0^{+\infty} | f(t) e^{-pt} | dt = \int_0^{+\infty} | f(t) || e^{-pt} | dt < M \int_0^{+\infty} | e^{-pt} | dt.$$

Kako je

$$| e^{-pt} | = | e^{-(\mathrm{Re}(p) + i\,\mathrm{Im}(p))t} | = | e^{-\mathrm{Re}(p)t} || e^{-i\,\mathrm{Im}(p)t} | = e^{-\mathrm{Re}(p)t} < e^{-at},$$

to je

$$|F(p)| \leq M \int_0^{+\infty} e^{(s-a)t} dt = M \left. \frac{e^{(s-a)t}}{s-a} \right|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{M}{a-s}.$$

# 2. OSNOVNA SVOJSTVA

***Teorema 1. (Teorema o linearnosti)*** *Važi formula*

$$\mathbf{L}(c_1f_1(t) + c_2f_2(t)) = c_1\mathbf{L}(f_1(t)) + c_2\mathbf{L}(f_2(t)),$$

Gde su $c_1$, $c_2$ proizvoljne konstante.

**Dokaz.** Po definiciji je:

$$\mathbf{L}(c_1f_1(t) + c_2f_2(t)) = \int_0^{+\infty} (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))\, e^{-pt}dt$$

Na osnovu osobina određenog integrala, dobija se:

$$\int_0^{+\infty} (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))\, e^{-pt}dt = c_1 \int_0^{+\infty} f_1(t)\, e^{-pt}dt + c_2 \int_0^{+\infty} f_2(t)\, e^{-pt}dt = c_1\mathbf{L}(f_1(t)) + c_2\mathbf{L}(f_2(t)),$$

što ustvari predstavlja dokaz predhodne teoreme.

***Teorema 2.*** *Ako je a proizvoljan kompleksan broj i ako je* $\mathbf{L}(f(t)) = F(p)$, *imamo:*

$$\mathbf{L}(e^{at} f(t)) = F(p-a).$$

**Dokaz.** Primenjujući Definiciju 2, dobijamo:

$$\mathbf{L}(e^{at} f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{at}f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-a)t}dt = F(p-a).$$

***Teorema 3.(Teorema o sličnosti)*** *Ako je* $k > 0$ *i* $\mathbf{L}(f(t)) = F(p)$ *tada je*

$$\mathbf{L}(f(kt)) = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right).$$

**Dokaz.** Kako je

$$\mathbf{L}(f(kt)) = \int_0^{+\infty} f(kt)\, e^{-pt}dt,$$

stavljajući $kt = u$, dobija se

$$\mathbf{L}(f(kt)) = \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} f(u)\, e^{-(pu/k)}dt = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right),$$

čime je teorema dokazana.

***Teorema 4.*** *Ako je* $\mathbf{L}(f(t)) = F(p)$, *tada za svaku pozitivnu konstantu a važi*

$$\mathbf{L}(f(t-a)) = e^{-ap} F(p).$$

**Dokaz.** Kako je

$$\boldsymbol{L}(\,f(t-a)) = \int_0^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}dt\,,$$

ako uvedemo smenu $t - a = u$, i vodeći raćuna o tome da je $f\,(u) = 0$ za $u < 0$, dobija se:

$$\int_0^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}dt = \int_{-a}^{+\infty} f(u)e^{-p(u+a)}du = e^{-ap}\int_{-a}^{+\infty} f(u)e^{-pu}du = e^{-ap}\,F(p),$$

što je i trebalo dokazati.

***Teorema 5.*** *Za $a > 0$ važi formula*

$$\boldsymbol{L}(\,f(t+a)) = e^{-ap}\Big(\,F(p) - \int_0^{a} f\,(t)\,e^{-pt}dt\,\Big),$$

*gde je $\boldsymbol{L}(f(t)) = F(p)$.*

**Dokaz.** Po definiciji je

$$\boldsymbol{L}(\,f(t+a)) = \int_0^{+\infty} f\,(t+a)\,e^{-pt}dt \qquad (\,a > 0\,).$$

