

PITANJA I ZADACI ZA II KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE I

BROJNI NIZOVI

1. a) Definicija brojnog niza. Tačka nagomilavanja niza i granična vrednost niza.
- b) Za sledeće nizove odrediti tačke nagomilavanja i granične vrednosti ukoliko postoje:

$$\{(-1)^n n\}, \{(-1)^n\}, \{1/n\}.$$

2. a) Kriterijumi konvergencije nizova.
- b) Ispitati konvergenciju niza $\{a_n\}$, gde je $a_n = 2n/(n+1)$.
- c) Dokazati da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a > 0$).

3. Naći granične vrednosti nizova:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$

- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n$

- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$

4. Ako je

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad n \geq 2,$$

naći $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Rešenje: Kako je

$$\begin{aligned} a_n &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} \\ &= \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \frac{k+1}{k} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n}, \end{aligned}$$

sledi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/2.$$

REALNA FUNKCIJA JEDNE REALNE PROMENLJIVE

5. Granična vrednost funkcije. Osnovna svojstva graničnih vrednosti funkcija.
6. Naći sledeće granične vrednosti:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x}$
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2 - 1}$
 d) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1} \right)^{x^2 - 1}$.

7. a) Asimptote funkcija.
 b) Naći sve asimptote funkcija: $y = 1/x$, $y = 1/(x^2 + 1)$, $y = x + \frac{1}{x-1}$.
 8. a) Neprekidnost funkcija. Tačke prekida.
 b) Diskutovati primere funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ 3x + 2, & x \geq 1 \end{cases}.$$

9. a) Definicija izvoda i diferencijala funkcije.
 b) Geometrijski smisao izvoda i diferencijala.
 c) Naći po definiciji izvod funkcije $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$).
 c) Naći izvode funkcija: x^3 , \sqrt{x} , $x^{2/3}$, $x^{-5/2}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.
 10. a) Osnovna pravila diferenciranja. Izvod proizvoda i količnika funkcija.
 b) Naći izvode funkcija: $y = xe^x$, $y = (x - 1)/(x^2 + 1)$, $y = \operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$.
 11. Naći ugao pod kojim se seku krive $y = 1/x$ i $y = x^2$.
 12. Napisati jednačine tangenti na grafik krive $y = \sin x$ u tačkama $x = 0$ i $x = \pi/3$.
 Naći približnu vrednost $\sin(\pi/6)$ aproksimirajući funkciju pomoću jedne a zatim druge tangente. Da li su dobijene aproksimacije podjednake tačnosti?
 13. Naći izvode funkcija:
 a) $f(x) = x(1 + x)^{1/3}$,
 b) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$, $t \in (0, 2\pi)$)
 c) $f(x) = \sin^3(x^2 + e^x)$,
 13. Naći koeficijent pravca tangente krive $x = t \ln t$, $y = \ln t / t$ u tački $(0, 0)$.
 14. Izvodi i diferencijali višeg reda. Naći sve izvode funkcije $f(x) = a^x$. Primenom Lajbnicove formule naći sve izvode funkcije $f(x) = x^3 \ln x$.
 15. Osnovne teoreme diferencijalnog računa: Fermaova i Rolova teorema. Dati geometrijsko tumačenje.
 16. a) Kako glasi Lagrangeova teorema?
 b) Izvesti dokaz Lagrangeove teoreme.
 c) Dati geometrijsko tumačenje Lagrangeove teoreme.
 17. Lopitalova pravila. Primenom Lopitalovih pravila naći granične vrednosti:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1 - x)$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{(1-x)^2}$$

18. a) Tejlorova formula. Šta je to Tejlorov polinom a šta Lagranžov ostatak?
 b) Napisati Maklorenov polinom stepena n za funkciju $f(x) = e^x$. Primenom ovog polinoma odrediti približnu vrednost broja e tako da greška bude manja od 0.001.
19. Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti.
 a) U datu loptu upisati cilindar maksimalne zapremine.
 b) U datu loptu upisati konus najveće zapremine. Koliko iznosi ta zapremina?
 c) U zatvorenoj konturi koju obrazuju krive $y = 2 - x^2$ i $y = |x|$ upisati pravougaonik maksimalne površine tako da mu dva temena leže na datoj paraboli.
20. Odrediti intervale monotonosti i ekstremne vrednosti funkcije $f(x) = xe^{-x}$.
21. Ispitati tok i nacrtati grafik sledećih funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x(x+1)}{x^2+1}$$

$$\text{b) } f(x) = x - 2 - \frac{6}{x-1}$$

$$\text{c) } f(x) = x^{2/3}e^{-x}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x+1}$$

$$\text{f) } f(x) = e^{1/(2-x)}$$

$$\text{g) } f(x) = \ln \frac{2x-1}{x+3}$$

$$\text{h) } f(x) = \cos x - \ln(\cos x)$$