Inženjerska grafika geometrijskih oblika

(3. predavanje, 4. tema)

Prva godina studija Mašinskog fakulteta u Nišu

Predavač:

Dr Predrag Rajković

Površ. Pojektovanje površi pomoću softvera RHINOCEROS

Površ (Surface)

- **Ravanska površ** je podskup ravni ograničen neprekidnom zatvorenom krivom.
- **Opšta površ (Surface)** je podskup trodimenzionalnog prostora koji se može obostrano jednoznačno i neprekidno preslikati u neku ravansku površ .

Površ (Surface)

- **Površ može nastati popunjavanem dela prostora ograničenog krivom. Ova kriva je kontura površi (kružnica je kriva, a krug površ).**
- **Površ može biti skup graničnih tačaka tela (sfera je površ, a lopta je telo).**

CRTANJE POVRŠI

- Podmeni Surface (površ) omogućava crtanje projekcija površi.

PROSTA POVRŠ

Prosta površ je ograničeni skup tačaka u prostoru čije koordinate su zadate jednoznačnim, neprekidnim dvoparametarskim funkcijama oblika

$$\begin{cases} x = x(r,v) \\ y = y(r,v) \\ z = z(r,v) \end{cases}$$

$$(r,v) \in (a,b) \times (c,d)$$

Vektorska jednačina površi

$$\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}(u, v),$$

$$(u, v) \in (a, b) \times (c, d)$$

Prva projekcija površi

$$\vec{\mathrm{p}} \quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad \vec{\mathrm{p}}' \quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = 0 \end{cases}$$

Druga projekcija površi

$$\vec{\mathrm{p}} \quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad \vec{\mathrm{p}}'' \quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = 0 \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Treća projekcija površi

$$\vec{\mathrm{p}} \quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad \vec{\mathrm{p}}''' \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Eksplicitna jednačina površi

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D \subset R^2$$

Implicitna jednačina površi

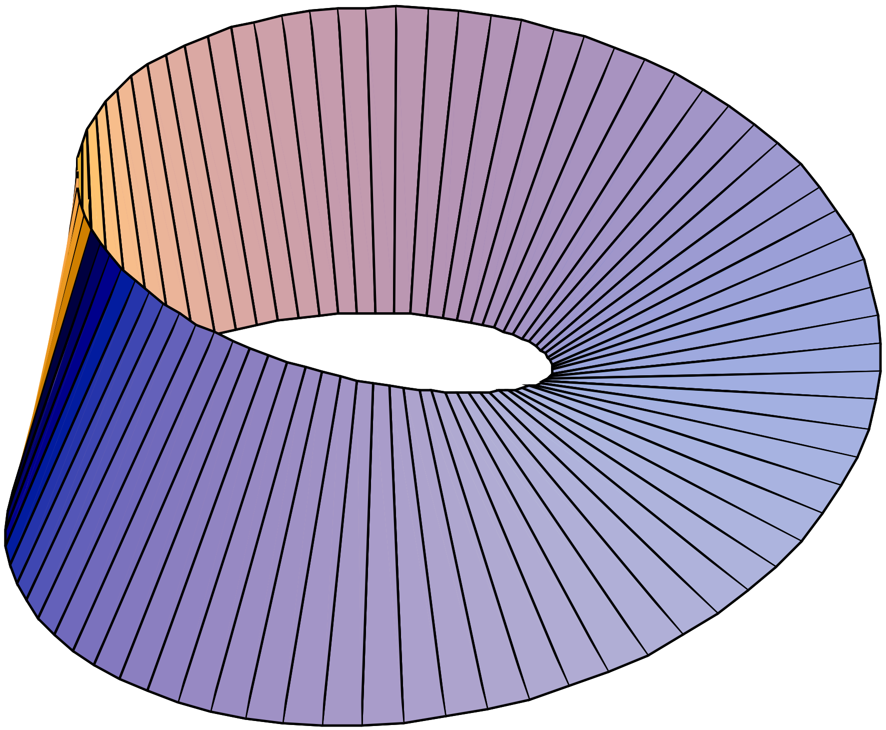
$$F(x, y, z) = 0, \qquad (x, y, z) \in D \subset R^3$$

Strana površi

Pozitivna strana površi (lice površi) je ona strana površi koja ostaje sa leve strane kada se po konturi površi krećemo u pozitivnom smeru (u smeru suprotnom od kazaljke na časovniku).