Ako uvedemo smenu $t + a = u$ ($a \le u < +\infty$), dobijamo

$$\int_0^{+\infty} f\,(t+a)\,e^{-pt}dt = \int_a^{+\infty} f\,(u)\,e^{-up+ap}du = e^{ap}\int_a^{+\infty} f\,(u)\,e^{-up}du$$

$$= e^{ap}\Big(\int_0^{+\infty} f\,(u)\,e^{-up}du - \int_0^{a} f\,(u)\,e^{-up}du\,\Big) = e^{ap}\Big(\,F(p) - \int_0^{a} f\,(u)\,e^{-up}du\,\Big)$$

***Teorema 6.*** *Ako je original $f(t)$ periodična funkcija sa periodom $T$, tada je:*

$$\boldsymbol{L}(f(t)) = F(p) = \frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^{T} f\,(t)e^{-pt}dt$$

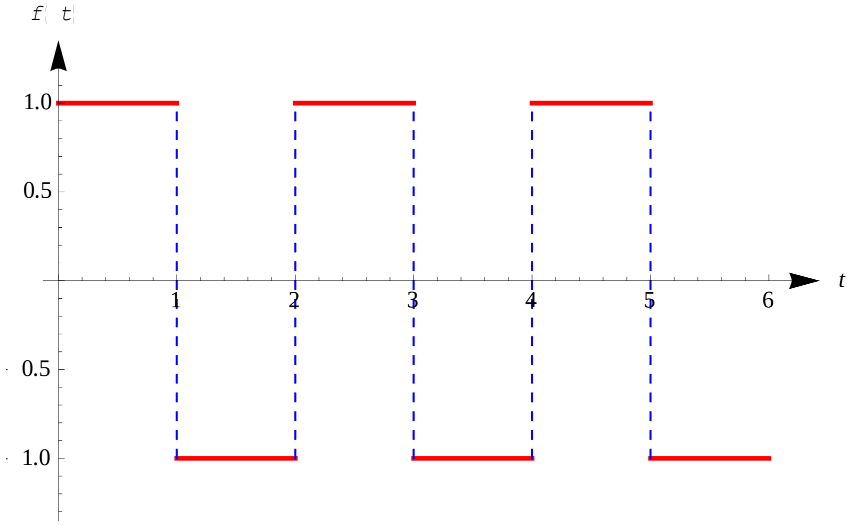
**Dokaz.** Imamo

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f\,(t)\,e^{-pt}dt = \int_0^{T} f\,(t)\,e^{-pt}dt + \int_T^{+\infty} f\,(t)\,e^{-pt}dt.$$

Uvodeći smenu $t = u + T$, dobija se:

$$\int_T^{+\infty} f\,(t)\,e^{-pt}dt = e^{-Tp}\int_0^{+\infty} f\,(u+T)\,e^{-pu}du = e^{-Tp}\int_0^{+\infty} f\,(u)\,e^{-pu}du = e^{-Tp}\,F(p), \quad \text{jer je } f(u+T) = f(u).$$

**Zadatak 1.1.** Odrediti Laplasovu transformaciju funkcije date grafički.




**Rešenje.** Funkcija je periodična sa osnovnim delom

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1, \\ -1, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Stoga je

$$L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2p}} \int_0^2 f(t)e^{-pt}dt = \frac{1}{1-e^{-2p}} \left( \int_0^1 e^{-pt}dt - \int_1^2 e^{-pt}dt \right) = \frac{(e^p-1)^2}{p(e^{2p}-1)}.$$

***Teorema 7.*** *Ako su funkcija f(t) i njeni izvodi do n-tog reda originalni, tada važi formula*

$$\boldsymbol{L}(f^{(n)}(t)) = p^n \boldsymbol{L}(f(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0).$$

**Dokaz.** Primenićemo princip matematičke indukcije. Za $n = 1$, imamo:

$$L(f'(t)) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt.$$

Primenom parcijalne integracije birajući $u_1(t) = e^{-pt}dt$ i $dv_1(t) = f'(t)dt,$ dobijamo

$$L(f'(t)) = = e^{-pt} f(t)\Big|_{t=0}^{t=+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = p\boldsymbol{L}(f(t)) - f(0),$$

