PITANJA I ZADACI ZA I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE I

RELACIJE

1. Relacije. Osobine relacije ekvivalencije i klase ekvivalencije.
   Zadatak. Neka je na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ uvedena relacija

$$x \rho y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) x - y = 3k.$$

Pokazati da je ovo relacija ekvivalencije i odrediti klase ekvivalencije.

2. Relacija poretka. Maksimum i supremum skupa.

Zadatak. Dat je skup $S = [1, 2) \subset \mathbb{R}$. Naći infimum i supremum skupa S i ispitati da li postoje maksimum i minimum skupa S.

KOMPLEKSNI BROJEVI

1. Algebarski i trigonometrijski oblik kompleksnog broja.

2. Operacije sa kompleksnim brojevima i osnovne osobine.

Zadatak. Napisati u trigonometrijskom obliku brojeve: $-i$, $1+i$, $-i-1$, $\sqrt{3}-i$ i prikazati ih u kompleksnoj ravni.

Zadatak. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = \cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2}$ i $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + i$. Odrediti parametar t iz uslova $z_1 = z_2$ i $t \in (-\pi, \pi]$.

Zadatak. Gde se nalaze tačke u kompleksnoj ravni za koje je $z\bar{z} = 1$.

Zadatak. Dokazati da je:

$$(1 + i\sqrt{3})(1 + i)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2\sqrt{2}[\cos(\frac{7\pi}{12} + \varphi) + i\sin(\frac{7\pi}{12} + \varphi)].$$

3. Stepenovanje i korenovanje kompleksnih brojeva (Moavrove formule).

Zadatak. Neka je

$$f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Odrediti $f(1998) + f(2002)$.

Zadatak. Naći sva rešenja jednačine $z^6 + 2z^3 + 4 = 0$.

Zadatak. Izračunati vrednost izraza

$$\left(\frac{\sqrt{3} + 5i}{4 + 2i\sqrt{3}}\right)^{66}.$$

Zadatak. Izračunati: a) $\sqrt[4]{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}$, b) $\sqrt[5]{\sqrt{3} + 3i}$.

MATRIČNI RAČUN

1. Matrice i operacije s matricama.
2. Inverzna matrica i odredjivanje inverzne matrice.

Zadatak. Rešiti matričnu jednačinu $A^{-1}XA = B$, ako je

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadatak. Ako je $\varphi(\lambda) = -2 - 5\lambda + 3(\lambda)^2$ i $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, pokazati da je $\varphi(A) = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$.

Zadatak. Ako su A i B kvadratne matrice reda n, i ako je $AB - BA = E$, dokazati da je $A^nB - BA^n = nA^{n-1}$.

Zadatak. Rešiti matričnu jednačinu $X \cdot A = (B + X) \cdot C$, ako je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadatak. Rešiti matričnu jednačinu $A \cdot X = A\,(2X + A^{-1})$, ako je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadatak. Rešiti matričnu jednačinu $(A^TX^{-1}B^{-1})^{-1} = B(2X + B^{-1})$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Rang matrice. Odredjivanje ranga date matrice svodjenjem na trapeznu matricu.

Zadatak. Odrediti rang matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & -7 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -10 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Kako glasi Teorema o baznom minoru?

Zadatak. Koliko linearno nezavisnih vrsta ima matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ -3 & -4 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

1. Sistemi linearnih algebarskih jednačina: opšti oblik, rešenje, karakteristike.
2. Teorema Kroneker-Kapelija.
3. Kramerovo pravilo za rešavanje kvadratnih sistema jednačina.

Zadatak. Rešiti sisteme Kramerovim pravilom i Gausovim metodom eliminacije

$$\text{a)}\ \begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ 2x - y + 4z &= 5 \\ 3x + y - z &= 2. \end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} x - y - z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 12 \\ x - 3y - 2z &= 1. \end{aligned}$$

Zadatak. Odrediti parametar m tako da homogen sistem

$$\text{a)}\ \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ mx + 4y + z &= 0 \\ 6x + (m+2)y + 2z &= 0 \end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} mx + y + 4z &= 0 \\ 3x + 2y + 5z &= 0 \\ 5x + (m+1)y + (4m+1)z &= 0 \end{aligned}$$

ima rešenja različita od trivijalnih a zatim naći ta rešenja.

4. Diskutovati rešenja sledećih sistema jednačina za razne vrednosti parametara:

$$\text{a)}\ \begin{aligned} x + y + z &= m \\ x + (1+m)y + z &= 2m \\ x + y + (1+z)m &= 0. \end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} px + y - z &= 1 \\ x + py - z &= 1 \\ x - y - pz &= 1. \end{aligned}$$

VEKTORSKA ALGEBRA

1. Vektori i operacije sabiranja vektora i množenja vektora skalarom.
2. Skalarni proizvod vektora i primene.

Zadatak. Dati su vektori $\overrightarrow{a}(2\lambda, 1, 1-\lambda)$, $\overrightarrow{b}(-1, 3, 0)$ i $\overrightarrow{c}(5, -1, 8)$.
(a) Da li su vektori $\vec{b}$ i $\vec{c}$ medjusobno ortogonalni?
(b) Odrediti λ da vektor $\overrightarrow{a}$ zaklapa jednake uglove sa vektorima $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$.

Zadatak. Naći vektor $\overrightarrow{x}$ iz uslova $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a} = 1$, $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b} = 2$, $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{c} = 3$, gde je: $\overrightarrow{a}(2, -4, 3)$, $\overrightarrow{b}(3, -1, 5)$ i $\overrightarrow{c}(1, -2, 4)$.