Pozitivna strana površi je ona strana koju odredjuje pozitivni smer normale površi (smer normale koji sa z-osom zaklapa oštar ugao)

Moebiusova traka-jednostrana površ



ALGEBARSKE POVRŠI

- **Algebarske površi su površi čije koordinate tačaka zadovoljavaju algebarsku jednačinu oblika**

$$\sum_{m} a_k x^{i_m} y^{j_m} z^{k_m} = 0$$

- **Algebarska površ je stepena n ako je**

$$n = \max_{m}(i_m, j_m, k_m)$$

ALGEBARSKE POVRŠI

- **Algebarske površi drugog stepena su**
- **Konus, cilindar, elipsoid, eliptički konus, eliptički cilindar, eliptički hiperboloid, eliptički paraboloid, hiperbolički cilindar, hiperbolički paraboloid, sfera**
- **Algebarske površi trećeg stepena su**

  Mebiusova traka, sedlasta površ, ...

Ravne površi

Ravne površi su one koje čije sve tačke leže u jednoj ravni (trougao, paralelogram, krug,...)
Ukoliko želimo ih nacrtati u nekoj ravni van projekcijskih ravni treba aktivirati
View>SetCPlane>3Points

Jedinična površina je mera za površinu jediničnog biti skup graničnih tačaka tela

(sfera je površ, a lopta je telo).

Paralelogram određen stranama

Paralelogram određen početnom tačkom i vektorima stranica

$$\vec{\mathrm{p}} = \vec{\mathrm{p}}_{00} + u \cdot \vec{r} + v \cdot \vec{s},$$

$$(u, v) \in (0,1) \times (0,1)$$

Paralelogram određen temenima

Ako treba nacrtati paralelogram čija su tri temena određena vektorima položaja

$$\vec{\mathrm{p}}_{00}, \quad \vec{\mathrm{p}}_{01}, \quad \vec{\mathrm{p}}_{10}$$

problem se svodi na prethodni slučaj izračunavanjem

$$\vec{r} = \vec{\mathrm{p}}_{10} - \vec{\mathrm{p}}_{00}, \quad \vec{s} = \vec{\mathrm{p}}_{01} - \vec{\mathrm{p}}_{00}$$

Površina ravne površi

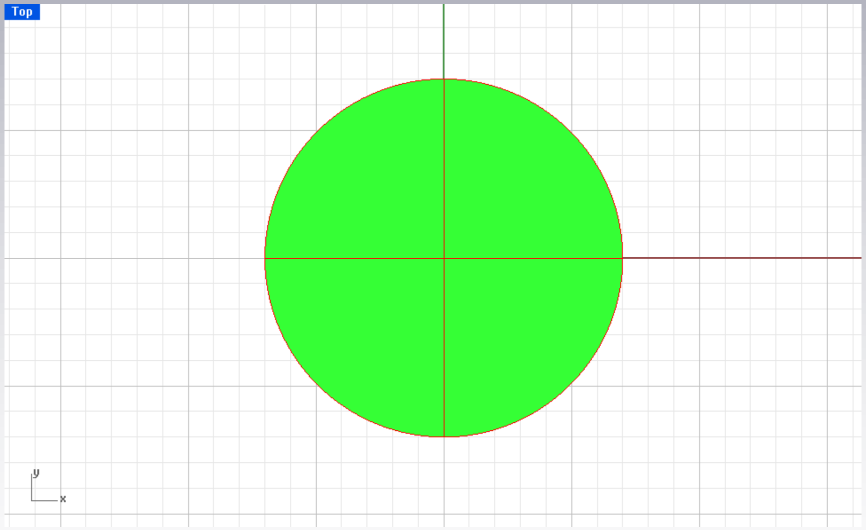
- **Kvadrat je četvorougao čije su sve stranice međusobno jednake i svi uglovi pravi.**
- **Jedinična površina je površina kvadrata sa jediničnom stranicom.**
- **Ako su gornji limes ukupne površine kvadrata upisanih u datu površ i donji limes ukupne površine kvadrata opisanih oko te površi jednaki, tada je taj broj površina ravne površi.**

Površina prostorne površi

- **Površina razložive prostorne površi je jednaka površini ravne površi nastale njenim razlaganjem .**
- **Ako su gornji limes površina razloživih kvadrata upisanih u datu površ i donji limes ukupne površine razloživih površina opisanih oko te površi jednaki, tada je taj broj površina nerazložive prostorne površi.**

