V GLAVA

3. KRIVOLINIJSKI I POVRŠINSKI INTEGRALI

3.1. Krivolinijski integrali prve i druge vrste. Grinova formula

Neka je u prostoru E^3 zadata orijentisana gltka kriva

$$\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) : t \in [a, b]\} \tag{21}$$

sa svojstvom da $M_1 \to M_0$ (po krivoj Γ) $\iff$ $t_1 \to t_0$, gde t_0 i t_1 označavaju vrednosti parametra t koje odgovaraju tačkama M_0 i M_1.

Luk neke krive (21), sa krajnjim tačkama A i B, označićemo sa $\overset{\frown}{AB}$. Pretpostavimo da tačkama A i B odgovaraju vrednosti a i b parametra t, kao i da se luk $\overset{\frown}{AB}$ tretiran kao prostorna kriva, može predstaviti u obliku (21).

Ako je luk $\overset{\frown}{AB}$ krive (21) rektifikabilan, za parametar t može se uzeti dužina luka s, pa se u tom slučaju može predstaviti u obliku

$$r(s) = \{(x(s), y(s), z(s)) : 0 \leq s \leq S\}, \tag{22}$$

pri čemu je $A = r(0)$ i $B = r(S)$. Pri tome upotrebljavaćemo oznaku $\gamma = \overset{\frown}{AB}$, a za krivu suprotne orjientacije $\gamma^- = \overset{\frown}{BA}$

3.1.1. Definicija. Neka je na tačkama $r(s)$ krive γ zadata neka funkcija F. Tada izraz $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)ds$, odredjen formulom

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)ds = \int\limits_0^S F(x(s), y(s), z(s))ds, \tag{23}$$

naziva se *krivolinijskim integralom prve vrste funkcije F po krivoj $\overset{\frown}{AB}$.*

Pored ovako uvedene oznake za krivolinijski integral prve vrste koriste se još i sledeće oznake :

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F[r(s)]ds, \quad \int\limits_{\gamma} F[r(s)]ds, \quad \int\limits_{\gamma} F(s)ds.$$

Prema ovoj definiciji krivolinijski integral prve vrste funkcije F po krivoj $\overset{\frown}{AB}$, svodi se na običan Rimanov integral funkcije zadate na odsečku. Prema tome na krivolinijski integral prenose se sva svojstva običnog integrala, kao što su, na primer, aditivnost, homogenost, linearnost, monotonost, teorema o srednjoj vrednosti itd. Ovde ističemo neka specifična svojstva krivolinijskog integrala.

Prema 2.1.5. Definiciji, neposreno se može zaključiti da je

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds = S.$$

Sledeća teorema direktna je posledica dobro poznate teoreme o egzistenciji Rimanovog integrala za neprekidne funkcije na odsečku.

3.1.2. Teorema. *Neka je funkcija F neprekidna na krivoj γ kao funkcija parametra s. Tada egzistira*

$$\int\limits_{\gamma} F(s)ds.$$

3.1.3. Teorema. *Krivolinijski integral prve vrste ne zavisi od orijentacije krive* :

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)ds = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x,y,z)ds.$$

Dokaz. Neka je $M = r(s)$ tačka krive $\overset{\frown}{AB}$ i s dužina luka $\overset{\frown}{AM}$. Tada je $\sigma = S - s$ dužina luka $\overset{\frown}{BM}$, a $r = r(S-\sigma)$, $0 \le \sigma \le S$, jedno predstavljanje krive $\overset{\frown}{BA}$. Ako u integralu (23) uvedemo smenu $s = S - \sigma$ granice se menjaju i to $0 \to S,\ S \to 0$, a $ds = -d\sigma$ pa je

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)ds &= \int\limits_{0}^{S} F[x(s),y(s),z(s)]ds \\
&= -\int\limits_{S}^{0} F[x(S-\sigma),y(S-\sigma),z(S-\sigma)]d\sigma \\
&= \int\limits_{0}^{S} F[x(S-\sigma),y(S-\sigma),z(S-\sigma)]d\sigma \\
&= \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x,y,z)ds. \blacksquare
\end{aligned}
$$

3.1.4. Teorema. *Neka je* $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ *podela segmenta* $[0, S]$, $\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$, $\triangle s_i = s_i - s_{i-1}$ *dužina luka krive* γ *od tačke* $r(s_{i-1})$ *do tačke* $r(s_i)$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, $\delta_\tau = \max \triangle s_i$ *i* $\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i=i_0} F[r(\xi_i)]\triangle s_i$. *Ako je funkcija* $F[r(s)]$ *integrabilna na odsečku* $[0, S]$, *tada je*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int\limits_\gamma F ds.$$

Dokaz. Razume se, da je σ_τ integralna suma Rimanovog integrala $\int\limits_\gamma F ds$, pa je prema 3.1.2. Teoremi, i formuli (23)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int\limits_\gamma F ds. \blacksquare$$

3.1.5. Teorema. *Neka je* γ *orijentisana glatka kriva predstavljena sa* $r(t) = \{\varphi(t), \psi(t), \chi(t); a \leq t \leq b\}$ *i* $F = F(t) t \in [a, b]$ *funkcija neprekidna na* γ. *Tada je*

$$\int\limits_\gamma F(x, y, z) ds = \int\limits_a^b F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt. \quad (24)$$

Dokaz. Ovde su ispunjeni svi uslovi za zamenu nezavisno promenljive, $s = s(t)$ u običnom Rimanovom integralu, pa je

$$\int\limits_\gamma F(x, y, z) ds = \int\limits_a^b F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] s'(t) dt.$$

Medjutim, kako je (videti Primedbu posle 2.1.6. Teoreme)

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2},$$

to je

$$\int\limits_\gamma F(x, y, z) ds = \int\limits_a^b F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt. \blacksquare$$

3.1.6. Primer. Izračunati integral $\int\limits_{\widehat{AB}} xyzds$ ako je

$$\widehat{AB} = \{(x, y, z) : \ x = t, \ y = \frac{t^2}{2}, \ z = \frac{2t\sqrt{2t}}{3}, \ 0 \leq t \leq 1\}.$$

Rešenje. Kako je

$$x'_t = 1, \quad y'_t = t, \quad z'_t = \sqrt{2t},$$

to, primenom formule (25) imamo

$$\begin{aligned}\int\limits_{\widehat{AB}} xyzds &= \int\limits_0^1 (t \cdot \frac{t^2}{2} \cdot \frac{2t\sqrt{2t}}{3} \cdot \sqrt{1 + 2t + t^2})dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \int\limits_0^1 (1 + t)t^{\frac{9}{2}} dt \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{143}. \blacklozenge\end{aligned}$$

3.1.7. Primer. Izračunati $\int\limits_{\widehat{AB}} ye^{-x}ds$, ako je

$$\widehat{AB} = \{(x, y) : \ x = \ln(1 + t^2), \ y = 2 \arctan t - t, \ 0 \leq t \leq 1\}.$$

Rešenje. $\frac{\pi^2}{16} - \frac{\ln 2}{2}$.$\blacklozenge$

Neka je $\gamma = \widehat{AB}$ orijentisana glatka kriva sa neprekidno diferencijabilnim predstavljanjem

$$r(t) = \{x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t); a \leq t \leq b\}, A = r(a), B = r(b),$$

pri čemu je

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 > 0, a \leq t \leq b.$$

Ovde je $s = s(t)$ promenljiva dužina luka ali je $0 \leq s \leq S$, gde je S kompletna dužina krive $\gamma = \widehat{AB}$. Ako sa $\vec{t}$, kao što smo i dosad činili, označimo jedinični vektor tangente na krivu, a sa α, β, γ uglove koje zaklapa sa koordinatnim osama, prema ranije izloženom je :

$$\vec{t} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k},$$

gde je

$$\alpha = \alpha(s),\ \beta = \beta(s),\ \gamma = \gamma(s), 0 \le s \le S,$$

odnosno

$$\cos\alpha(s) = \frac{dx}{ds},\ \cos\beta(s) = \frac{dy}{ds},\ \cos\gamma(s) = \frac{dz}{ds}.$$

Za funkcije $F(x,y,z), P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ definisane na skupu $\{r(t) : a \le t \le b\}$ svih tačaka krive $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ može se definisati krivolinijski integral druge vrste na sledeći način.

3.1.8. Definicija. Integrali

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)dx,\ \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)dy,\ \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)dz,$$
$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

definisani po formulama

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)dx = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)\cos\alpha ds$$
$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)\cos\beta ds$$
$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)dz = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)\cos\gamma ds$$
$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]ds$$

nazivaju se *krivolinijskim integralima druge vrste po krivoj* $\overset{\frown}{AB}$.

Napomena. Integral $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ definisan na predhodni način naziva se još i *kombinovanim krivolinijskim integralom.* Medjutim, prema ranije datoj definiciji integrala vektorske funkcije, može se razmatrati kao integral od skalarnog proizvoda sledećih vektorskih funkcija:

$$P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

$$dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k},$$

gde je

$$dx = x'(t)dt, \quad dy = y'(t)dt, \quad dz = z'(t)dt.$$

Sledeća svojstva krivolinijskog integrala druge vrste dokazujemo za integral tipa

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)dx = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)\cos\alpha ds,$$

uz napomenu da se na potpuno isti način dokazuju i za ostale integrale date prethodnom definicijom.

3.1.9. Teorema. *Neka je funkcija* $F = F[r(t)], a \le t \le b$ *neprekidna na glatkoj krivoj* $\gamma = \overset{\frown}{AB}$. *Tada egzistira*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)dx = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)\cos\alpha ds.$$

Dokaz. Pošto je $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ glatka kriva, funkcija $t = t(s)$ (t je parametar krive, a s promenljiva dužina luka) je neprekidno diferencijabilna na odsečku $[0,S]$, pa je i funkcija $\cos\alpha = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}$ takodje neprekidna na istom odsečku. Dakle, prema 3.1.3. Teoremi, sleduje egzistencija integrala

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)dx = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)\cos\alpha ds.\blacksquare$$

Da bi izložili ostala svojstva krivoliniskog integrala druge vrste potrebno je najpre obezbediti njegovu egzistenciju. U tom smislu, u daljem tekstu, pretpostavićemo da je funkcija F neprekidna na orijentisanoj glatkoj krivoj $\gamma = \overset{\frown}{AB}$.

3.1.10. Teorema. *Krivolinijski integral druge vrste menja znak u slučaju kada kriva menja orijentaciju tj.*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)dx = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x,y,z)dx.$$

Dokaz. Neka je α ugao koji obrazuje pozitivno orijentisan vektor tangente na krivoj $\overset{\frown}{AB}$ sa x osom, a α' ugao koji obrazuje pozitivno orijentisan vektor tangente na krivoj $\overset{\frown}{BA}$ sa x osom. Razume se, da je $\alpha' = \alpha + \pi$, pa je $\cos\alpha' = -\cos\alpha$. Primenom ovog rezultata u 3.1.6. Definiciji, dobiće se

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x,y,z)dx = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x,y,z)\cos\alpha' ds = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x,y,z)\cos\alpha ds.$$

Medjutim, kako krivolinijski integral prve vrste ne menja znak pri menjanju orijentacije krive,

$$-\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x,y,z)\cos\alpha ds = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)\cos\alpha ds,$$

pa je

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x,y,z)dx = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)dx.\blacksquare$$

3.1.11. Teorema.*Neka je $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ orijentisana glatka kriva sa neprekidno diferencijabilnim predstavljanjem*

$$r(t) = \{x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t); a \le t \le b\}, A = r(a), B = r(b),$$

pri čemu je

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 > 0,\ \ a \le t \le b,$$

i neka je funkcija $F = F[r(t)], a \le t \le b$ neprekidna na krivoj γ. Tada je

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)dx = \int\limits_a^b F[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Dokaz. Prema 3.1.6. Definiciji je

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)dx = \int\limits_0^S F[x(s),y(s),z(s)]\cos\alpha(s)ds.$$

Zamenom nezavisno promenljive $s = s(t)$ na desnoj strani ove jednakosti imamo da je $\cos\alpha(s) = \frac{dx}{ds} = \frac{x'(t)}{s'(t)}$, pa je

$$\int\limits_0^S F[x(s),y(s),z(s)]\cos\alpha(s)ds =$$

$$= \int\limits_a^b F[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\frac{x'(t)}{s'(t)}s'(t)dt$$

$$= \int\limits_a^b F[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\varphi'(t)dt.\blacksquare$$

Napomena. Ako je kriva $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ data predstavljanjem $y = y(x), z = z(x), a \leq x \leq b$, krivolinijski integral druge vrste izračunava se po formuli

$$\int\limits_\gamma Fx,y,z)dx = \int\limits_a^b F[x,y(x),z(x)]dx.$$

Sledeća teorema dokazuje se na potpuno isti način kao i 3.1.4. Teorema.

