KOMPLEKSNA ANALIZA

SADRŽAJ

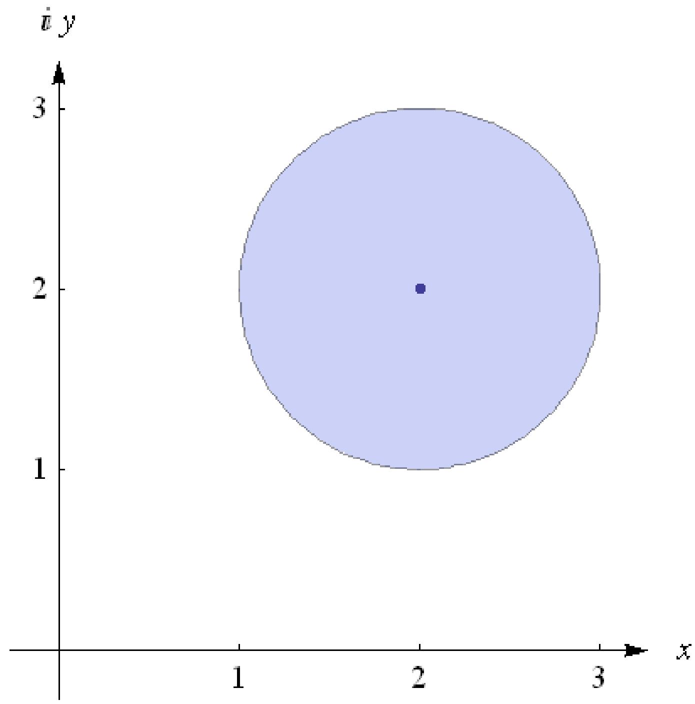
1. KOMPLEKSNA RAVAN I FUNKCIJA

1.1. Kompleksan broj

Imaginarna jedinica $i \notin \mathbb{R}$ je takav broj da je $i^2 = -1$. Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + iy \quad (x, y \epsilon \mathbb{R}).$$

1.2.Kompleksna ravan



1.3.Niz i red kompleksnih brojeva

1.4.Kompleksna funkcija

Neka su $D, F \subseteq \mathbb{C}$. Funkcija $f: D \rightarrow F$ je funkcija kompleksne promenljive.

Ovo možemo zapisati i na drugi način kao

$$w = f(z): \quad z \epsilon D, \qquad w \epsilon F.$$

Razdvajanjem realnih i imaginarnih delova slika i originala,

$$z = x + iy, \;\; w = u + iv \quad (x, y, u, v \epsilon \mathbb{R}),$$

možemo pisati

$$u + iv = f(x + iy),$$

Odakle dobijamo dve realne funkcije od dveju realnih promenljivih

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

2. IZVOD KOMPLEKSNE FUNKCIJE

2.1.**Definicija izvoda i Koši-Rimanovi uslovi**

2.2.Analitičke funkcije

2.3.Konformno preslikavanje

3. INTEGRAL KOMPLEKSNE FUNKCIJE

3.1.Definicija integrala. Izračunavanje svođenjem na realni integral

Integral kompleksne funkcije $w = f(z) = u + iv$, pri čemu z=$x + iy$, po pozitivno orjentisanoj krivoj C se definiše pomoću para realnih krivolinijskih integrala druge vrste

$$\int_{C^+} f(z)dz = \int_{C^+} (u + iv)d(x + iy) = \int_{C^+} (u + iv)(dx + idy),$$

tj.

$$\int_{C^+} f(z)dz = \int_{C^+} (udx - vdy) + i \int_{C^+} (vdx + udy).$$

Ak je kriva data u parametarskom obliku

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (a \le t \le b),$$

tada je

$$\int_{C^+} f(z)dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)dt.$$

Stav 1. *Važi tvrđenje*

$$\int_{C^-} f(z)dz = -\int_{C^+} f(z)dz.$$

Primer 1. Pokazati da važi

$$\oint_{C^+} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i\ ,$$

gde je C^+ krug poluprečnika R sa centrom u tački z_0.

3.2.Košijeva integralna teorema i formula

Teorema 1. (Osnovna Košijeva teorema o integraciji analitičke funkcije) *Ako je $f(z)$ analitička funkcija u prostopovezanoj oblasti G tada je integral funkcije $f(z)$ po svakoj zatvorenoj delimično glatkoj krivoj C^+ koja leži u G jednak nuli, tj. važi*

$$\int_{C^+} f(z)dz = 0\ .$$

Teorema 2. (Košijeva integralna formula za analitičke funkcije) *Ako je $f(z)$ analitička funkcija u oblasti G i $z \epsilon G$ tada je*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(s)}{s-z}ds = f(z)\ ,$$

gde je C^+ proizvoljna kontura u oblasti G koja obuhvata tačku z.