Površ određena konturom

Površ čija je kontura data crta se
pomoću
Surface>From Planar Curves



Površ određena konturom

Kružnica

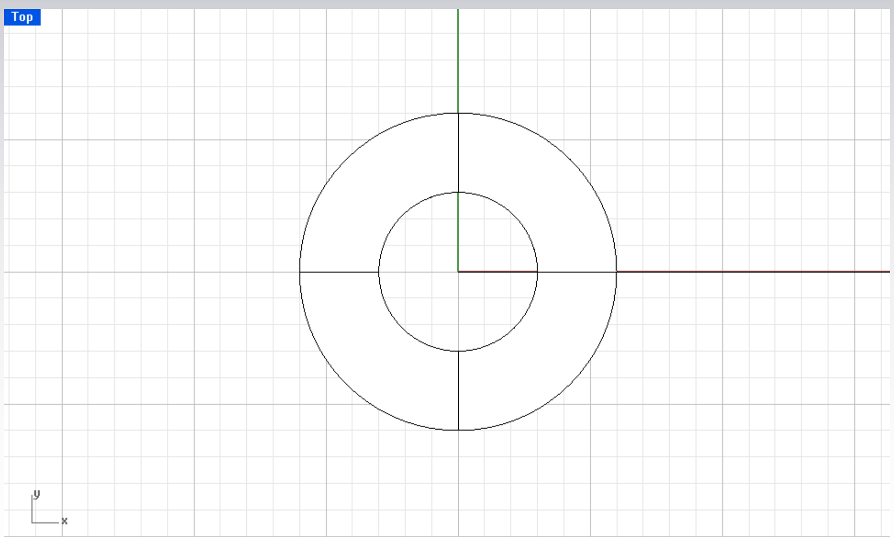
$$\vec{\mathbf{p}}(u) \quad \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{R}\cos \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{R}\sin \mathbf{u} \\ \mathbf{z} = 0 \end{cases}$$

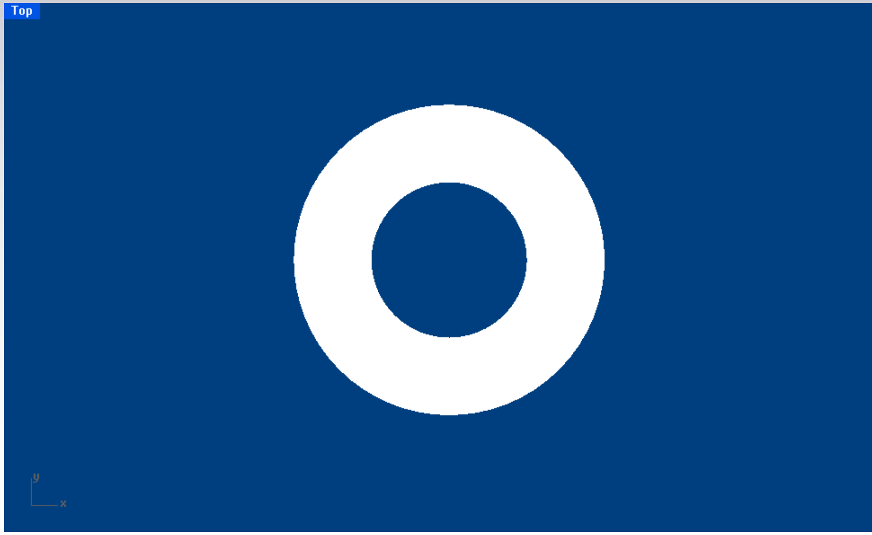
$$\mathbf{u} \in (0, 2\pi)$$

Krug

$$\vec{\mathbf{p}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \begin{cases} x = v \cdot \cos u \\ y = v \cdot \sin u \\ z = 0 \end{cases}$$