što znači da je formula u ovom slučaju tačna. Pretpostavimo da formula važi za neko $n$. Sličnom primenom parcijalne integracije, dobija se:

$$\boldsymbol{L}(f^{(n+1)}(t)) = \int_0^{+\infty} f^{(n+1)}(t)e^{-pt}dt = e^{-pt} f^{(n)}(t)\Big|_{t=0}^{t=+\infty} + p\int_0^{+\infty} f^{(n)}(t)e^{-pt}dt = p\boldsymbol{L}(f^{(n)}(t)) - f^{(n)}(0)$$

$$= p\left(p^n\boldsymbol{L}(f(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0)\right) - f^{(n)}(0) = p^{n+1}\boldsymbol{L}(f(t)) - \sum_{k=0}^{n} p^{n-k} f^{(k)}(0).$$

Prema tome, pošto formula i za $n$+1, zaključujemo da je formula važi za bilo koji prirodan broj $n$.

***Teorema 8.*** *Ako je **L**(f(t)) = F(p), tada je*

$$\boldsymbol{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{F(p)}{p}.$$

**Dokaz.** Prema definiciji je

$$J = L\left(\int_0^t f(u)du\right) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(u)du\right)e^{-pt}dt.$$

Primenom parcijalne integracije birajući $u_1(t) = \int_0^t f(u)du$ i $dv_1(t) = e^{-pt}dt,$ dobijamo

$$J = \left(\frac{e^{-pt}}{-p}\int_0^t f(u)du\right)\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-pt}}{-p} f(t)dt = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \frac{F(p)}{p}.$$

***Teorema 9.*** *Ako je **L**(f(t)) = F(p), tada važi:*

$$\boldsymbol{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(p).$$

**Dokaz.** Kako je po definiciji $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$ ,diferenciranjem ove jednakosti po $p$ dobija se:

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} f(t)dt.$$

## 3. TABLICA LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE

1. Laplaceova transformacija eksponencijalne funkcije nalazi se primenom Definicije 2:

$$\boldsymbol{L}(e^t) = \int_0^{+\infty} e^t e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{(1-p)t}dt = \frac{1}{p-1} \qquad (\,Re(p)>1\,).$$

Kako je $\boldsymbol{L}(e^t) = \frac{1}{p-1}$, a na osnovu teoreme o sličnosti, dobija se:

$$\boldsymbol{L}(e^{at}) = \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{p}{a}-1} = \frac{1}{p-a}.$$

2. Poznati su sledeći obrasci:

$$\cos at = \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2} \qquad \sin at = \frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}$$

$$ch\, at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2} \qquad sh\, at = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$$

Prema tome:

$$L(\cos at) = \frac{1}{2}\left(L\left(e^{iat}\right) + L\left(e^{-iat}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-ia} + \frac{1}{p+ia}\right) = \frac{p}{p^2+a^2}.$$

Koristeći se identičnom logikom, dobija se:

$$L(\sin at) = \frac{1}{2i}\left(L\left(e^{iat}\right) - L\left(e^{-iat}\right)\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-ia} - \frac{1}{p+ia}\right) = \frac{a}{p^2+a^2}.$$

$$L(\cosh at) = \frac{1}{2}\left(L(e^{at}) + L(e^{-at})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a}\right) = \frac{p}{p^2-a^2}.$$

$$L(\sinh at) = \frac{1}{2}\left(L(e^{at}) - L(e^{-at})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a}\right) = \frac{a}{p^2-a^2}.$$

Pregled Laplaceovih transformacija nekih elementarnih funkcija, dat je tabelarno u nastavku teksta.

| | Original | Slika | Ograničenja |
|---|---|---|---|
| 1 | $t^n$ | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ | $n \epsilon N_0$ |
| 2 | $t^a$ | $\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$ | $a > -1$ |
| 3 | $\frac{1}{\sqrt{t}}$ | $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$ | |
| 4 | $e^{at}$ | $\frac{1}{p-a}$ | |
| 5 | $t^a e^{bt}$ | $\frac{\Gamma(a+1)}{(p-b)^{a+1}}$ | |
| 6 | $\cos at$ | $\frac{p}{p^2+a^2}$ | |
| 7 | $\sin at$ | $\frac{a}{p^2+a^2}$ | |
| 8 | $\cosh at$ | $\frac{p}{p^2-a^2}$ | |
| 9 | $\sinh at$ | $\frac{a}{p^2-a^2}$ | |

# 4. INVERZNA LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

**Definicija 3.** *Inverzna Laplaceova transformacija* slike *F (p)* je original *f (t)* definisan sa

$$f(t) = L^{-1}(F(p)) \quad \Leftrightarrow \quad L(f(t)) = F(p) \qquad\qquad (p \in C). \qquad (1)$$

Određivanje inverzne Laplaceove transformacije date slike je direktno povezano sa sledećom teoremom.