Teorema 3. *Ako je $f(z)$ analitička funkcija u oblasti G i $z\epsilon G$ tada je*

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(s)ds}{(s-z)^{n+1}} = f^{(n)}(z)\ ,$$

gde je C^+ proizvoljna kontura u oblasti G koja obuhvata tačku z.

4. RAZVOJ KOMPLEKSNE FUNKCIJE U RED

4.1.Tejlorov red kompleksne funkcije

Teorema 1. *Funkcija $f(z)$ koja je analitička u krugu $D(z_0, R)$ može se unutar tog kruga razviti u stepeni red*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n,$$

gde je

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\ .$$

Ovaj stepeni red je poznat pod imenom Tejlorov red.

1.1. Loranov red kompleksne funkcije i izolovani singulariteti

Teorema 1. *Funkcija* $f(z)$ *koja je analitička u prstenu* $D = \{z\colon\ R_1 < |z - z_0| < R_2$ *može se unutar tog prstena razviti u red*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z - z_0)^n,$$

gde je

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{f(s)ds}{(s - z_0)^{n+1}} \ .$$

Ovaj red je poznat pod imenom Loranov red.

Zadatak 1. Funkciju

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

razviti u red oko tačke: $a)\ \ z_0 = 0;\quad b)\ \ z_0 = 1;\quad c)\ \ z_0 = 2;\quad d)\ \ z_0 = \infty.$

Rešenje:

$$a)\ \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} z^n \quad (|z| < 1).$$

$$b)\ \ f(z) = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n \quad (|z-1| < 1).$$

$$c)\ \ f(z) = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-2)^n \quad (|z-2| < 1).$$

$$d)\ \ f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1} - 1}{z^n} \quad (|z| > 2)\ .$$

Zadatak 2. Funkciju

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2},$$

razviti u red oko tačke: $a)$ $z_0 = i$; $b)$ $z_0 = \infty$.

Rešenje:

$$a) \quad f(z) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(z-i)^2} - \frac{i}{4}\frac{1}{z-i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)i^n}{2^{n+4}}(z-i)^n \quad (0 < |z-i| < 2).$$

$$b) \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+2}} \quad (|z| > 1)\,.$$

Zadatak 3. Funkciju

$$f(z) = \frac{1}{z} e^{1/z^2},$$

razviti u red oko tačke $z_0 = 0$.

Rešenje:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^{2n+1}} \quad (|z| > 0).$$

2. RAČUN OSTATAKA FUNKCIJA

2.1.Definicija ostatka funkcije

2.2.Osnovna teorema o ostacima

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a}((z-a)^m f(z))^{(m-1)}$$

2.3.Primena ostataka na izračunavanje integrala

Zadatak 3. Izračunati vrednost integrala

$$J = \oint_{C^+} \frac{zdz}{(z^2-1)^2(z^2+1)},$$

Ako je C^+ pozitivno orjentisana kriva $x^2+y^2-2x-2=0.$

Rešenje: Jednačina krive C^+ se može napisati u obliku $(x-1)^2+y^2=3$, odakle se vidi da je to krug sa središtem u tački S(1,0) i poluprečnikom $r=\sqrt{3}$. Funkcija

$$f(z) = \frac{z}{(z^2-1)^2(z^2+1)}$$

Ima polove 2. reda u tačkama $z=-1$ i $z=1$, a 1. reda u tačkama $z=-i$ i $z=i$. Kako je pol $z=-1$ izvan kruga, a ostali su u krugu, to je

$$J = 2\pi i(\operatorname{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=i} f(z)),$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^2 f(z)\right)^{(2-1)},$$

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)}\right)' = \lim_{z\to 1}\frac{1-z-z^2-3z^3}{(z+1)^3\ (z^2+1)^2} = -\frac{1}{8}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}\left((z-i)\quad f(z)\right) \ ,$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z}{\left((z+1)^2(z^2+1)\right)'} = \lim_{z\to 1}\frac{z}{(2(z+1)(z^2+1)+(z+1)^2 2z)} = \frac{1}{8}.$$

$$J = 2\pi i\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}i.$$

2.4.Primena ostataka na izračunavanje realnih integrala

Literatura:

1. D.S. Mitrinović, J.D. Kečkić, Matematika II, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.
2. D. Milovančević, M. Stanojević, Matematika II, Mašinski fakultet u Nišu, 2003.
3. M. Ušćumlić, Miličić, Zbirka zadataka iz Matematike II,