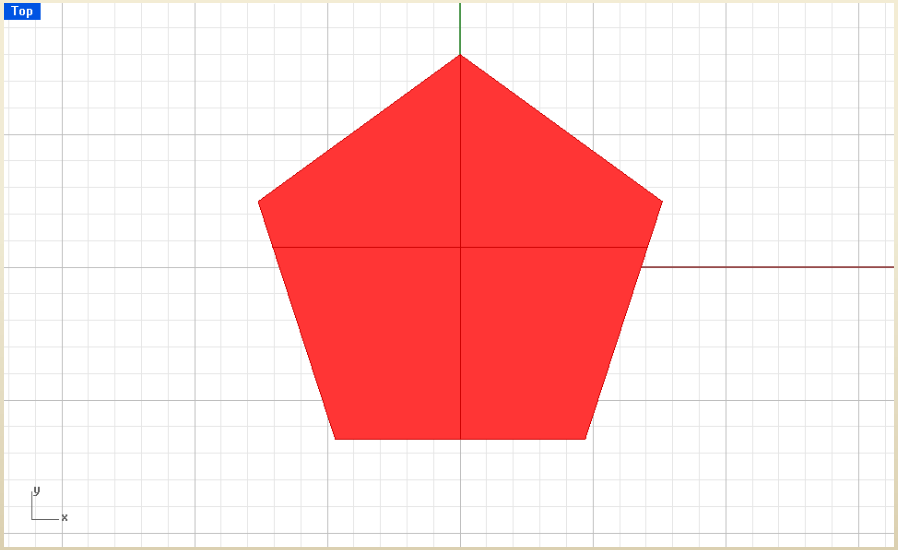
$$u \in (0, 2\pi),\ v \in (r, R)$$





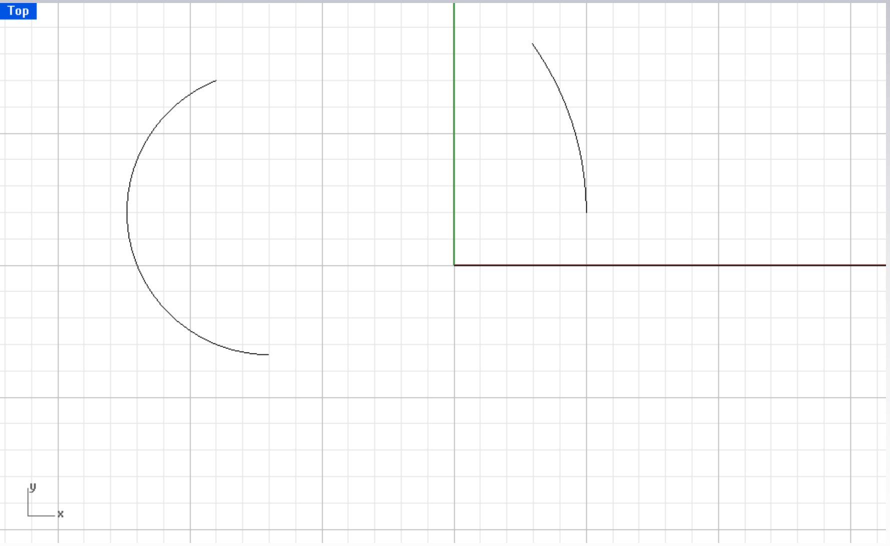
Pravilni poligon

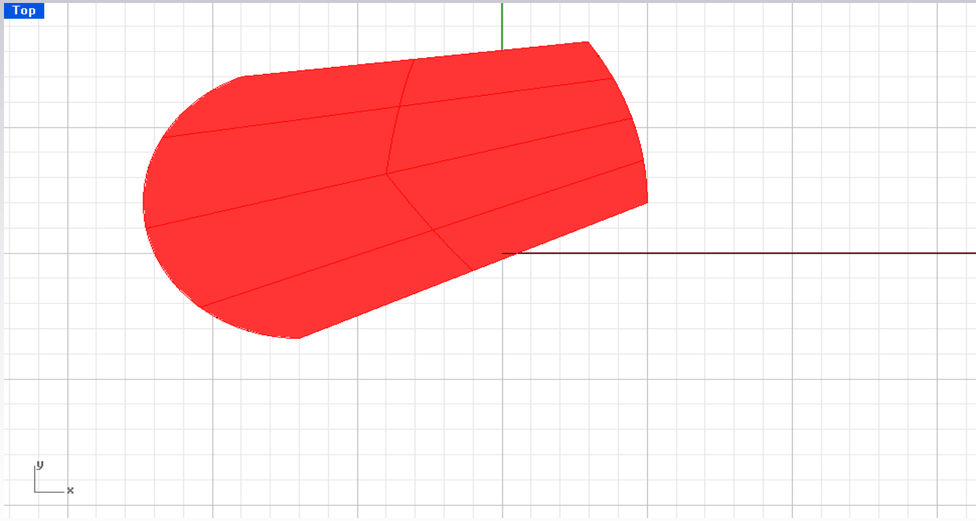
Pravlni poligon kao kriva se crta pomoću menija Curve>Polygon. Površ se dobija pomoću opcije Surface>From Planar Curves