3.1.12. Teorema. *Neka je* $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ *ma koja podela odsečka* $[a,b]$, $\xi_i \in [t_{i-1},t_i], \triangle x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,2,\ldots,i_0, \delta_\tau = \max\triangle x_i$ *i* $\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i=i_0} F[r(\xi_i)]\triangle x_i$. *Ako je funkcija* $F[r(t)]$ *integrabilna na odsečku* $[a,b]$, *tada je*

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau = \int\limits_\gamma F(x,y,z)dt.$$

3.1.13. Primer. Izračunati

$$J = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (x+y)dx + 2zdy + xydz$$

duž krive

$$\gamma = \{(x, y, z) : x = t,\ y = t^2,\ z = 3 - t\}$$

od tačke $A(2, 4, 1)$ do tačke $B(1, 1, 2)$.

Rešenje. Vrednost parametra t u tački A u oznaci t_A dobija se rešavanjem sistema

$$\begin{aligned} t &= 2, \\ t^2 &= 4, \\ 3 - t &= 1. \end{aligned}$$

Odatle dobijamo $t_A = 2$. Slično se dobija $t_B = 1$. Kako je još $x'_t = 1, \quad y'_t = 2t, \quad z'_t = -1$, prema 3.1.11. Teoremi, imamo

$$J = \int_2^1 [(t + t^2) \cdot 1 + 2(3 - t) \cdot 2t + t \cdot t^2 \cdot (-1)]dt = -8\frac{3}{4}.\blacklozenge$$

3.1.14. Primer. Dokazati da je

$$\int_\gamma xydx + yzdy + zxdz = 0,$$

ako je

$$\gamma = \{(x, y, z) : |x| + |y| = 1, \quad z = 0\}.$$

Sledeća teorema daje vezu izmedju dvostrukog integrala i krivoliniskog integrala druge vrste i poznata je kao *Grinova formula.*

3.1.15. Definicija. *Prosto (jednostruko)* povezana oblast u E^2 je svaka oblast (otvoren i povezan skup) $G \subset E^2$ sa svojstvom da za svaku zatvorenu krivu, bez tačaka samopresecanja sadržanu u G, deo ravni E^2 ograničen tom krivom takodje je sadržan u G. Usuprotnom oblast je višestruko povezana.

Na primer, svaka kružna površ u E^2 je prosto (jednostruko) povezana, a svaka oblast koja je kružni prsten je višestruko povezana.

3.1.16. Teorema. *Neka su funkcije $P(x, y)$, $Q(x, y)$ i njihovi parcijalni izvodi $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ neprekidni u ravnoj oblasti D koja ima za granicu (rub) krivu*

$$\Gamma = \overset{\frown}{AB} \cup \overline{BC} \cup \overset{\frown}{CE} \cup \overline{EA}$$

sa sledećim predstavljanjem

$$
\begin{aligned}
\overset{\frown}{AB} &= \{(x,y) : y = y_1(x); a \le x \le b\},\\
\overline{BC} &= \{(x,y) : x = b; y_1(x) \le y \le y_2(x)\},\\
\overset{\frown}{CE} &= \{(x,y) : y = y_2(x); a \le x \le b\},\\
\overline{EA} &= \{(x,y) : x = a; y_1(x) \le y \le y_2(x)\}.
\end{aligned}
$$

Slika 6

Tada je

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{25}$$

Dokaz. Prema poznatoj formuli za izračunavanje dvostrukog integrala imamo da je

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int\limits_a^b \left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx = \int\limits_a^b [P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))]dx\\
&= \int\limits_a^b P(x,y_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x,y_1(x))dx.
\end{aligned}
$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_a^b P(x,y_2(x))dx = - \int\limits_{\overset{\frown}{CE}} P(x,y)dx,\\
&\int\limits_a^b P(x,y_1(x))dx = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx,\\
&\int\limits_{\overline{BC}} P(x,y)dx = 0, \quad \int\limits_{\overline{EA}} P(x,y)dx = 0,
\end{aligned}
$$

to je

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx - \int\limits_{\overline{BC}} P(x,y)dx$$

$$-\int\limits_{\overset{\frown}{CE}} P(x,y)dx - \int\limits_{\overline{EA}} P(x,y)dx = -\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx,$$

odnosno

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Na sličan način se dokazuje i tačnost jednakosti

$$\int\limits_{\Gamma} Q(x,y)dy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

Odatle, onda, sledi formula (25).■

Napomene. U vezi predhodne teoreme treba istaći sledeće :

(a) Kriva Γ koja je rub oblasti D je *deo-po-deo glatka kriva,* a integral na levoj strani formule (25) uobičajeno se označava sa

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

(b) Ako pored uslova sadržanih u 3.1.15. Teoremi, za funkcije

$$P(x,y),\ Q(x,y)$$

važi još

$$\forall (x,y) \in D: \ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

onda je za svaku zatvorenu krivu $\Gamma \subset D$.

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

3.1.17. Teorema. *Neka su funkcije $P(x,y)$, $Q(x,y)$ i njihovi parcijalni izvodi $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ neprekidni u svim tačkama jednostruko povezane,* *zatvorene i ogranučene oblasti $G \subset E^2$ i neka je γ proizvoljna zatvorena kriva sadržana u G. Tada je*

$$\int\limits_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \iff \forall (x,y) \in D : \ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

gde je D deo ravni ograničen krivom γ.

Dokaz. Tvrdjenje $\forall (x,y) \in D : \ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \int\limits_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ je direktna posledica Grinove formule, a za suprotni smer teoreme po Grinovoj formuli imamo jednakost

$$0 = \int\limits_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Ako se na jednakost

$$0 = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

primeni 1.1.24. Teorema iz glave o integralima, dolazi se do uslova

$$\forall (x,y) \in D : \ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \blacksquare$$

3.1.18. Primer. Izračunati

$$I = \oint\limits_\gamma (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy,$$

ako je

$$\gamma = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = ax, \quad z = 0, \quad (a > 0)\}.$$

Rešenje. Ovde je kriva γ kružnica sa centrom u tački $(\frac{a}{2}, 0)$, a poluprečnik joj je $\frac{a}{2}$. Oblast D čija je granica (rub) kriva γ je

$$\{(x,y) : (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 < \frac{a}{2}\}.$$

Primenom Grinove formule imamo

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D (y+1-x-1)dxdy = \iint\limits_D (y-x)dxdy \\
&= \int\limits_0^a dx \left(\int\limits_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} (y-x)dy \right) \\
&= \int\limits_0^a dx \left(\frac{y^2}{2} - xy \right) \Big|_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} \\
&= -2\int\limits_0^a x\sqrt{ax-x^2}dx \\
&= -\frac{\pi a^3}{8}. \blacklozenge
\end{aligned}
$$

Čitaocu preporučujemo da dodje do istog rezultata neposrednim izračunavanjem našeg integrala.

3.2. Površinski integrali prve i druge vrste. Formula Gaus-Ostrogradskog

Neka je

$$
\begin{aligned}
S &= \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \overline{D}\}, \\
&= \{x = x(u,u),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v) : (u,v) \in \overline{D}\}
\end{aligned}
$$

neprekidno diferencijabilna glatka površ, pri čemu se površina zatvorene ravne oblasti $\overline{D}$ može izračunati integracijom (kvadrabilna oblast). Kao što je uobičajeno sa E, G, i F označimo koeficijente prve kvadratne forme površi S. Neka je u svakoj tački $(x,y,z) \in S$ definisana funkcija $\Phi(x,y,z) = \Phi(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) : (u,v) \in \overline{D}$.

3.2.1. Definicija. Integral $\iint\limits_S \Phi(x,y,z)dS$ definisan jednakošću

$$
\iint\limits_S \Phi(x,y,z)dS = \iint\limits_D \Phi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv, \tag{26}
$$

naziva se *površinskim integralom prve vrste.*

Kako je, prema formuli (26), površinski integral prve vrste definisan višestrukim (dvostrukim) integralom, egzistencija i svojstva ovog integrala, neposredna su posledica, egzistencije i svojstava integrala na desnoj strani formule (26). Tako, na primer, ako je funkcija $\Phi(x, y, z) \equiv 1$ u svim tačkama (x, y, z) neprekidno diferencijabilne glatke površi S, prema (26) imamo

$$\iint_S dS = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv = \mu S.$$

Radi uvodjenja površinskog integrala druge vrste potreban je pojam strane površi koji je analogan pojmu orijentacije krive.

Neka je S glatka površ i M_0 njena unutrašnja tačka (tj. tačka površi koja ne leži na njenoj granici). Označimo sa $\vec{\nu}$ jedinični vektor normale površi S u tački M_0 i smatrajmo da je normala orjentisana u smeru vektora $\vec{\nu}$. Pretpostavimo da zatvorena kriva γ prolazi kroz tačku M_0, leži na površi S i nema zajedničkih tačaka sa njenom granicom. Pretpostavimo, zatim, da vektor $\vec{\nu}$ stalno "pomeramo" iz tačke M_0 duž krive γ tako da je vektor $\vec{\nu}$ stalno normalam na S i da se njegov pravac pri tom kretanju menja neprekidno. Kako je vektor $\vec{\nu}$ stalno normalan na površi S, to postoje sledeće dve mogućnosti.

Ako obilazak po ma kojoj zatvorenoj konturi γ, koja leži na površi S i nema zajedničkih tačaka sa njenom granicom, ne menja smer normale na površi S onda se (glatka) površ S naziva *dvostranom* površi.

Slika 7

Ukoliko, medjutim, na površi S postoji zatvorena kontura, pri čijem obilaženju se pravac normale menja u suprotan, to se površ S naziva *jednostranom.*

Kod dvostranih površi, očigedno, izborom orijentacije normale, izabrana je odredjena (odgovarajuća) strana površi.

Primeri dvostranih površi su ravan, gde se (osim kada je paralelna sa z-osom) može govoriti o gornjoj i donjoj strani, i sfera, gde se može govoriti o spoljnoj i unutrašnjoj strani. Dvostrana je, i svaka glatka površ sa (eksplicitnom) jednačinom $z = f(x, y)$, gde se može govoriti o *gornjoj* strani površi, odredjenoj normalnim vektorom $\vec{n}_1$ koji zaklapa oštar ugao sa z-osom, i *donjoj* strani površi, odredjenoj vektorom $\vec{n}_2$ koji zaklapa tup ugao sa z-osom.

