

PITANJA I ZADACI ZA III KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE I

NEODREDJENI INTEGRAL

1. a) Definicija i osnovna svojstva neodredjenog integrala.
b) Izračunati integrale:

$$\int \sqrt[4]{x} dx, \int (2 \sin x - \frac{5}{x}) dx, \int \frac{2}{x^2 + 4} dx, \int \frac{2x^2 + 6}{x^2 - 1} dx.$$

2. a) Integracija pomoću smene.
b) Uvodjenjem odgovarajuće smene naći integrale:

$$\int x e^{x^2+1} dx, \int x^2 e^{2x^3-1} dx, \int \frac{e^x}{1+e^x} dx, \int x^3 \sqrt{x^4+5} dx, \int e^{\cos x} \sin x dx$$

3. a) Parcijalna integracija.
b) Izračunati integrale:

$$\int \ln x dx, \int \arctan x dx, \int x^3 e^{x^2} dx, \int x^6 \ln x dx, \int \frac{x^3 \arccos x dx}{\sqrt{1-x^2}}, \int \ln x \frac{x dx}{(1+x^2)^2}.$$

4. a) Integracija racionalnih funkcija.
b) Naći integrale:

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} dx, \int \frac{dx}{2x^2 + 9}, \int \frac{dx}{x^5 + x^2}, \int \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} dx, \int \frac{x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx.$$

5. a) Integracija nekih iracionalnih funkcija i Ojlerove smene.
b) Izračunati integrale:

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx, \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x}}, \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)^3}, \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx.$$

6. Uvodjenjem odgovarajuće smene, izračunati integrale trigonometrijskih funkcija:

$$\int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}, \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}}, \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}.$$

ODREDJENI INTEGRAL

8. a) Definicija određenog integrala u Rimanovom smislu.
b) Geometrijski smisao određenog integrala.
9. a) Osnovne osobine određenog integrala.
b) Teorema o srednjoj vrednosti za integrale.
c) Određeni integral sa promenljivom gornjom granicom i Njutn-Lajbnicova formula.
10. Izračunati integrale:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx, \quad \int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}, \quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

PRIMENE ODREDJENOG INTEGRALA

11. Primena određenog integrala na izračunavanja u geometriji.
12. Naći površinu oblasti ograničene pravom $y = 1$ i jednim lukom krive $y = \sin x$.
12. Naći površinu oblasti ograničene krivom $y = \ln x$ i pravama $x = 1/e$, $x = e$ i $y = 0$.
12. Naći površinu ograničenu krivom $y = x^2$, pravom $y = 6 - x$ i y -osom.
13. U tačkama preseka prave $y = 0$ i parabole $y = x^2 - 4$ povučene su normale na parabolu. Izračunati površinu ograničenu parabolom i normalama.
14. Naći površinu koju zaklapa kriva $y = \frac{\ln 2 + \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ sa delom x -ose i ordinatom u tački maksimuma.
15. Naći zapreminu tela dobijenog rotacijom krive $y = e^{-x}$ oko x -ose nad intervalom $[0, 1]$.
16. Oblast ograničena krivama $y = x$ i $y = x^2$ rotira oko prave $y = 3$. Izračunati zapreminu tako nastalog rotacionog tela.
17. Izračunati dužinu jednog luka cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ na intervalu $t \in [0, 2\pi]$.
18. Izračunati dužinu luka krive $\begin{cases} x = 3(\cos t + \ln \tan \frac{t}{2}) \\ y = 3 \sin t \end{cases}$ između tačaka koje odgovaraju vrednosti parametara $t_1 = \pi/2$, $t_2 = 2\pi/3$.
19. a) Nesvojstveni integrali.
b) Izračunati integrale:

$$\int_1^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^4}}, \quad \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}.$$

20. Naći zapreminu tela koje nastaje rotacijom dela površi ograničene krivom $y = \frac{1}{1+x^2}$, i pravom $y = 0$ oko x -ose.