Površ određena graničnim krivama

Površ koja je određena graničnim krivama crta se pomoću Surface>Edge Curves





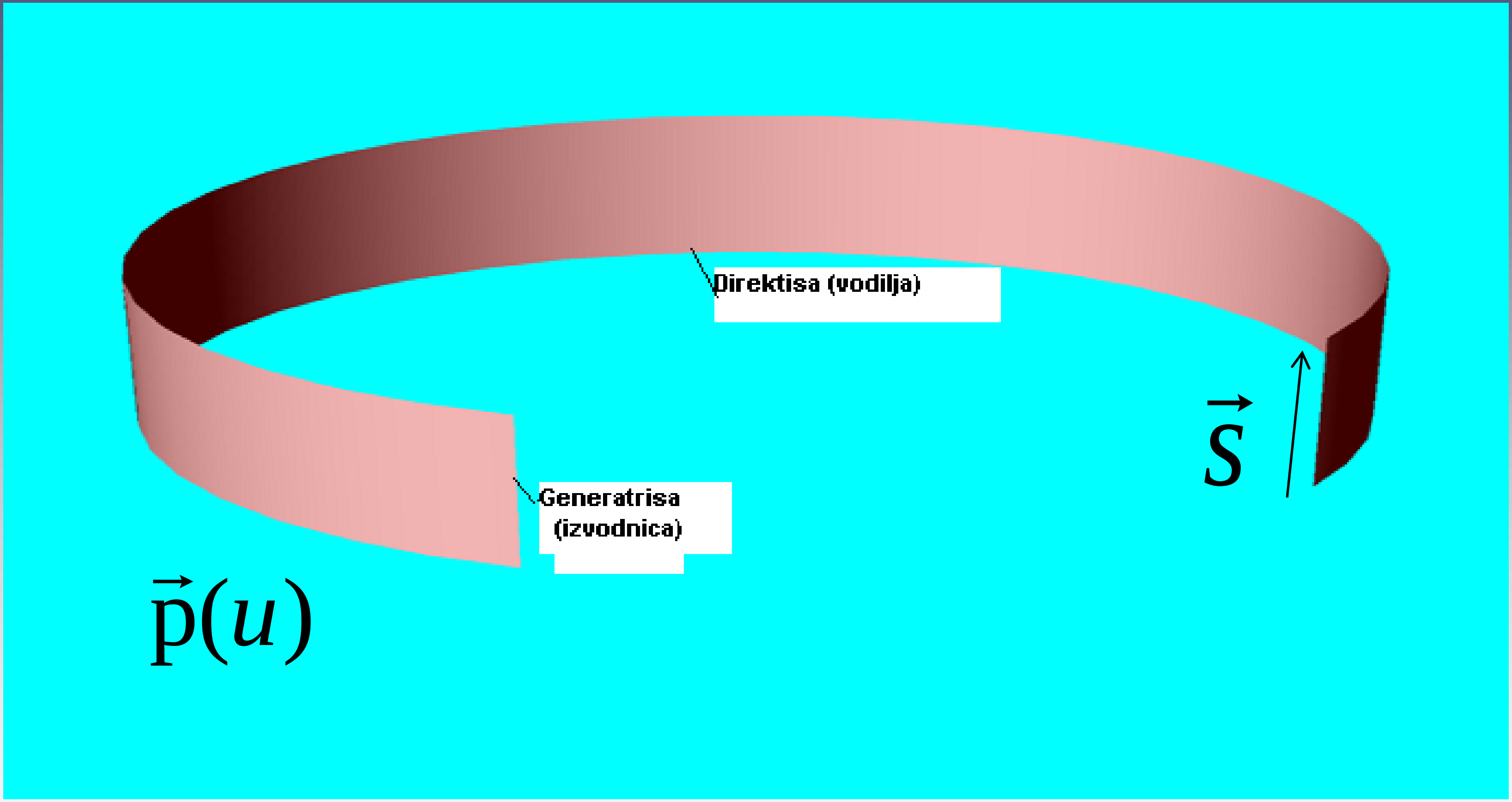
CILINDRIČNA POVRŠ

Cilindrična površ nastaje paralelnim pomeranjem tačaka date krive u smeru zadatog vektora.