Površ S na kojoj je izabran jedinični vektor $\vec{\nu}$ označavaćemo sa S^{+}, a tu istu površ na kojoj je izabran jedinični vektor $-\vec{\nu}$ označavaćemo sa S^{-}.

Najprostiji primer jednostrane površi je tzv, *Mebiusov list.* On se može dobiti od pravougaone trake ABCD papira. Spajanjem duži $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$, ali tako da se tačka A spoji sa tačkom C, a tačka B sa tačkom D. Kod Mebiusovog lista, idući, na primer, po srednjoj liniji, smer normale menja se u suprotnom pri povratku u bilo koju tačku (slika 8).

Slika 8

Kod dvostranih površi, može se govoriti o orijentaciji granice *usaglašenoj* sa izabranom stranom površi. Naime, pri izbornoj strani površi (odnosno vektora njene normale), *pozitivnim* se smatra onaj smer obila v zenja granice Γ površi S pri kome izabrana strana površi S ostaje "levo" od krive Γ. Suprotan smer se smatra *negativnim* (u odnosu na izabranu stranu površi).

Pre nego što damo definiciju površinskog integrala druge vrste, podsetimo se formula za vektor $\vec{n}$ normale i jedinični vektor $\vec{\nu}$ na površi S koja je zadata jednakošću

$$\begin{aligned} S &= \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \overline{D}\}, \\ &= \{x = x(u,u),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v) : (u,v) \in \overline{D}\} \end{aligned}$$

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k},$$

odnosno

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|},$$

gde su $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ jedinični koordinatni vektori. Ako sa α, β, γ označimo uglove koje vektor $\vec{\nu}$ zaklapa sa pozitivnim smerovima koordinatnih osa, prema ranije izloženom je :

$$\vec{\nu} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k},$$

gde je

$$\alpha = \alpha(u,v), \beta = \beta(u,v), \gamma = \gamma(u,v), (u,v) \in \overline{D},$$

odnosno

$$\cos\alpha(u,v) = \frac{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{EG-F^2}},$$
$$\cos\beta(u,v) = \frac{\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{EG-F^2}},$$
$$\cos\gamma(u,v) = \frac{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Neka su u svim tačkama neprekidno diferencijabilne, komplanabilne površi

$$\begin{aligned} S &= \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \overline{D}\}, \\ &= \{x = x(u,u),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v) : (u,v) \in \overline{D}\}, \end{aligned}$$

definisane funkcije $\Phi(x,y,z), P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$.

3.2.2. Definicija. Integrali

$$\iint\limits_{S^+} \Phi(x,y,z)dxdy, \quad \iint\limits_{S^-} \Phi(x,y,z)dxdy,$$
$$\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dydz,$$

definisani formulama

$$\iint\limits_{S^+} \Phi(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{S} \Phi(x,y,z)\cos\gamma dS$$
$$\iint\limits_{S^-} \Phi(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{S} \Phi(x,y,z)\cos(\pi-\gamma) dS$$
$$\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint\limits_{S} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]dS$$

nazivaju se *površinskim integralima druge vrste po površi S.*

Prema ovoj definiciji neposredno sledi da površinski integral druge vrste menja znak ako površ S promeni orjentaciju.

Razume se da površinski integral druge vrste egzistira u slučaju kada je funkcija Φ neprekidna na površi S.

Integral

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =\\&= \iint\limits_{S} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]dS,\end{aligned}$$

je površinski integral prve vrste od skalarnog proizvoda vektorskih funkcija

$$P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

i

$$\vec{\nu} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}.$$

Sledeće formule odnose se na izračunavanje površinskog integrala druge vrste u zavisnosti od načina na koji je površ S zadata.

Neka je glatka površ S zadata na stlandardni način

$$\begin{aligned}S &= \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \overline{D}\},\\&= \{x = x(u,u),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v) : (u,v) \in \overline{D}\},\end{aligned}$$

Pošto je $dS = \sqrt{EG - F^2}dudv$, to je

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{S^+} \Phi(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{S} \Phi(x,y,z)\cos\gamma dS\\&= \iint\limits_{D} \Phi[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]\cos\gamma\sqrt{EG - F^2}dudv\\&= \iint\limits_{D} \Phi[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv.\end{aligned}$$

Dakle, možemo skraćeno zapisati

$$\iint\limits_{S^+} \Phi dxdy = \iint\limits_{D} \Phi\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv,$$

odnosno

$$\iint\limits_{S^-} \Phi dxdy = -\iint\limits_{D} \Phi \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv.$$

Ako je površ S zadata eksplicitno neprekidno diferencijabilnom funkcijom $z = f(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}$, imamo sledeće formule :

$$\iint\limits_{S} \Phi(x,y,z)dS = \iint\limits_{D} \Phi(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy,$$

$$\iint\limits_{S^+} \Phi(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{D} \Phi(x,y,f(x,y))dxdy,$$

$$\iint\limits_{S^-} \Phi(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_{D} \Phi(x,y,f(x,y))dxdy.$$

Napomena. Površinski intrgrali prve i druge vrste, mogu se definisati i preko integralnih suma analogno krivolinijskim integralima prve i druge vrste.

3.2.3. Definicija. Neka je $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=k}$ deo po deo glatka površ i $\Phi(x,y,z)$ funkcija definisana u svim tačkama površi S. Tada je

$$\iint\limits_{S} \Phi dS = \sum_{i=1}^{i=k} \iint\limits_{S_i} \Phi dS_i.$$

3.2.4. Definicija. Neka je $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=k}$ orjentisana deo po deo glatka površ, S^+ jedna njena strana i $\Phi(x,y,z)$ funkcija definisana u svim tačkama površi S. Tada je

$$\iint\limits_{S^+} \Phi dxdy = \sum_{i=1}^{i=k} \iint\limits_{S_i^+} \Phi dxdy,$$

$$\iint\limits_{S^+} \Phi dydz = \sum_{i=1}^{i=k} \iint\limits_{S_i^+} \Phi dydz,$$

$$\iint\limits_{S^+} \Phi dzdx = \sum_{i=1}^{i=k} \iint\limits_{S_i^+} \Phi dzdx.$$

Sledeća teorema daje vezu izmedju površinskog integrala druge vrste i trostrukog (trojnog) integrala, a poznata je kao teorema *Gaus - Ostrogradskog.* Inače ova teorema, kao što će se docnije videti, može se formulisati u terminima teorije polja kao što su *protok i divergencija.*

3.2.5. Teorema. *Neka su funkcije $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ u zatvorenoj oblasti $\overline{V}$ koja ima za granicu (rub) orijentisanu deo po deo glatku površ S. Tada je*

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydx,$$
$$\Longleftrightarrow \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS \tag{27}$$
$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydx,$$

gde su α, β, γ uglovi spoljne normale sa koordinatnim osama, a površinski integral se izračunava po spoljnoj strani površi S.

Dokaz. Bez umanjenja opštosti dokaza možemo pretpostaviti da je V "cilindar" ograničen površinom $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ gde je

$$S_1 = \{(x,y,z) : z = z_1(x,y); (x,y) \in \overline{D}\},$$

$$S_2 = \{(x,y,z) : z = z_2(x,y) > z_1(x,y); (x,y) \in \overline{D}\},$$

S_3 je "omotač" od svih pravih paralelnih sa z osom koje prolaze kroz rub ∂D oblasti D.

Ovde treba istaći da su funkcije z_1 i z_2 neprekidno diferencijabilne na kvadrabilnoj oblasti $\overline{D}$.

Prema poznatoj formuli za izračunavanje trojnog integrala imamo

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz,$$

tj.

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_D [R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y))]dxdy,$$

pa je

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_D R(x,y,z_2(x,y))dxdy - \iint\limits_D R(x,y,z_1(x,y))dxdy.$$

Prema uvedenoj orjentaciji površi S imamo da je

$$\iint\limits_D R(x,y,z_2(x,y))dxdy = \iint\limits_{S_2} R(x,y,z)dxdy$$

$$\iint\limits_D R(x,y,z_1(x,y))dxdy = -\iint\limits_{S_1} R(x,y,z)dxdy.$$

Kako je

$$\iint\limits_{S_3} R(x,y,z)dxdy = 0,$$

dobijamo

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz &= \iint\limits_{S_1} Rdxdy + \iint\limits_{S_2} Rdxdy + \iint\limits_{S_3} Rdxdy \\ &= \iint\limits_S Rdxdy.\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy.$$

Analognim postupkom nalazimo

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_S P(x,y,z)dydz,$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx.$$

Sabiranjem poslednje tri jednakosti dobijabo

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydx. \blacksquare$$

Ukoliko oblast V iz E^3 nije "cilindar" u prethodnom smislu, saglasno definiciji oblasti, potrebno je takvu oblast dekomponirati na konačno mnogo opisanih cilindara pa na svaki od njih primeniti izloženo rezonovanje.

4. ELEMENTI TEORIJE POLJA I KLASIFIKACIJA

4.1. Skalarno i vektorsko polje

Uobičajeno je u fizičkim i tehničkim nakama da se prostor u kome se oseća dejstvo neke veličine naziva poljem. Ako je ta veličina skalar, to je *skalarno polje*; ako je vektor - to je *vektorsko polje.* U tom smislu dajemo nekoliko primera.

Polje temperatura nekog tela T, polje osvetljenosti nekog dela prostora G i polje gustine mase nekog tela su primeri skalarnog polja.

Vektorska polja su, na primer, *polje brzina* stacionarnog (tj. nezavisnog od vremena) toka tečnosti; *polje teže* (ili *gravitaciono polje*), *elektrostatičko polje* itd. Polje teže i elektrostatičko polje su primeri tzv. *polja sile,* isto kao i *magnetno polje.*

Navedeni primeri jasno ukazuju da se u prvom slučaju radi o skalarnim funkcijama tri promenljive definisnim na nekom delu trodimenzionlnog euklidskog prostora E^3, a u drugom, o vektorskim funkcijama takodje definisanim na nekom delu euklidskog trodimemzionalnog prostora E^3. Ako prihvatimo da pod pojmom prostor u vizuelnom smislu podrazumevamo euklidski trodimenzionalni prostor E^3 onda se ova dva pojma mogu definisati na sledeći egzaktan način.

4.1.1. Definicija. Neka je svakoj tački (x, y, z) iz oblasti $G \subset E^3$ pridružen po jedan

(a) realan broj $u(x, y, z)$,

(b) vektor $\vec{a} = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$.

Tada se kaže da je u ublasti G definisano

(a) *skalrno polje* $u = u(x, y, z), \quad (x, y, z) \in G \subset E^3$,

(b) *vektorsko polje*

$$\vec{a} = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k},\ (x, y, z) \in G \subset E^3.$$

Napomena. Budući da je vektor položaja tačke $(x, y, z) \in E^3$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

za funkciju $u = u(x, y, z)$ upotrebljava se i oznaka

$$u = u(\vec{r}).$$

Praktični razlozi dovode do potrebe da se posmatraju i tzv. *ravna* skalarna polja, tj. polja kod kojih je oblast G deo neke ravni.

Primer ravnog polja je osvetljenosti nekog dela ravni, stvoreno nekim svetlosnim izvorom.

Iz praktičnih razloga, smatraćemo da su funkcije

$$u(x,y,z),\ a_x(x,y,z),\ a_y(x,y,z),\ a_z(x,y,z),$$

iz 4.1.1 Definicije, neprekidne zajedno sa svim svojim parcijalnim izvodima prvog reda.