3. Vektorski proizvod vektora sa primenama u geometriji.

Zadatak. Neka je $|a| = 5$, $|ba| = 5$, i $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ugao izmedju $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$. Naći površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$ i $3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$.

Zadatak. Naći površinu i visinu BD trougla ABC ako je $A(1, -2, 8)$, $B(0, 0, 4)$ i $C(6, 2, 0)$.

4. Mešovit proizvod tri vektora, geometrijska interpretacija i uslov komplanarnosti.

Zadatak. Dati su vektori $\vec{a}(2, 1, 1), \vec{b}(0, 1, -2), \vec{c}(-1, 1, 1)$. Naći zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad ovim vektorima.

Zadatak. Data su temena tetraedra $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$. Naći koordinate četvrtog temena D tako da D pripada osi Oy i da zapremina tetraedra bude 5.

Zadatak. Dati su vektori $\overrightarrow{a}(\alpha,1,1)$, $\overrightarrow{b}(1,\alpha,1)$ i $\overrightarrow{c}(1,1,\alpha)$. odrediti α tako da vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ budu komplanarni i u tom slučaju razložiti vektor $\overrightarrow{a}$ preko vektora $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$.

Zadatak. Dati su vektori $\overrightarrow{a}(0,2\lambda,\lambda)$, $\overrightarrow{b}(2,2,1)$, $\overrightarrow{c}(-1,-2,-1)$ i $\overrightarrow{d}(-3\lambda,-2\lambda,-\lambda)$.
(a) Pokazati da su vektori $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{d}$ i $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$ kolinearni.
(b) Dokazati da su vektori $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}$ i $\overrightarrow{d}$ komplanarni.
(c) Odrediti λ iz uslova $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\overrightarrow{c}+\lambda$.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

1. Različiti oblici jednačine ravni u prostoru.

Zadatak. Napisati jednačinu ravni koja
a) sadrži tačku $M(-2,1,5)$ i normalna je na vektor $\vec{n}(2,5,-3)$;
b) sadrži tačke $A(1,2,3), B(-1,2,5), C(7,0,-1)$;
c) sadrži tačku $M(-2,1,4)$ i normalna je na y-osu.

Zadatak. Napisati u skalarnom obliku jednačinu ravni datu u vektorskom obliku $\overrightarrow{r}\cdot(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})=2$. U kakvom je odnosu ta ravan sa ravni $\overrightarrow{r}\cdot(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})=-42$.

Zadatak. Napisati jednačinu ravni koja je paralelna osi z a na x i y osi odseca odsečke 2 i 3. Nacrtati je.

2. Rastojanje tačke od ravni.
Zadatak. Naći rastojanje tačke $M(1,-5,2)$ od ravni $4x-y+3z-1=0$.

3. Jednačine prave u prostoru.
Zadatak. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $M(0,-2,1)$ i paralelna je pravoj

$$\begin{cases} x-2y+3z &= 0 \\ x+z-4 &= 0 \end{cases}$$

Zadatak. Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $A(2,-3,4)$ i seče pravu

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1},$$

pod pravim uglom.

4. Dati potreban i dovoljan uslov da se prave $(\vec{r}-\vec{r}_1)\times\vec{p}_1=0$ i $(\vec{r}-\vec{r}_2)\times\vec{p}_2=0$ seku i naći vektor položaja presečne tačke.

Zadatak. Odrediti parametar c tako da se prave

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{c} \text{ i } \frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-2},$$

seku a zatim odrediti presečnu tačku.

5. Najkraće rastojanje izmedju mimoilaznih pravih.

Zadatak. Naći najkraće rastojanje izmedju pravih:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}.$$

Zadatak. Odrediti pravu p koja prolazi kroz tačku $M(2,2,-2)$ i seče prave
$$q:\ \frac{x+2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-2} \quad \text{i} \quad r:\left\{\begin{array}{l} y+3z-5=0 \\ x+2z-7=0 \end{array}\right. .$$

Zadatak. Prava
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{1}$$
se projektuje na ravan xOy iz tačke $P(5,5,2)$. Naći jednačinu projekcije.

Zadatak. Na pravoj
$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-5}=\frac{z+3}{-2}$$
naći tačku koja je podjednako udaljena od ravni

$$3x+3y-2=0 \quad \text{i} \quad 4x+y+z+4=0.$$

Zadatak. Kroz zajedničku tačku prave p:

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{3}=z-3$$

i ravni $\alpha: 4x-y-z-3=0$ postaviti pravu q paralelnu sa pravom l:

$$\left\{\begin{array}{ll} 4x-y-z+12 & =0 \\ y-z-2 & =0 \end{array}\right. .$$

Zadatak. Na pravoj
$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-5}=\frac{z+3}{-2}$$
naći tačku koja je podjednako udaljena od ravni

$$3x+3y-2=0 \quad \text{i} \quad 4x+y+z+4=0.$$

Zadatak. Napisati jednačinu ravni u kojoj se nalaze paralelne prave:

$$\frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2} \quad \text{i} \quad \frac{x}{7}=\frac{y}{4}=\frac{z}{2}.$$

Zadatak. Odrediti parametar m tako da se prave

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{m} \ \text{i}\ \frac{x-5}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$$

seku a zatim napisati jednačinu njihove zajedničke ravni i zajedničke normale kroz tačku preseka.