Polazeći od date krive, može se nacrtati pomoću

Surface>Extrude >Straight

CILINDRIČNA POVRŠ



JEDNAČINA CILINDRIČNE POVRŠI

$$\vec{\mathrm{p}}(u,v)=\vec{\mathrm{p}}(u)+v\cdot\vec{s},$$

$$(u,v)\in(0,1)\times(0,1)$$

- **gde je p(u) - neka prostorna kriva,**
- **s - vektor pravca krive linije koja se pomera.**

KRUŽNI CILINDAR

Kružni cilindar nastaje paralelnim pomeranjem kruga.

$$\vec{\mathrm{p}}(u) \quad \begin{cases} x = R\cos u \\ y = R\sin u \\ z = 0 \end{cases}$$

$$u \in (0, 2\pi)$$

$$\vec{\mathrm{p}}(u, v) \quad \begin{cases} x = R\cos u \\ y = R\sin u \\ z = v \end{cases}$$

$$u \in (0, 2\pi) \quad v \in (0, b)$$

PRIZMATIČNA POVRŠ

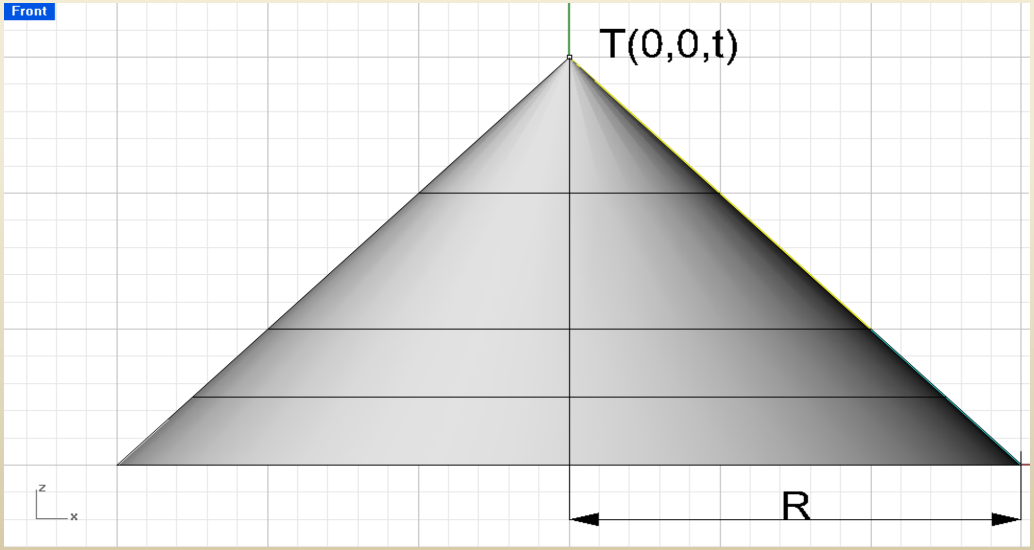
Prizmatična površ nastaje paralelnim pomeranjem tačaka datog mnogougla u smeru zadatog vektora.