Radi sticanja što preglednije slike o polju $u = u(x,y,z); (x,y,z) \in G$, mogu se koristiti tzv. *nivo-površi* ili *ekviskalarne površi* polja. Inače, *nivo površ* polja je skup tačaka S u oblasti G u kojima polje $u(x,y,z)$ ima datu fiksiranu vrednost C.

Po definiciji, jednačine nivo-površi su $u(x,y,z) = C$, gde C prolazi skup realnih brojeva. Kroz tačku $M_1(x_1,y_1,z_1)$ oblasti G prolazi jedna i samo jedna nivo površ, i to ona čija je jednačina $u(x,y,z) = u(x_1,y_1,z_1)$. Odatle sledi da nivo-površi $S_1 : u(x,y,z) = C_1$ i $S_2 : u(x,y,z) = C_2$ nemaju zajedničkih tačaka za $C_1 \neq C_2$, kao i da je unija svih nivo-površi jednaka oblasti G u kojoj je polje $u(x,y,z)$ definisano.

Ispitivanje skalarnog polja analitičkim postupkom može, kao i kod funkcija uopšte, započeti izučavanjem njegovih lokalnih svojstava, tj. ispitivanjem promena polja $u = u(M), M \in G$, pri pomeranju iz neke fiksne tačke M_0 prema njoj bliske tačke M.

4.1.2. Definicija. Neka je M_0 fiksirana tčka u oblasti G u kojoj je definisano skalarno polje $u = u(M) : M \in G$, i M tačka u oblasti G takva da vektor $\overrightarrow{M_0M}$ ima isti pravac i smer kao neki fiksirani vektor $\vec{a}$. Ako sa $s(\overline{M_0M}) = h$, označimo dužinu duži $\overline{M_0M}$, imamo $M \to M_0 \Leftrightarrow h \to 0$. Konačna granična vrednodt

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{h} = \lim_{M\to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{s(\overline{M_0M})},$$

(ukoliko ona egzistira) naziva se *izvodom skalarnog polja $u = u(M)$ u tački M_0 u pravcu a*, i označava se sa $\frac{\partial u}{\partial a}$.

4.1.3. Teorema. *Ako vektor $\vec{a}$ obrazuje sa koordinatnim osama uglove α, β, γ, onda se izvod $\dfrac{\partial u}{\partial a}$, tj. izvod polja $u(x,y,z)$ u pravcu a, izračunava po formuli*

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

gde su $\dfrac{\partial u}{\partial a}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ *izvod u pravcu, odnosno izvodi funkcije* $u(x, y, z)$ *u tački* $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Dokaz. Kako je $\vec{a}_0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$, jedinični vektor vektora $\vec{a}$, to je

$$\overrightarrow{M_0M} = h\vec{a}_0 = h\cos\alpha\vec{i} + h\cos\beta\vec{j} + h\cos\gamma\vec{k},$$

pa tačka M ima koordinate

$$x_0 + h\cos\alpha,\ y_0 + h\cos\beta,\ z_0 + h\cos\gamma.$$

Otuda je

$$\begin{aligned} &u(M) - u(M_0) = \\ &= u(x_0 + h\cos\alpha, y_0 + h\cos\beta, z_0 + h\cos\gamma) - u(x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

i, na osnovu toga (jer funkcija $u(x, y, z)$ je diferencijabilna),

$$u(M) - u(M_0) = h\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + h\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + h\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + h\cdot\epsilon(h),$$

gde $\epsilon(h) \to 0$, kad $h \to 0$. N ataj način, imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial a} &= \lim_{h\to 0}\frac{u(M) - u(M_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \epsilon(h)\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \blacksquare \end{aligned}$$

4.1.4. Definicija. Vektor

$$\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

čije su projekcije na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema jednake parcijalnim izvodima funkcije $u(x, y, z)$ u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$, naziva se *gradijentom* skalarnog polja $u = u(x, y, z)$ u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$, i označava se sa *grad* $u(M_0)$.

Slika 9

Na taj način, imamo (slika 9)

$$grad\ u(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

kao i

$$\frac{\partial u}{\partial a} = grad\ u \cdot \vec{a}_0.$$

Uvodjenjem simbola nabla, $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ možemo napisati :

$$grad\ u = \nabla u,$$

gde na desnoj strani ove jednakosti stoji "proizvod" simboličkog vektora nabla i skalarne funkcije u.

Upotrebom gradijenta, jedinični vektor normale $\vec{\nu}$ na ekviskalarnoj površi (nivo-površi) S, skalarnog polja $u = u(x, y, z) : (x, y, z) \in G \subset E^3$, može se izračunati po sledećoj formuli

$$\vec{\nu} = \frac{grad\ u}{|grad\ u|}.$$

U cilju analize vektorskih polja definišu se specijalni geometrijski oblici koji omogućavaju ovu analizu, a u isti mah nalaze primenu u prirodnim naukama. Ti geometriski oblici su : *vektorske linije i solenoid* (*vektorska cev*).

4.1.5. Definicija. Kriva $\mathcal{L}$ u oblasti G naziva se *vektorskom linijom* polja $\vec{a} = \vec{a}(M), M \in G$, ako u svakoj tački M krive $\mathcal{L}$ vektor $\vec{a}(M)$ ima pravac tangente t na krivu $\mathcal{L}$ u tački M.

U slučaju kada je, na primer, reč o polju brzina stacionarnog toka tečnosti, vektorske linije su u stvari, putanje čestica tečnosti.

Iz predhodne defincije sleduje da je u proizvoljnoj tački M vektorske linije vektor $\vec{a}(\vec{r})$ kolinearan sa diferencijalom $d\vec{r}$ vektora položaja $\vec{r}$ tačke M. Uslov ove kolinearnosti je

$$d\vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} \Longrightarrow d\vec{r} = \vec{a}dt. \tag{28}$$

Kako je

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= (dx, dy, dz), \\ \vec{a}(\vec{r}) &= (a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, u, z)), \end{aligned}$$

vektorskoj jednačini (28) odgovara sistem diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{a_x(x,y,z)} = \frac{dy}{a_y(x,y,z)} = \frac{dz}{a_z(x,y,z)}, \tag{29}$$

koji se može napisati u obliku

$$\frac{dx}{dt} = a_x(x,y,z), \ \frac{dy}{dt} = a_y(x,y,z), \ \frac{dz}{dt} = a_z(x,y,z).$$

Integracija ovoga sistema diferencijalnih jednačina omogućuje konstrukciju skupa integralnih krivih vektorskog polja. Ovaj skup je skup vetorskih linija, uz uslov da su ispunjeni uslovi za egzistenciju i jedinstvenost rešenja sistema (29).

4.1.6. Definicija. Pod *vektorskom cevi* polja $\vec{a} = \vec{a}(M), M \in G$, podrazumeva se deo F oblasti G ograničen sa površi S takvom da je normala na površ S u svakoj njenoj tački M normalna na odgovarajući vektor polja $\vec{a}(M)$ (slika 10).

Slika 10

Prema ovoj definiciji vektorske cevi F polja $\vec{a}$ proizilazi da njegove vektorske linije ne mogu seći površ S kojom je ta cev ograničena, kao i da je sama površ S sastavljena od vektorskih linija. Drugim rečima, svaka vektorska linija polja $\vec{a}$ ili je cela u cevi F ili je cela izvan nje, tako da se vektorska cev F može tretirati kao deo oblasti G sastavljen iz celih vektorskih linija.

Inače, u slučaju, na primer, polja brzina toka tečnosti, vektorska cev je deo prostora koji u svom kretanju predje neki uočeni deo tečnosti.

Integracijom sistema diferencijalnih jednačina (29) jednačine skupa vektorskih linija glase

$$\psi_1(x,y,z) = C_1, \quad \psi_2(x,y,z) = C_2.$$

Jednačina vektorske cevi može se dobiti izborom proizvoljnog podskupa koji pripada skupu vektorskih linija, tj. postavljanjem proizvoljne relacije izmedju integracionih konstanti C_1 i C_2 u obliku

$$\Phi(C_1, C_2) = 0 \Leftrightarrow \Phi(\psi_1(x,y,z), \psi_2(x,y,z)) = 0.$$

Ova relacija je opšte rešenje linearne homogene parcijalne jednačine

$$a_x(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + a_y(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + a_z(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

a nadjene jednačine vektorskih linija su jednačine njenih karakteristika.

Sa svakim skalarnim poljem $u = u(M); M \in G$, istovremeno je zadato i jedno vektorsko polje, i to polje koje svakoj tački $M \in G$ korespondira vektor $\vec{a} = grad\ u$. Vektorsko polje $\vec{a}$ sa svojstvom da je gradijent nekog skalarnog polja u, inače ima i poseban naziv, kap što se vidi iz sledeće definicije.

4.1.7. Definicija. Vektorsko polje $\vec{a} = \vec{a}(M); M \in G$, je *potencijalno* ako egzistira skalarno polje $u = u(M); M \in G$, takvo da za svaku tačku $M \in G$ važi $\vec{a}(M) = grad\ u(M)$. Pri tome skalarno polje u naziva se *potencijalom* vektorskog polja $\vec{a}$.

Ako je polje $\vec{a}$ potencijalno, onda je njegov potencijal u oderedjen jednoznačno do na jednu konstantu. Preciznije, ako su u i v potencijali jednog istog vektorskog polja $\vec{a}$, onda postoji konstanta C takva da za svaku tačku $M \in G$ važi $v - u = C$, odnosno $v = u + C$.

Zaista, ako je $\vec{a} = grad\ u = grad\ v$ onda je $grad\ (u - v) = \vec{0}$. Na osnovu toga je $\frac{\partial(u-v)}{\partial a} = 0$ za svaki pravac a, a iz toga je $u - v = C$, gde je C konstanta.

4.1.8. Definicija. Neka je polje $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ diferencijabilno u nekoj tački (x, y, z) iz oblasti G. Broj

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

naziva se *divergencijom* vektorskog polja $\vec{a}$ u tački (x, y, z) i označava se sa

$$div\ \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Simbolički $div\vec{a}$ može biti zapisana kao skalarni proizvod simbola ∇ i vektora $\vec{a}$:

$$div\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}.$$

4.1.9. Definicija. Vektor sa koordinatama

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z},\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x},\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

naziva se *rotorom* vektorskog polja $\vec{a} = \vec{a}(M); M \in G$ i označava se sa

$$rot\ \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Primenom simbola ∇ rotor označa vamo kao sledeći vektorski proizvod

$$rot\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Popis osnovnih pojmova u vektorskom polju kompletira se pojmovima cirkulacije i protoka koje dajemo u nastavku.