***Teorema 1.*** *Ako funkcija f(t) zadovoljava Dirichletove uslove (1)-(2):*

1. *f (t) je deo po deo neprekidna;*
2. *f (t) ima konačno mnogo ekstremuma;*

*i uslov*

3. *integral* $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ *je konvergentan,*

*tada se f(t) može predstaviti Fourierovim integralom*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos(r(t-u))\,du\,dr.$$

Sličan integral po sinusu je jednak nuli zbog neparnosti ove funkcije. Stoga je

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{r(t-u)i}\,du\,dr.$$

***Teorema 2(Riemann-Mellin).*** *Ako je* ***L****(f(t)) = F(p), funkcija f(t) zadovoljava Dirichletove uslove (1)-(2) i integral* $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\,dt$ *je uniformno-konvergentan po pravoj* $\{p : \mathrm{Re}(p) = s\}$, *tada je*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt}\,dp.$$

Inverzna Laplaceova transformacija *f(t)* funkcije *F(p)* definisana je izrazom:

$$f(t) = L^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt}\,dp.$$

što se svodi na proračunavanje krivolinijskog integrala u kompleksnoj ravni. Ovaj postupak implicira iz Riemann-Mellinove teoreme. Budući da je ovaj postupak dosta složen, za nalaženje inverzne transformacije koriste se jednostavnije metode. Kod jednostavnijih funkcija *F(p)* koristi se tablica funkcija.

# 5. PRIMENE LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE

Laplaceova transformacija funkcija se može uspešno primeniti na rešavanje običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina, diferencnih i diferencno-diferencijalnih jednačina.

## 5.1. REŠAVANJE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Koristeći pravila za nalaženje *Laplaceove transformacije* pojedinih funkcija, možemo formirati novi metod za rešavanje diferencijalnih jednačina i sistema diferencijalnih jednačina.

Za diferencijalnu jednačinu oblika

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

postupak se sastoji u sledećem:

1. odredi se Laplaceova transformacija svakog člana diferencijalne jednačine;
2. iz tako dobijene algebarske jednačine odredi se rešenje *F(p);*
3. inverznom transformacijom kompleksne funkcije *F(p)* dobija se traženo rešenje *f(t)* polazne diferencijalne jednačine.

**Zadatak 5.1.1.** Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$y''' - y' = 3(2 - t^2), \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1.$$

**Rešenje.** Označimo sa ***L****(y(t))* = *Y(p).* Prema teoremi o izvodu, imamo
$L(y') = pY(p) - y(0), \quad L(y'') = p^2Y(p) - py(0) - y'(0),$
$L(y''') = p^3Y(p) - p^2y(0) - py'(0) - y''(0).$
U konkretnom zadatku, važi

$$L(y''') - L(y') = 6L(1) - 3L(t^2),$$

tj.,

$$(p^3Y(p) - p^2 - p - 1) - (pY(p) - 1) = \frac{6}{p} - 3\frac{2}{p^3}.$$

Odatle

$$Y(p) = \frac{p^5 + p^4 + 6p^2 - 6}{p^4(p-1)} = \frac{6}{p^4} + \frac{1}{p-1}.$$

Primenom inverzne Laplaceove transformacije dobijamo

$$L^{-1}\big(Y(p)\big) = L^{-1}\left(\frac{6}{p^4}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right),$$

tj. tačno rešenje glasi

$$y = e^t + t^3.$$

. **Zadatak 5.1.2.** Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + y = 2\cos t\,, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$$