Polazeći od nacrtanog poligona, može se nacrtati pomoću

Surface>Extrude >Straight

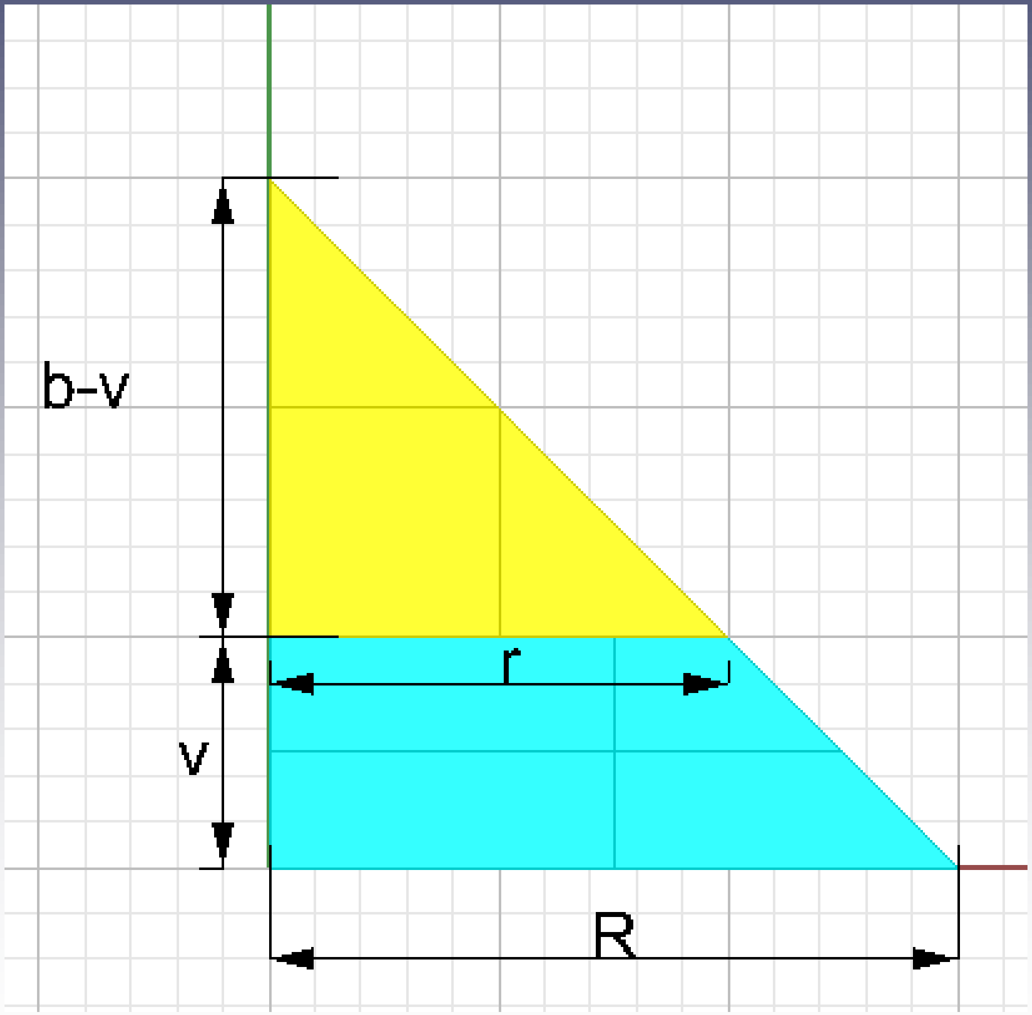
KONUSNA POVRŠ

Konusna površ nastaje spajanjem tačaka date kružnice sa datim vrhom.
Može se nacrtati pomoću Surface>Extrude >To Point



KONUSNA POVRŠ

$$\frac{r}{R} \equiv \frac{b-v}{b}$$



KONUSNA POVRŠ

$$\begin{cases} x = R\cos u \\ y = R\sin u \\ z = 0 \end{cases}$$

$$u \in (0,2\pi)$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{b-v}{b} R\cos u \\ y = \dfrac{b-v}{b} R\sin u \\ z = v \end{cases}$$

$$u \in (0,2\pi),\, v \in (0,b)$$

PIRAMIDALNA POVRŠ

Piramidalna površ nastaje spajanjem tačaka datog poligona sa jednom istom tačkom u prostoru.