4.2. Cirkulacija i protok (fluks). Formula Stoksa

4. ELEMENTI TEORIJE POLJA I KLASIFIKACIJA

4.2.1. Definicija. Neka je γ zatvorena deo-po-deo glatka kriva u oblasti G vektorskog polja $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z); (x, y, z) \in G$. Intrgral

$$\oint_\gamma a_x dx + a_y dy + a_z dz,$$

naziva se *cirkulacijom* vektorskog plja $\vec{a}$ po krivoj γ i označava se sa

$$\mathcal{C} = \oint_\gamma \vec{a} \cdot d\vec{r}, \quad d\vec{r} = (dx, dy, dz).$$

Napomena. Neka je γ orjentisana glatka kriva, $\vec{t} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, s promenljiva dužina luka, a $Pr_{\vec{t}}\vec{a}$ algebarska vrednost projekcije vektora $\vec{a}$ na tangentu. Tada je

$$\oint_\gamma \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_\gamma Pr_{\vec{t}}\vec{a} ds.$$

Zaista,

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \vec{a} \cdot d\vec{r} &= \oint_\gamma a_x dx + a_y dy + a_z dz \\ &= \oint_\gamma (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma) ds \\ &= \oint_\gamma \vec{a} \cdot \vec{t} ds = \oint_\gamma Pr_{\vec{t}} ds. \end{aligned}$$

4.2.2. Definicija. Neka je S orjentisana deo-po-deo glatka površ, sadržana u oblasti G vektorskog polja $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z); (x, y, z) \in G$, a ν -jedinični vektor normale, kojim je izabrana strana S^+ površi S. Integral

$$\iint\limits_{S^+} \vec{a} \cdot \vec{\nu} dS$$

naziva se *protokom* vektorskog polja $\vec{a}$ kroz površ S i označava sa

$$\Phi = \iint\limits_{S} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dS}, \quad \overrightarrow{dS} = \vec{\nu} dS.$$

Polazeći od relacije $\vec{a} \cdot \vec{\nu} = Pr_{\vec{\nu}} \vec{a}$, integral kojim se definiše protok može se zapisati u obliku

$$\iint\limits_{S} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint\limits_{S} Pr_{\vec{\nu}} \vec{a} dS.$$

4.2.3. Primer. Izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{a} = y^2 \vec{i} - x^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ duž deo-po-deo glatke krive γ orjentisane u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na časovniku, a koja je nastala presecanjem paraboloida $x^2 + z^2 = 1 - y$ sa koordinatnim ravnima u prvom oktantu.

Rešenje. Označimo sa B, C, D preseke posmatranog paraboloida sa nenegativnim delovima koordinatnih osa. Tada je

$$\gamma = \overset{\frown}{BC} \cup \overset{\frown}{CD} \cup \overset{\frown}{DB},$$

gde je

$$\begin{aligned}
\overset{\frown}{BC} &= \{(x, y) : x^2 = 1 - y, 0 \leq x \leq 1\}; \\
\overset{\frown}{CD} &= \{(y, z) : 1 - y = z^2, 0 \leq z \leq 1\}; \\
\overset{\frown}{DB} &= \{(x, z) : x^2 + z^2 = 1, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Prema definiciji cirkulacije i aditivnom svojstvu, po putanji, krivoliniskog integrala, imamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \oint\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot \vec{t} ds \\
&= \int\limits_{\overset{\frown}{BC}} \vec{a} \cdot \vec{t} ds + \int\limits_{\overset{\frown}{CD}} \vec{a} \cdot \vec{t} ds + \int\limits_{\overset{\frown}{DB}} \vec{a} \cdot \vec{t} ds,
\end{aligned}$$

gde je $\vec{t}$ jedinični vektor tangente respektivno na lukovima $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DB}$. Kako je na luku $\widehat{BC} = \{(x,y) : x^2 = 1-y, 0 \le x \le 1\}$, $z=0$ to za jedinični vektor tangente imamo

$$\vec{t} = \frac{-\vec{i} + 2x\vec{j}}{\sqrt{1+4x^2}} \wedge ds = \sqrt{1+4x^2}dx,$$

pa je

$$\begin{aligned}\int\limits_{\widehat{BC}} \vec{a}\cdot\vec{t}ds &= \int\limits_0^1 [(1-x^2)^2\vec{i} - x^2\vec{j}]\cdot\frac{-\vec{i}+2x\vec{j}}{\sqrt{1+4x^2}}\sqrt{1+4x^2}dx \\ &= \int\limits_0^1 (-x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1)dx \\ &= -\frac{31}{30}.\end{aligned}$$

Analognim postupkom dobijamo da je

$$\int\limits_{\widehat{CD}} \vec{a}\cdot\vec{t}ds = \frac{1}{3}, \quad \int\limits_{\widehat{DB}} \vec{a}\cdot\vec{t}ds = -\frac{1}{3},$$

pa je

$$\mathcal{C} = \oint\limits_{\gamma} \vec{a}\cdot d\vec{r} = -\frac{31}{30} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{31}{30}.\blacklozenge$$

4.2.4. Primer. Izračunati protok vektorskog polja

$$\vec{a} = (x-2z)\vec{i} + (3z-4x)\vec{j} + (5x+y)\vec{k}$$

kroz spoljnu stranu cele površi piramide sa temenima

$$M(1,0,0),\ N(0,1,0),\ P(0,0,1),\ O(0,0,0).$$

Rešenje. Označimo sa S površ posmatranog tetraedra. Tada je

$$S = S(\triangle MNP) \cup S(\triangle NOP) \cup S(\triangle POM) \cup S(\triangle MON),$$

pri čemu površi posmatranih trouglova nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka. Primenom aditivnog svojstva površinskog integrala, u odnosu na oblast integracije, traženi protok (fluks) iznosi

$$\Phi = \iint\limits_{S^+} \vec{a}\cdot\vec{\nu}dS = \iint\limits_{S(\triangle MNP)} \vec{a}\cdot\vec{\nu}dS +$$
$$\iint\limits_{S(\triangle NOP)} \vec{a}\cdot\vec{\nu}dS + \iint\limits_{S(\triangle POM)} \vec{a}\cdot\vec{\nu}dS + \iint\limits_{S(\triangle MON)} \vec{a}\cdot\vec{\nu}dS,$$

gde je ν jedinični vektor normale respektivno na površima.

$$S(\triangle MNP),\quad S(\triangle NOP),\quad S(\triangle POM),\quad S(\triangle MON).$$

Za trougao MNP očigledno važi

$$x + y + z - 1 = 0,\quad 0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1 - x,$$

pa je

$$\vec{\nu} = \frac{grad\ u}{\pm|grad\ u|},$$

gde je $u = x + y + z - 1$. Pošto normala na $\triangle MNP$ zaklapa oštar ugao sa z- osom, i kako je $grad\ u = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, to je

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}} \wedge dS = \sqrt{3}dxdy.$$

Imajući u vidu da je projekcija trougla MNP na ravan xOy trougao MNO, dobijamo da je

$$\iint\limits_{S(\triangle MNP)} \vec{a}\cdot\vec{\nu}dS = \iint\limits_{S(\triangle MNP)} \frac{2x + y + z}{\sqrt{3}}dS$$
$$= \iint\limits_{S(\triangle MNO)} \frac{2x + y + 1 - x - y}{\sqrt{3}}\sqrt{3}dxdy$$
$$\iint\limits_{S(\triangle MNO)} (x+1)dxdy = \int\limits_0^1 (x+1)\left(\int\limits_0^{1-x} dy\right)dx = \int\limits_0^1 (1 - x^2)dx = \frac{2}{3}.$$

Kako je, dalje, na površi $S(\triangle NOP) : \vec{\nu} = -\vec{i}$, to imamo

$$\iint\limits_{S(\triangle NOP)} \vec{a}\cdot\vec{\nu}dS = \iint\limits_{S(\triangle NOP)} (2z-x)dS.$$

Imajući u vidu da je na površi $S(\triangle NOP) : \ x = 0, \ dS = dxdy, \ 0 \le y \le 1, \ 0 \le z \le 1-y$, kao i da je projekcija trougla NOP na ravan yOz sam taj trougao, dobijamo

$$\iint\limits_{S(\triangle NOP)} (2z-0)dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-y} 2zdz \right) dy = \frac{1}{3}.$$

Dakle,

$$\iint\limits_{S(\triangle NOP)} \vec{a}\cdot\vec{\nu}dS = \frac{1}{3}.$$

Na sličan način se dokazuje da je :

$$\iint\limits_{S(\triangle POM)} \vec{a}\cdot\vec{\nu}dS = \frac{1}{6},$$

odnosno,

$$\iint\limits_{S(\triangle MON)} \vec{a}\cdot\vec{\nu}dS = -1.$$

Otuda je

$$\Phi = \iint\limits_{S^+} \vec{a}\cdot\vec{\nu}dS = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 = \frac{1}{6}.\blacklozenge$$

Ovaj zadatak biće ponovo rešen primenom formule Gaus-Ostrogradskog koju ćemo najpre interpretirati primenom uvedenih pojmova iz teorije polja.

4.2.5. Teorema. *Neka je $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $(x,y,z) \in G$ vektorsko polje i $\overline{D}$ zatvorena oblast ograničena zatvorenom površi S sadržana u G. Ako egzistira integral*

$$\Phi = \iint\limits_S \vec{a}\cdot\overrightarrow{dS},$$

i ako je div $\vec{a}$ neprekidna funkcija na D, tada je

$$\Phi = \iint_S \vec{a} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_D div\ \vec{a} dD,$$

gde je $dD = dxdydz$ element zapremine $v(D)$.

Ova teorema je ranije dokazana skalarno, a sada dajemo njenu primenu na predhodnom primeru.

4.2.6. Primer. Izračunati protok vektorskog polja

$$\vec{a} = (x - 2z)\vec{i} + (3z - 4x)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$$

kroz spoljnu stranu cele površi piramide sa temenima

$$M(1,0,0),\ N(0,1,0),\ P(0,0,1),\ O(0,0,0).$$

Rešenje. Primenom formule Gaus-Ostrogradskog, imamo

$$\Phi = \iint_S \vec{a} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_D div\ \vec{a} dxdydz.$$

Kako je $div\ \vec{a} = \frac{\partial(x-2z)}{\partial x} + \frac{\partial(3z-4x)}{\partial y} + \frac{\partial(5x+y)}{\partial z} = 1$, to je

$$\Phi = \iiint_D 1 \cdot dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \frac{1}{6}. \blacklozenge$$

4.2.7. Primer. Izračunati fluks (protok) vektorskog polja

$$\vec{a} = xz\vec{i} + x^2y\vec{j} + y^2z\vec{k},$$

kroz spoljnu stranu zatvorene deo-po-deo glatke površi S sastavljenu od delova : paraboloida $z = x^2 + y^2$, cilindra $x^2 + y^2 = 1$, i ravni $z = 0$.

Rešenje. Primenom formule Gaus-Ostrogradskog, imamo

$$\Phi = \iint_S \vec{a} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_D div\ \vec{a} dxdydz.$$

Kako je $div\ \vec{a} = z + x^2 + y^2$, to je

$$\Phi = \iiint\limits_D (z + x^2 + y^2) dxdydz.$$

Posle uvodjenja smene

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = z,$$

dobijamo da je Jakobijan trnsformacije $J = \rho$, odnosno $x^2 + y^2 = \rho^2 = 1$, $z = x^2 + y^2 = \rho^2$, pa su granice za ρ, θ i z respektivno

$$0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le \rho^2.$$

Otuda je

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iiint\limits_D (z + x^2 + y^2) dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^{\rho^2} (z + \rho^2)\rho dz \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho d\rho \left(\frac{z^2}{2} + \rho^2 z \right) \Big|_0^{\rho^2} \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho \left(\frac{\rho^4}{2} + \rho^4 \right) d\rho \\
&= \frac{\pi}{2}. \blacklozenge
\end{aligned}$$

Sledeća teorema daje vezu izmedju cirkulacije vektorskog polja

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), (x, y, z) \in G \subset E^3,$$

duž zatvorene krive γ i protoka $rot\ \vec{a}$ kroz površ S koja je ograničena krivom γ, a poznata je kao Stoksova formula.

4.2.8. Teorema. *Neka je $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) : (x, y, z) \in G \subset E^3$ neprekidno diferencijabilno polje i S glatka površ sadržana u G ograničena sa deo-po-deo glatkom zatvirenom krivom γ. Tada je cirkulacija vektora $\vec{a}$ duž γ jednaka fluksu rotora vektora $\vec{a}$ kroz površ S, tj. važi jednakost*

$$\mathcal{C} = \oint\limits_\gamma \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_S rot\ \vec{a} \cdot d\vec{S}.$$

Dokaz ove teoreme izvodi se, u sklarnom obliku, analogno dokazu Grinove teoreme. Medjutim, dokaz ove teoreme može se izvesti i vektorski. Naša dalja pažnja biće usmerena na primene Stoksove formule.