**Rešenje.** Označimo sa ***L****(y(t))* = *Y(p)*. Prema teoremi o izvodu, imamo
$L(y') = pY(p) - y(0), \quad L(y'') = p^2Y(p) - py(0) - y'(0),$
U konkretnom zadatku, važi

$$L(y'') + L(y) = 2\,L(\cos t),$$

tj.,

$$(p^2Y(p) + 1) + Y(p) = \tfrac{2p}{p^2+1}.$$

Odatle

$$Y(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Primenom inverzne Laplaceove transformacije dobijamo

$$L^{-1}\big(Y(p)\big) = L^{-1}\left(\frac{2p}{(p^2+1)^2}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right).$$

Iz tablice imamo

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \sin t\,.$$

Sa druge strane je

$$\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = -\left(\frac{2p}{(p^2+1)^2}\right).$$

Kako je

$$\boldsymbol{L}(\,t^n f(t)) = (\,-1)^n F^{(n)}(p).$$

Zaključujwmo da je

$$\boldsymbol{L}\,(F'(p)) = -t\,f(t) = t\sin t.$$

tj. tačno rešenje glasi

$$y = (t-1)\sin t.$$

**Zadatak 5.1.3.** Odrediti partikularno rešenje sistema diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} x'' + y'' + x' - y &= e^t, & x(0) &= 0, \quad x'(0) = 1, \\ x' - y' + 2x + y &= e^{-t}, & y(0) &= y'(0) = 0. \end{aligned}$$

**Rešenje.** Uvedimo oznake ***L****(x(t))* =*X(p)* i ***L****(y(t))* = *Y(p)*. Primenom Laplaceove transformacije na sistem dobijamo

$$(p^2 + p)X(p) + (p^2 - 1)Y(p) = \frac{p}{p-1},$$
$$(p + 2)X(p) - (p - 1)Y(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Rešenje ovog sistema je

$$X(p) = \frac{2p - 1}{2(p-1)(p^2-1)(p+1)^2},$$

$$Y(p) = \frac{3p}{2(p^2-1)^2}.$$

Razlaganjem na elementarne razlomke, dobijamo

$$X(p) = \frac{1}{8}\frac{1}{p-1} - \frac{1}{8}\frac{1}{p+1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(p+1)^2},$$

$$Y(p) = \frac{3p}{2(p^2-1)^2} = \frac{1}{8}\frac{A}{p-1} + \frac{3}{4}\frac{B}{(p-1)^2} - \frac{1}{8}\frac{C}{p+1} + \frac{3}{4}\frac{D}{(p+1)^2}.$$

Primenom inverzne Laplaceove transformacije, dobijamo rešenje početnog sistema

$$x(t) = \frac{1}{4}\sinh t + \frac{3}{4}\, te^{-t},$$

$$y(t) = \frac{3}{4} t \sinh t.$$

## 5.2. DIFERENCIJALNO- DIFERENCNE JEDNAČINE

Diferencijalno-diferencne jednačine su diferencijalne jednačine sa pomerenim argumentom oblika

$$F(t, y(t - t_0), y'(t - t_1), \dots, y^{(n)}(t - t_n)) = 0,$$

gde su $t_0, t_1, \dots, t_n$ dati brojevi. Zadaju se još i početni ili granični uslovi.

**Zadatak 5.2.1.** Odrediti partikularno rešenje diferencijalno-diferencne jednačine

$$y'' - y'(t-2) + y(t-4) = t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

**Rešenje.** Označimo sa ***L(y(t))*** = *Y(p)*. Prema teoremi o izvodu, imamo

$$L(y') = pY(p) - y(0), \quad L(y'') = p^2Y(p) - py(0) - y'(0),$$

što zbog početnih uslova postaje

$$L(y^{(k)}(t\,)) = p^k Y(p)\,,$$

a odatle je

$$L(y^{(k)}(t - t_k\,)) = e^{-t_k p} p^k Y(p)\,.$$

Tako imamo

$$L(y'(t-2\,)) = e^{-2p} pY(p)\,, \quad L(y''(t-4\,)) = e^{-4p} p^2 Y(p)\,.$$

Odatle

$$Y(p) = \frac{1}{p^2(p+e^{-2p})^2} = \frac{1}{p^4}\left(1+\frac{1}{pe^{2p}}\right)^{-2} = \frac{1}{p^4}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k} \left(\frac{1}{pe^{2p}}\right)^k$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{k+1}{(k+3)!}\,(t-2k)^{k+3}.$$

## 5.3. REŠAVANJE PARCIJALNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

U narednom primeru pokazaće se kako je moguće primenom Laplaceovih transformacija doći, relativno jednostavno, don rešenja parcijalnoh diferencijalnih jednačina. Naravno, ovo je moguće samo u slučajevima kada su definisani konturni uslovi pa će se ovakav slučaj ovde i razmatrati.