4.2.9. Posledica. *Ako su S_1 i S_2 dve površi u oblasti G vektorskog polja $\vec{a}$ koje imaju za zajedničku granicu zatvorenu krivu γ, tada je prema Stoksovoj formuli*

$$\mathcal{C} = \oint_\gamma \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} rot\ \vec{a} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} rot\ \vec{a} \cdot d\vec{S}_2.$$

Ukoliko je zatvorena kriva γ zajednička granica za tri i više površi onda prethodna jednakost postaje trostruka odnosno višestruka.

4.2.10. Primer. Izračunati cirkulaciju vektorskog polja

$$\vec{a} = (2-x)y\vec{i} + yz\vec{j} + (2-x)z\vec{k},$$

duž krive γ nastale u preseku ravni $x+y+z=3$ i cilindrične površi

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 5$$

.

Rešenje. Prema 4.2.9. Posledici, imamo da je

$$\mathcal{C} = \oint_\gamma \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\ \vec{a} d\vec{S},$$

gde je S gornja stana površi dela ravni $x+y+z=3$ koja je sadržana unutar cilindrične površi $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$. Kako je

$$rot\ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2-x)y & yz & (2-x)z \end{vmatrix} = -y\vec{i} + z\vec{j} - (2-x)\vec{k},$$

odnosno

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{\nu},\ \vec{\nu} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}},\ dS = \sqrt{3} dxdy,$$

to je

$$\mathcal{C} = \oint_\gamma \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_D (-y + z - 2 + x) dxdy,$$

gde je D oblast u ravni xOy na koju se projektuje površ S. Posle smene $z = 3 - x - y$ imamo

$$\mathcal{C} = \oint_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_{D} (1 - 2y) dxdy.$$

Prelazom na polarne koordinate

$$x - 1 = \rho \cos\theta, \;\; y = \rho \sin\theta,$$

jer je D krug poluprečnika $r = \sqrt{10}$ sa centrom u tački $(1, 2)$, dobiće se da je

$$\mathcal{C} = \oint_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{\sqrt{10}} (1 + 4 - 2\rho \sin\theta)\rho d\rho = 50\pi. \blacklozenge$$

4.2.11. Primer. Izračunati cirkulaciju vektorskog polja

$$\vec{a} = y\vec{i} + (1 - x)\vec{j} + z\vec{k},$$

duž krive γ nastale u preseku sledećih površi : $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 2x$ za $z > 0$.

Rešenje. Ovde je

$$\mathcal{C} = \oint_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_{S} rot\ \vec{a} d\vec{S},$$

gde je S gornja stana površi dela sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ koja je sadržana unutar cilindra $x^2 + y^2 = 2x$ za $z > 0$. Ako se u jednačini sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ izvrši zamena $x^2 + y^2 = 2x$, dobiće se posledična jednačina $z^2 = 2x \iff z = \sqrt{2x}$. Upravna projekcija površi S na ravan xOy je oblast D koja je ograničena kružnicom $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Kako je

$$rot\ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & (1 - x) & z \end{vmatrix} = -2\vec{k},$$

odnosno $d\vec{S} = dS \cdot \vec{\nu}$, pri čemu su

$$\vec{\nu} = \frac{(2x - 4)\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{(2x - 4)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}, \quad dS = \frac{\sqrt{(2x - 4)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}{2z} dxdy,$$

to je

$$\mathcal{C} = \oint_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = -2 \iint_{D} dxdy.$$

Medjutim, $\iint_D dxdy$, je površina kruga poluprečnika $r = 1$, pa je

$$\mathcal{C} = \oint_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = -2\pi. \blacklozenge$$

4.3. Prostorno diferenciranje i klasifikacija vektorskih polja

U teoriji skalarnih i vektorskih funkcija definisanih u oblasti $G \subset E^3$ moguće je uopštiti pojam izvoda, kod koga u graničnom procesu učestvuju vrednosti funkcije u svim tačkama koje pripadaju okolini neke fiksirane tačke $M_0 \in G$.

Postupak koji dovodi do ovakve generalizacije pojma izvoda skalarne ili vektorske funkcije naziva se prostornim diferenciranjem, a rezultat do koga ovaj postupak dovodi naziva se prostornim izvodom (Jungovim izvodom).

Neka je $\varphi(M), M \in G \subset E^3$ skalarna ili vektorska funkcija na oblasti G i M_0 fiksirana tačka sadržana u podoblasti D koja je ograničena orijentisanom, zatvorenom, deo-po-deo glatkom površi S. Neka je dalje, $v(D) = V$ konačna zapremina oblasti D, a $d\vec{S}$ vektorski element površi S. Najzad neka egzistira $\iint_S \varphi(M)d\vec{S}$, pri čemu je $\varphi(M)d\vec{S}$ proizvod skalara i vektora, skalarni proizvod dva vektora, vektorski proizvod dva vektora, što zavisi od toga da li je $\varphi(M)$ skalarna ili vektorska funkcija.

Razume se, $\iint_S \varphi(M)d\vec{S}$, je skalarna ili vektorska funkcija od zapremine oblasti D. Šta više, funkciju od zapremine $V = v(D)$ predstavlja i količnik

$$\frac{\iint_S \varphi(M)d\vec{S}}{V}. \tag{30}$$

Ako se površ S "steže" oko tačke M_0 tako da se podoblast D sažima u M_0, iz čega sledi da $V = v(D)$ teži nuli, može se postaviti pitanje egzistencije i odredjivanja granične vrednosti ovog količnika u opisanom graničnom procesu. Ukoliko $diam\overline{D}$, ($\overline{D} = D \cup S$) teži nuli, onda su zadovoljena oba uslova sadržana u ovom graničnom procesu, gde je, kao što smo to ranije definisali, $diam\overline{D} = \sup\{d(x,y) : x, y \in \overline{D}\}$.

4.3.1. Definicija. Granična vrednost količnika (30) kada dijametar $\delta = diam\overline{D}$ teži nuli naziva se *prostornim izvodom* skalrne ili vektorske funkcije $\varphi(M), M \in G \subset E^3$ u tački $M_0 \in G$.

4.3.2. Teorema. *Neka je skalarno polje $u = u(M), M \in G \subset E^3$ odnosno vektorsko polje $\vec{a} = \vec{a}(M), M \in G \subset E^3$ neprekidno diferencijabilno u svim tačkama oblasti G i neka je $M_0 \in G$ fiksirana tačka u G. Tada je :*

$$\text{(a)} \qquad \lim_{\delta \to 0} \frac{\iint\limits_S u d\vec{S}}{V} = grad\ u(M_0),$$

$$\text{(b)} \qquad \lim_{\delta \to 0} \frac{\iint\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S}}{V} = div\ \vec{a}(M_0),$$

$$\text{(c)} \qquad \lim_{\delta \to 0} \frac{\iint\limits_S d\vec{S} \times \vec{a}}{V} = rot\ \vec{a}(M_0),$$

gde je S orijentisana, zatvorena, deo-po-deo glatka površ sadržana u G koja je rub za podoblast D, pri čemu D sadrži tačku M_0, a $\delta = dam\overline{D}$ je dijametar zatvorene podoblasti $\overline{D}$.

Dokaz. Skalarno polje $u = u(M), M \in G \subset E^3$ odnosno vektorsko polje $\vec{a} = \vec{a}(M), M \in G \subset E^3$ je neprekidno zajedno sa svim svojim parcijalnim izvodima prvog reda, S je zatvorena, orjentisana, deo-po-deo glatka površ. Prema tome, kako smo predhodno definisali, neprekidne su i funkcije $grad\ u, div\ \vec{a}, rot\ \vec{a}$. Šta više, kada $\delta = diam\overline{D}$ teži nuli, važe sledeće jednakosti :

$$\lim_{\delta \to 0} grad\ u(M) = grad\ u(M_0),\ \lim_{\delta \to 0} div\ \vec{a}(M) = div\ \vec{a}(M_0),$$
$$\lim_{\delta \to 0} rot\ \vec{a}(M) = rot\ \vec{a}(M_0),$$

gde je M proizvoljna tačka iz Drazličita od M_0.

Razume se, da se na $\iint\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$ može primeniti formula Gaus-Ostrogradskog, pa je

$$\iint\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_D div\ \vec{a} dV, \tag{31}$$

gde je $dV = dxdydz$. Pošto je funkcija $div\ \vec{a}$ neprekidna na $\overline{D}$, na integral sa desne strane jednakosti (31) može se primeniti formula o srednjoj vrednosti, pa je

$$\iiint\limits_D div\ \vec{a} dV = V \cdot div\ \vec{a}(\xi, \eta, \zeta),$$

gde je $(\xi, \eta, \zeta) \in D$. Otuda je

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\iint\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S}}{V} = \lim_{\delta \to 0} div\ \vec{a}(\xi, \eta, \zeta) = div\ \vec{a}(M_0).$$

Dokaz za (a) i (c) takodje se izvodi primenom formule Gaus-Ostrogradskog. Naime iz

$$\iint\limits_S (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydx,$$

(videti formulu (27)) neposredno sledi da je

$$\begin{aligned} &\iint\limits_S P \cos\alpha dS = \iiint\limits_D \frac{\partial P}{\partial x} dV, \ \iint\limits_S Q \cos\beta dS = \iiint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial y} dV, \\ &\iint\limits_S R \cos\gamma dS = \iiint\limits_D \frac{\partial R}{\partial z} dV. \end{aligned} \tag{32}$$

Ako je $P = Q = R = u(x, y, z)$ onda ove formule imaju ekvivalentni oblik

$$\begin{aligned} &\iint\limits_S u \cos\alpha dS = \iiint\limits_D \frac{\partial u}{\partial x} dV, \ \iint\limits_S u \cos\beta dS = \iiint\limits_D \frac{\partial u}{\partial y} dV, \\ &\iint\limits_S u \cos\gamma dS = \iiint\limits_D \frac{\partial u}{\partial z} dV. \end{aligned} \tag{33}$$

Respektivnim množenjem sa $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ prve, druge i treće jednakosti u (33) i sabiranjem levih odnosno desnih strana, ovako dobijenih jednakosti, imamo

$$\iint\limits_S u \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_D grad\ u dV.$$

Primenom formule o srednjoj vrednosti na $\iiint\limits_D grad\ udV$ dobićemo da je

$$\iiint\limits_D grad\ udV = \iiint\limits_D grad\ u(\xi,\eta,\zeta)dV,$$

gde je $(\xi,\eta,\zeta)\in D$. Otuda je

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\iint\limits_S ud\vec{S}}{V} = \lim_{\delta\to 0} grad\ u(\xi,\eta,\zeta) = grad\ u(M_0),$$

čime je dokazano svojstvo (a).

U dokazivanju svojstva (c) podjimo od sledeće jednakosti

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_S d\vec{S}\times\vec{a} = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{j} \\ \cos\alpha dS & \cos\beta dS & \cos\gamma dS \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}\iint\limits_S (a_z\cos\beta - a_y\cos\gamma)dS + \vec{j}\iint\limits_S (a_x\cos\gamma - a_z\cos\alpha)dS \\
&+ \vec{k}\iint\limits_S (a_y\cos\alpha - a_x\cos\beta)dS.
\end{aligned}$$

Ako se na svaki od integrala koje množe respektivno vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, primene formule (32) dobiće se da je

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_S d\vec{S}\times\vec{a} = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{j} \\ \cos\alpha dS & \cos\beta dS & \cos\gamma dS \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \\
&= \iiint\limits_D \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right] dV \\
&= \iiint\limits_D rot\ \vec{a}dV.
\end{aligned}$$

Primenom formule o srednjoj vrednosti na $\iiint\limits_D rot\ \vec{a}dV$ dobiće se da je

$$\iiint\limits_D rot\ \vec{a}dV = V\cdot rot\ \vec{a}(\xi,\eta,\zeta),$$

gde je $(\xi, \eta, \zeta) \in D$. Na osnovu svega imamo da je

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\iint\limits_{S} d\vec{S} \times \vec{a}}{V} = \lim_{\delta \to 0} rot\ \vec{a}(\xi, \eta, \zeta) = rot\ \vec{a}(M_0). \blacksquare$$

Napomene. Analizom dokaza predhodne teoreme može se primetiti :

1^0 Svojstva (a), (b), (c) ne zavise od oblika površi S niti od izbora koordinatnog sistema, tj. funkcije *grad* u, *div* $\vec{a}$, *rot* $\vec{a}$ invarijantne su u odnosu na oblik površi S i na izbor koordinatnog sistema u prostou.

2^0 Iz 1^0 sledi da se rezultat pod (a) može dobiti direktno po definiciji izvoda uzimanjem za oblast D cilindar ili kvadar sa centrom u tački M_0 kome je osa simetrije istog pravca kao i *grad* $u(M_0)$. Iz svojstva (a) slede preostala dva svojstva (b) i (c).

3^0 Formula Gaus-Ostrogradskog dokazuje se vektorski primenom svojstva (b), a Stoksova formula primenom svojstva (c).

4.3.3. Definicija. Neka je $\vec{a} = \vec{a}(M), M \in G \subset E^3$ vektorsko polje definisano na oblasti G.

1^0 Tačke iz G u kojima je *div* $\vec{a} > 0$ nazivaju se *izvorima* polja $\vec{a}$.

2^0 Tačke iz G u kojima je *div* $\vec{a} < 0$ nazivaju se *ponorima* polja $\vec{a}$.

3^0 Ako je *div* $\vec{a} = 0$ u svim tačkama oblasti G, kaže se da je polje $\vec{a}$ *bezizvorno.*

Pi dokazivanju sledeće dve teoreme primenjivaće se svojstvo jednostruko (prosto) povezane oblasti. U tom smislu potrebno je podsetiti se da je oblast $G \subset E^3$ jednostruko (prosto) povezana ako za svaku zatvorenu površ S sadržanu u G deo prostora E^3 ograničen tom površi takodje je sadržan u G.

4.3.4. Teorema. *Neka je $\vec{a} = \vec{a}(M), M \in G \subset E^3$ neprekidno, diferencijabilno, bezizvorno vektorsko polje definisano na jednostruko (prosto) povezanoj oblasti G i γ zatvorena kriva koja je zajednička granica za pobrši S_1 i S_2 koje su sadržane u G. Tada je*

$$\iint\limits_{S_1} \vec{a} \cdot d\vec{S}_1 = \iint\limits_{S_2} \vec{a} \cdot d\vec{S}_2,$$

tj. fluks za bezizvorno vektorsko polje $\vec{a} = \vec{a}(M), M \in G \subset E^3$ ne zavisi od oblika površi za onaj skup površi iz G koje imaju zajedničku graničnu liniju.

Dokaz. Neka je γ zajednička granična linija površi S_1 i S_2. Ove dve površi obrazuju zajedničku površ S koja je granica oblasti $\overline{D}$. Kako je polje bezizvorno, fluks vektora $\vec{a}$ kroz spoljnu stranu površi S jednak je nuli, tj.

$$\iint\limits_{S} \vec{a}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{S_1\cup S_2} \vec{a}\cdot d\vec{S} = 0.$$

Ako na integral na desnoj strani primenimo svojstvo aditivnosti u odnosu na oblast integracije, a zbog jednostruko povezane oblasti G, primetimo da su površi S_1 i S_2 suprotno orjentisane, imamo

$$\iint\limits_{S_1\cup S_2} \vec{a}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{S_1} \vec{a}\cdot d\vec{S}_1 - \iint\limits_{S_2} \vec{a}\cdot d\vec{S}_2 = 0,$$

odakle je

$$\iint\limits_{S_1} \vec{a}\cdot d\vec{S}_1 = \iint\limits_{S_2} \vec{a}\cdot d\vec{S}_2.\blacksquare$$

4.3.5. Teorema. *Neka je*

$$\vec{a} = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k},\ \ (x,y,z)\in G\subset E^3$$

vektorsko polje definisano na prosto povezanoj oblasti G. Ako je polje $\vec{a}$ neprekidno zajedno sa svim parcijalnim izvodima prvog reda, sledeća tvdjenja su medjusobno ekvivalentna.

1^0. *Polje $\vec{a}$ je potencijalno.*

2^0. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{a}\cdot d\vec{r}$ *ne zavisi od ablika luka $\overset{\frown}{AB}$, sadržanog u oblasti G već od krajnjih tačaka A i B.*

3^0. $\oint\limits_{\gamma} \vec{a}\cdot d\vec{r} = 0$, *po svakoj zatvorenoj krivoj γ sadržanoj u G.*

4^0. *rot* $\vec{a} = \vec{0}$ *u svim tačkama oblasti G.*

Dokaz.

$1^0 \Rightarrow 2^0$: Ako je polje $\vec{a}$ potencijalno, prema ranije datoj definiciji, egzistira skalarno polje $u = u(M)$, $M\in G$ tako da je u svim tačkama oblasti G *grad* $u = \vec{a}$. Otuda je

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} grad\ u\cdot d\vec{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} du = u(B) - u(A).$$

$2^0 \Rightarrow 3^0$: Neka je γ orjentisana zatvorena kriva bez tačaka samopresecanja. Uočimo dve različite tačke na γ. Tada se kriva γ razbija na dva luka $\overset{\frown}{AB}$ i $\overset{\frown}{BA}$ suprotne orjentacije. Ako iskoristimo svojstvo promene znaka krovolinijskog integrala druge vrste pri promeni orjentacije krive, prema 2^0, imamo

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_{\overset{\frown}{BA}} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{a} \cdot d\vec{r} - \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0.$$

$3^0 \Rightarrow 4^0$: Ako je $\int\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0$, po svakoj zatvorenoj krivoj γ sadržanoj u G, prema Stoksovoj formuli, imamo

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_{S} rot\ \vec{a} \cdot d\vec{S} = 0,$$

gde je S površ sadržana u oblasti G ograničena krivom γ.

Ako ovu jednakost napišemo u skalarnom obliku, imamo

$$\iint_{S} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

U ovoj jednakosti može se respektivno uzeti da je

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,$$

što implicira sledeće jednakosti:

$$\iint_{S} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dydz = 0, \quad \iint_{S} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dxdz = 0,$$

$$\iint_{S} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

Respektivnom primenom 3.1.17. Teoreme na svaku od dobijenih jednakosti, dobićemo da je

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = 0 \iff \frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z},$$
$$\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} = 0 \iff \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x},$$
$$\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = 0 \iff \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y},$$

što je ekvivalentno sa činjenicom da je $rot\ \vec{a} = 0$.

$4^0 \Rightarrow 1^0$: Iz teorije diferencijalnih jednačina poznato je da poslednje tri jednakosti predstavljaju potreban i dovoljan uslov da izraz

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

bude totalni diferencijal skalrne funkcije $u = u(x, y, z),\ (x, y, z) \in G$. Dakle,

$$u_x = a_x,\ u_y = a_y,\ u_z = a_z,$$

što znači da je $grad\ u = \vec{a}$, pa je polje $\vec{a}$ potencijalno. ■

Napomena. Funkcija $u = u(x, y, z),\ (x, y, z) \in G$, može se naći rešavanjem sistema jednačina $u_x = a_x,\ u_y = a_y,\ u_z = a_z$, uz uslove

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Medjutim, prema 2^0, tačke $A(x_0, y_0, z_0)$ i $B(x, y, z)$ mogu se uzeti za početak i kraj dijagonale pravouglog paralelepipeda sadržanog u oblasti G, a sa ivicama paralelnim respektivno x, y i z osi. Kako u tom slučaju imamo šest medjusobno različitih putanja izmedju tačaka A i B imamo za posledicu šest formula za izračunavanje potencijala. Ovde dajemo jednu od njih.

$$u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0) = \int_{x_0}^{x} a_x(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} a_y(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} a_z(x, y, t)dt.$$

Čitaocu se prepušta da napiše ostalih pet formula.

Vektorska polja se klasifikuju prema karakterističnim vrednostima koje mogu imati prostorni izvodi *divergencija i rotor.* U tom smislu definisaćemo sledeće četiri kategorije vektorskih polja čija smo svojstva proučili u teoremama koje su date posle 4.3.2. Teoreme.

Prvu kategoriju čine vektorska polja kod kojih je u svim tačkama oblasti definisanosti $G \subset E^3$ $rot\ \vec{a} = \vec{0}$, a u svim tačkama oblati G $div\ \vec{a} \neq 0$. Prema predhodnoj teoremi ova polja se nazivaju *potencijalnim* (bezvrtložnim ili lameralnim).

Drugu kategoriju čine vektorska polja kod kojih je u svim tačkama oblasti definisanosti $G \subset E^3$ $div\ \vec{a} = 0$, a u svim tačkama iz G $rot\ \vec{a} \neq \vec{0}$. Ova polja nazivaju se *solenoidnim* (vrtložnim).

Treću kategoriju čine vektorska polja kod kojih je u svim tačkama oblasti definisanosti $G \subset E^3$ $rot\ \vec{a} = \vec{0}$ i $div\ \vec{a} = 0$. Ova polja se nazivaju *Laplasovim.*

Četvrtu kategoriju čine vektorska polja kod kojih je $rot\ \vec{a} \neq \vec{0}$ i $div\ \vec{a} \neq 0$, pri čemu u nekim tačkama $rot\ \vec{a}$ ili $div\ \vec{a}$ mogu biti jednako nuli. Ova se polja nazivaju *složenim.*

4.3.6. Primer. Dato je polje vektora

$$\vec{a} = (3x^2 + ay^2)\vec{i} + (2xy - z^2)\vec{j} + bzy\vec{k}.$$

(a) Odrediti a i b tako da polje $\vec{a}$ bude potencijalno, a zatim naći potencijal tog polja.

(b) Odrediti fluks tako odredjenog polja kroz spoljnu stranu površi sfere

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 1.$$

Rešenje.