Neka je data žica koja celom svojom dužinom leži na x-osi , sa jednim krajem u koordinatnom početku a drugim krajem u beskonačno udaljenoj tački na pozitivnom delu x-ose. Onaj kraj koji je u trenutku t=0 bio u koordinatnom početku, pomera se duž y-ose tako da je y=f(t) kada je x=0 i u trenutku t pri čemu je f(t) neprekidna funkcija vremena t i f(0)=0. Potrebno je dakle odrediti funkciju y(x,t), tj. ortogonalne oscilacije pojedinih tačaka žice oko inicijelnog položaja.

Matematički model tog problema mogao bi se formulisati na sledeći način (uzeto je da je $b^2 = \frac{1}{a^2}$ ):

$$y_{tt}(x,t) = b^2 y_{xx}(x,t), \;\; x>0, t>0 \qquad (1)$$

$$y(x,0) = y_t(x,0), \; x>0 \qquad (2)$$

$$y(0,t) = f(t), \; \lim_{x\to\infty} y(x,t) = 0, \; t\geq 0 \qquad (3)$$

Potrebno je odrediti Laplaceovu transformaciju pojedinih članova diferencijalne jednačine:

$$\mathbf{L}\left[y(x,t)\right] = \int_0^\infty y(x,t)e^{-pt}dt = Y(x,p)$$

$$\mathbf{L}\,[f(t)] = F(p)$$

$$\mathbf{L}\left[y_t(x,t)\right] = pY(x,p) - y(x,0)$$

$$\mathbf{L}\left[y_{tt}(x,t)\right] = p^2Y(x,p) - py(x,0) - y_t(x,0)$$

Koristeći uslove (1) dobija se:

$$\mathbf{L}\left[y_{tt}(x,t)\right] = p^2Y(x,p)$$

$$\mathbf{L}\left[y_{xx}(x,t)\right] = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t)e^{-pt}dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty y(x,t)e^{-pt}dt$$

$$\mathbf{L}\left[y_{xx}(x,t)\right] = Y_{xx}(x,p)$$

Iz uslova (3):

$y(0,t)=f(t) \rightarrow \mathbf{L}\,[y(0,t)] = \mathbf{L}[f(t)]$

$Y(0,p)=F(p)$

$$\lim_{x\to\infty} Y(x,p) = \lim_{x\to\infty}\int_0^\infty y(x,t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty \lim_{x\to\infty} y(x,t)e^{-pt}dt = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} Y(x,p) = 0$$

Parcijalna diferencijalna jednačina (1) postaje:

$$\frac{d^2Y(x,p)}{dx^2} - p^2b^2Y(x,p) = 0$$

$Y(0,p)= F(p),\ \lim_{x\to\infty} Y(x,p) = 0 \qquad p>0,\ b>0$

Na ovaj način se od parcijalne diferencijalne jednačine prelazi na običnu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda takođe sa konturnim uslovima:

$$k^2 - p^2b^2 = 0 \rightarrow k_{1,2} = \pm pb$$

Opšte rešenje ove diferencijalne jednačine je:

$$Y(x,p) = C_1(p)e^{-pbx} + C_2(p)e^{pbx}$$

$$\lim_{x\to\infty} Y(x,p) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2(p) = 0$$

Y(0,p)=F(p) $\rightarrow C_1(p) = F(p)$

Odatle sledi:

$$Y(x,p) = e^{-pbx}F(p)$$

Inverzna Laplaceova transformacija daje:

y(x,t) = $\mathbf{L}^{-1}[Y(x,p)] = \mathbf{L}^{-1}[e^{-pbx}F(p)]$

y(x,t) = 0 za $t < bx$

y(x,t) = f(t-bx) za $t \geq bx$