(a)Ovde je

$$rot\ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 + ay^2 & 2xy - z^2 & bzy \end{vmatrix} = (bz + 2z)\vec{i} + (2y - 2ay)\vec{k}.$$

$$rot\ \vec{a} = \vec{0} \iff a = 1 \wedge b = -2,$$

prema tome, potencijalno polje je

$$\vec{a} = (3x^2 + y^2)\vec{i} + (2xy - z^2)\vec{j} - 2yz\vec{k}.$$

Potencijal izračunavamo po formuli

$$u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0) = \int_{x_0}^{x} a_x(t,y_0,z_0)dt + \int_{y_0}^{y} a_y(x,t,z_0)dt + \int_{z_0}^{z} a_z(x,y,t)dt.$$

U našem slučaju imamo da je

$$u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0) = \int_{x_0}^{x} (3t^2 + y_0^2)dt + \int_{y_0}^{y} (2xt - z_0^2)dt + \int_{z_0}^{z} (2yt)dt.$$

$$= x^3 + xy^2 - z^2y - (x_0^3 + x_0y_0^2 - z_0^2y_0)$$

(b) Kako je u ovom slučaju $div\ \vec{a} = 8x - 2y$, prema formuli Gaus-Ostrogradskog imamo

$$\Phi = \iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (8x - 2y)dxdydz,$$

gde je V oblast u E^3 ograničena sferom

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 1.$$

Posle smene

$$x = 1 + \rho \sin\varphi \cos\theta,\ y = 4 + \rho \sin\varphi \sin\theta,\ z = \rho \cos\varphi,$$

izračunavamo

$$J = \rho^2 \sin\varphi,\ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Prema tome, posle zamene u formuli za fluks, imamo

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 (8 + 8\rho \sin\varphi \cos\theta - 8 - 4\rho \sin\varphi \sin\theta)\rho^2 d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} (2\cos\theta - \sin\theta)d\theta \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \\ &= 0. \blacklozenge \end{aligned}$$

4.3.7. Primer. Dato je polje vektora

$$\vec{a} = (yz - 2x)\vec{i} + (xz - 2y)\vec{j} + xy\vec{k}.$$

(a) Dokazati da je polje potencijalno i naći potencijal.
(b) Izračunati fluks polja $\vec{a}$ kroz spoljnu stranu površi

$$z^2 = 4x^2 + 4y^2,\ z = 2.$$

Rešenje.

(a)Ovde je

$$rot\ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz - 2x & xz - 2y & xy \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Potencijal izračunavamo po formuli

$$u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0) = \int\limits_{x_0}^{x} a_x(t,y_0,z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} a_y(x,t,z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} a_z(x,y,t)dt.$$

U našem slučaju imamo da je

$$u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0) = \int\limits_{x_0}^{x} (y_0z_0 - 2t)dt + \int\limits_{y_0}^{y} (xz_0 - 2t)dt + \int\limits_{z_0}^{z} (xy)dt.$$

$$= xyz - x^2 - y^2 - (x_0y_0z_0 - x_0^2 - y_0^2)$$

(b) Kako je u ovom slučaju $div\ \vec{a} = -4$, prema formuli Gaus-Ostrogradskog imamo

$$\Phi = \iint\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = -4 \iiint\limits_V dxdydz,$$

gde je V oblast u E^3 ograničena gornjim delom konusne površi $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ i ravni $z = 2$. Kako je kod ovog konusa poluprečni 1, a visina 2 zapremina mu je $V = \frac{1}{3}2\pi$. Otuda je

$$\Phi = -4V = -\frac{8\pi}{3}.\blacklozenge$$

Vežbe.

1. Naći protok vektorskog polja $\vec{a} = y^2\vec{i} + z\vec{k}$ kroz spoljnu stranu površi

$$S : \{(x,y,z) : z = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq 2\}.$$

2. Naći protok vektorskog polja $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\vec{k}$ kroz spoljnu stranu površi

$$S : \{(x,y,z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ 0 \leq z \leq \sqrt{3}\}.$$

3. Naći protok vektorskog polja $\vec{a} = (xy - y^2)\vec{i} + (xy + 2x - x^2)\vec{j} + z\vec{k}$ kroz spoljnu stranu površi

$$S : \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1,\ z^2 = \frac{1}{2}x^2 + y^2\}.$$

4. Izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j}$ po zatvorenoj konturi koja se dobija od luka astroide

$$x = R\cos^3 t,\ y = R\sin^3 t,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

i odsečaka na koordinatnim osama koji su nastali presecanjem ovog luka sa koordinatnim osama.

5. Primenom Stoksove formule naći cirkulaciju vektorskog polja $\vec{a}$ po konturi γ ako je

(a) $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k};\ \gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = z^2, x \geq 0\}$.

(b) $\vec{a} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j};\ \gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 9,\ 3y + 4z = 5\}$.

6. Dato je polje vektora

$$\vec{a} = (yz - 2x)\vec{i} + (zx - 2y)\vec{j} + xy\vec{k}.$$

(a) Dokazati da je polje potencijalno i izračunati potencijal.

(b) Izračunati protk vektorskog polja $\vec{a}$ kroz spoljnu stranu površi

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^3 = \sin\frac{\pi\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}};\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

7. Dato je polje vektora

$$\vec{a} = (\frac{3\sqrt{3}}{2}x + y + z)\vec{i} + (\frac{3\sqrt{3}}{2}y + x + z)\vec{j} + (\frac{3\sqrt{3}}{2}z + x + y)\vec{k}.$$

(a) Dokazati da je polje potencijalno i izračunati potencijal.

(b) Izraŭnati protk vektorskog polja $\vec{a}$ kroz spoljnu stranu površi

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3+\frac{z^6}{c^6}=\frac{xyz}{h^3}.$$

4.4. Hamiltonov i Laplasov operator.

Ako je $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$, neko skalarno polje, onda se kao što znamo, *grad* u definiše se na sledeći način :

$$grad\ u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Uzimajući da proizvod $\frac{\partial}{\partial x}u$ znači diferencijalnu operaciju $\frac{\partial u}{\partial x}$, vektor *grad* u može se shvatiti kao proizvod simboličkog vektora $\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ i skalara u.

Simbolički vektor $\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ naziva se *Hamiltonovim* (ili *nabla*) operatorom i obeležava se sa ∇. na taj način imamo sledeću jednakost

$$\begin{aligned}\nabla\ u &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\ u\\ &=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\\ &\Longleftrightarrow\ \nabla\ u = grad\ u,\end{aligned}$$

gde se "množenje" $\nabla\ u$ može se shvatiti kao "množenje vektora skalarom".

Ranije smo utvrdili da za vektorsko polje $\vec{a} = a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $(x, y, z) \in G$ važe relacije

$$div\ \vec{a} = \nabla\cdot\vec{a}\ \wedge rot\ \vec{a} = \nabla\times\vec{a}.$$

Medjutim, za neprekidno skalarno polje $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$, kod koga su neprekidni parcijalni izvodi do drugog reda, odnosno vektorsko polje $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $(x, y, z) \in G$ važe relacije

$$rot\ grad\ u = \vec{0}\ \wedge div\ rot\ \vec{a} = 0,$$

a koje se mogu zapisati u obliku

$$\nabla\times(\nabla\ u) = \vec{0}\ \wedge\nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = 0.$$

Ovi primeri ukazuju na mogućnost korišćenja operatora ∇ za preglednije i izražajnije zapisivanje mnogih formula vektorske analize. Šta više odredjena svojstva običnih vektora mogu se preneti na simbolički vektor ∇. Na ovoj činjenici neke formule u vektorskoj analizi izvode se primenom rezultata iz vektorske algebre.

Tako, na primer, neposredno proveravamo tačnost formule

$$\nabla \cdot (u\vec{a}) = (\nabla\ u) \cdot \vec{a} + u(\nabla \cdot \vec{a}),$$

a koja ima za posledicu formulu

$$div\ (u\vec{a}) = \vec{a} \cdot grad\ u + u\ div\ \vec{a}. \tag{34}$$

Isto tako, iz formule

$$\nabla\ (uv) = v(\nabla\ u) + u(\nabla v),$$

dobija se formula

$$grad\ (uv) = vgrad\ u + ugrad\ v. \tag{35}$$

Koristeći operator ∇ i poznate formule vektorske algebre neposredno se mogu dokazati sledeće formule :

$$\begin{aligned}
&rot\ (u\vec{a}) = u\ rot\ \vec{a} + (grad\ u) \times \vec{a},\\
&div\ (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot rot\ \vec{a} - \vec{a} \cdot rot\ \vec{b},\\
&rot\ (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + \vec{a} div\ \vec{b} - \vec{b} div\ \vec{a},\\
&grad\ (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + \vec{b} \times rot\ \vec{a} + \vec{a} \times rot\ \vec{b}.
\end{aligned}$$

Operacija odredjivanja gradijenta skalarnog polja i operacije odredjivanja divergencije i rotora vektorskog polja su diferencijalne operacije prvor reda. Uzimajući njihove kombinacije, ali samo one koje imaju smisla, dobijamo diferencijalne operacije drugog reda. Ovih operacija ima ukupno pet, što dokazujemo u narednom tekstu.

Neka je $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$, skalarno polje i neka funkcija $u = u(x, y, z)$ ispunjava sve uslove za jednakost drugih mešovitih izvoda. Tada je *grad* u, kao što znamo, vektor, pa ponavljanje te operacije, tj. *grad* (*grad* u) nema smisla. (Gradijent se odredjuje samo za skalarne funkcije.)

Inače, *div* (*grad u*) ima smisla, a po definiciji je

$$\begin{aligned} div\ (grad\ u) &= div\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned} \tag{36}$$

Operacija *rot* (*grad u*) takodje ima smisla, a pošto su za funkciju u odgovarajući mešoviti izvodi jednaki, imamo da je

$$rot\ (grad\ u) \equiv \vec{0}, \tag{37}$$

što prema 4.3.5. Teoremi, ima za posledicu da je polje vektora *grad u* potencijalno.

Kako je za vektorsko polje $\vec{a} = a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\ (x,y,z)\in G$ divergencija $div\ \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$ skalarna funkcija ima smisla odrediti samo *grad* (*div* $\vec{a}$), i pri tome je, po definiciji,

$$\begin{aligned} grad\ (div\ \vec{a}) &= grad\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial z\partial x}\right)\vec{i}\\ &+ \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial y\partial z}\right)\vec{j}\\ &+ \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\vec{k}. \end{aligned} \tag{38}$$

Na kraju, budući da je *rot* $\vec{a}$ vektorsko polje, imaju smisla i *div* (*rot* $\vec{a}$) i *rot* (*rot* $\vec{a}$). Pri tome, us lučaju neprekidno-diferencijabilnog vektorskog polja, zajedno sa svim parcijalnim izvodima drugog reda, važi identitet

$$div\ (rot\ \vec{a}) \equiv 0, \tag{39}$$

što znači da je polje vektora *rot* $\vec{a}$ solenoidno.

Što se tiče vektora *rot* (*rot* $\vec{a}$), neposredno se dokazuje da za njega važi formula

$$\begin{aligned} rot\ (rot\ \vec{a}) = grad\ (div\ \vec{a}) \\ -\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)\vec{i} \\ -\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right)\vec{j} \\ -\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\vec{k}. \end{aligned} \tag{40}$$

Da bismo definisali *Laplasov operator* razmotrimo formulu (36)

$$div\ (grad\ u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

odnosno, u simboličkom obliku

$$div\ grad\ u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u.$$

Tako definisan operator $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ naziva se *Laplasovim* operatorom i označava sa $\triangle$. Tako imamo

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

odnosno

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = div\ grad\ u.$$

Operator $\triangle$ može se shvatiti i kao skalarni kvadrat simboličkog vektora ∇, budući da *formalnim* postupkom dobijamo

$$\begin{aligned} (\nabla)^2 =& \nabla\cdot\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \\ =& \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \triangle \end{aligned}$$

odnosno

$$(\nabla)^2\ u = \triangle u.$$

Inače, primena Laplasovog operatora na vektor $\vec{A} = (P,Q,R)$ sastoji se u primeni $\triangle$ na svaku koordinatu vektora $\vec{A}$, tj. stavlja se $\triangle\vec{A} = (\triangle P, \triangle Q, \triangle R)$. Na osnovu toga, formula (40) ima sledeća dva ekvivalentna oblika

$$rot\ rot\ \vec{a} = grad\ div\ \vec{a} - \triangle\vec{a} \iff \triangle\vec{a} = grad\ div\ \vec{a} - rot\ rot\ \vec{a}.$$