Polazeći od datog poligona, može se nacrtati pomoću

Surface>Extrude >To Point

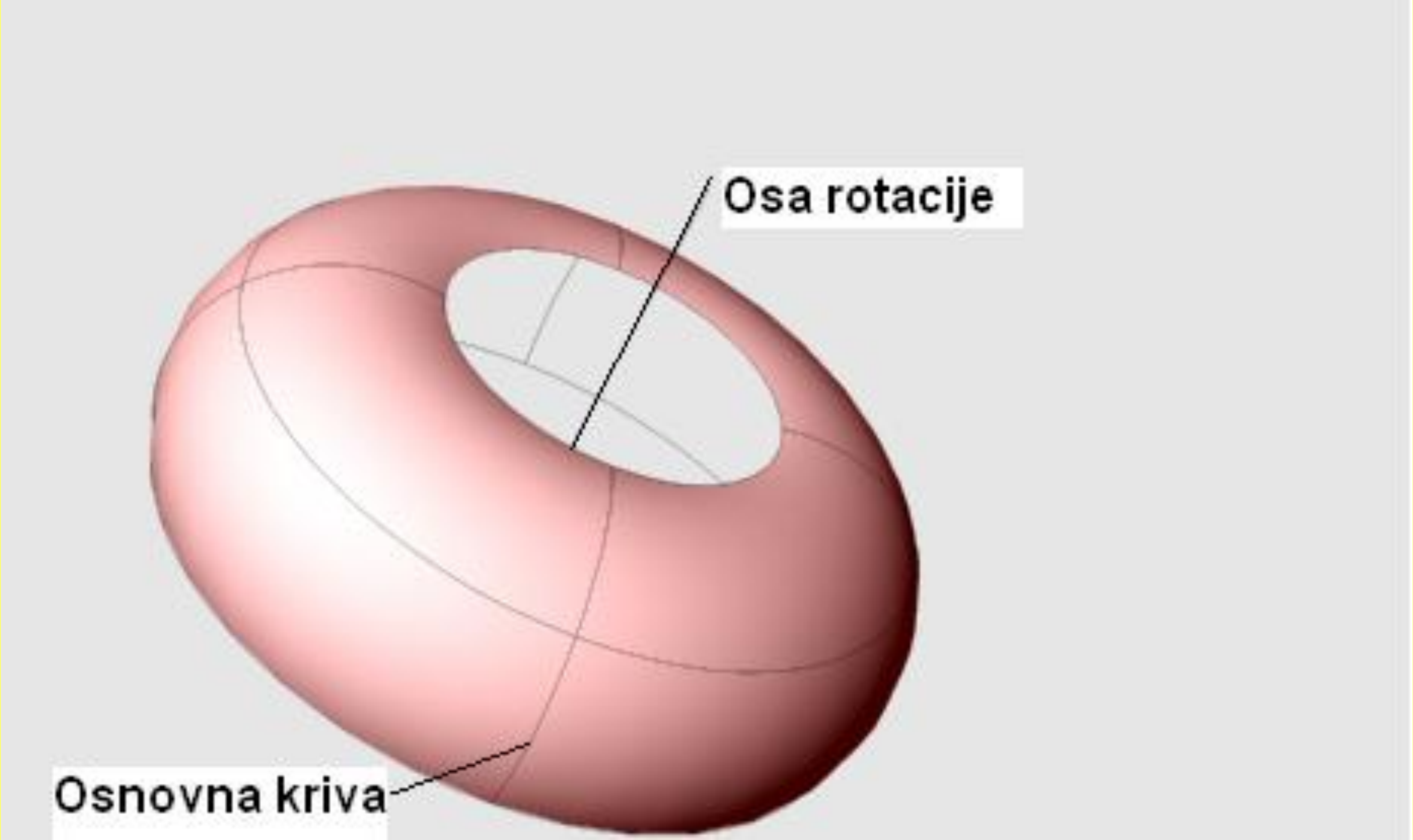
OBRTNA POVRŠ (REVOLVE SURFACES)

Obrtna površ nastaje rotacijom krive oko date ose

Primer 1. Obrtna površ nastala rotacijom krive u Oxz ravni oko z-ose

$$\vec{\mathrm{p}}(u) \quad \begin{cases} x = x(u) \\ y = 0 \\ z = z(u) \end{cases} \qquad \vec{\mathrm{p}}(u,v) \quad \begin{cases} x = x(u)\cos v \\ y = x(u)\sin v \\ z = z(u) \end{cases}$$

OBRTNA POVRŠ (REVOLVE SURFACES



KONUS (CONE)

Konusna površ nastaje rotacijom prave oko ose sa kojom ima jednu zajedničku tačku

Primer 1. Konus nastao rotacijom simetrale Oxz ravni oko z-ose

$$\vec{\mathbf{p}}(\boldsymbol{u}) \begin{cases} x = au \\ y = 0 \\ z = bu \end{cases} \qquad \vec{\mathbf{p}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \begin{cases} x = au\cos v \\ y = au\sin v \\ z = bu \end{cases}$$

SFERA (SPHERE)

Sfera nastaje rotacijom kruga oko jednog njegovog prečnika

Primer 1. Obrtna površ nastala rotacijom krive u Oxz ravni oko z-ose

Primer 1. Sfera kao obrtna površ nastala rotacijom kružnice koja leži u Oxz ravni oko z-ose

$$\vec{\mathrm{p}}(u)\begin{cases} x = R\cos u \\ y = 0 \\ z = R\sin u \end{cases} \qquad \vec{\mathrm{p}}(u,v)\begin{cases} x = R\cos u\cos v \\ y = R\cos u\sin v \\ z = R\sin u \end{cases}$$

TORUS

Torus nastaje rotacijom kruga oko ose koja leži izvan njega u istoj ravni

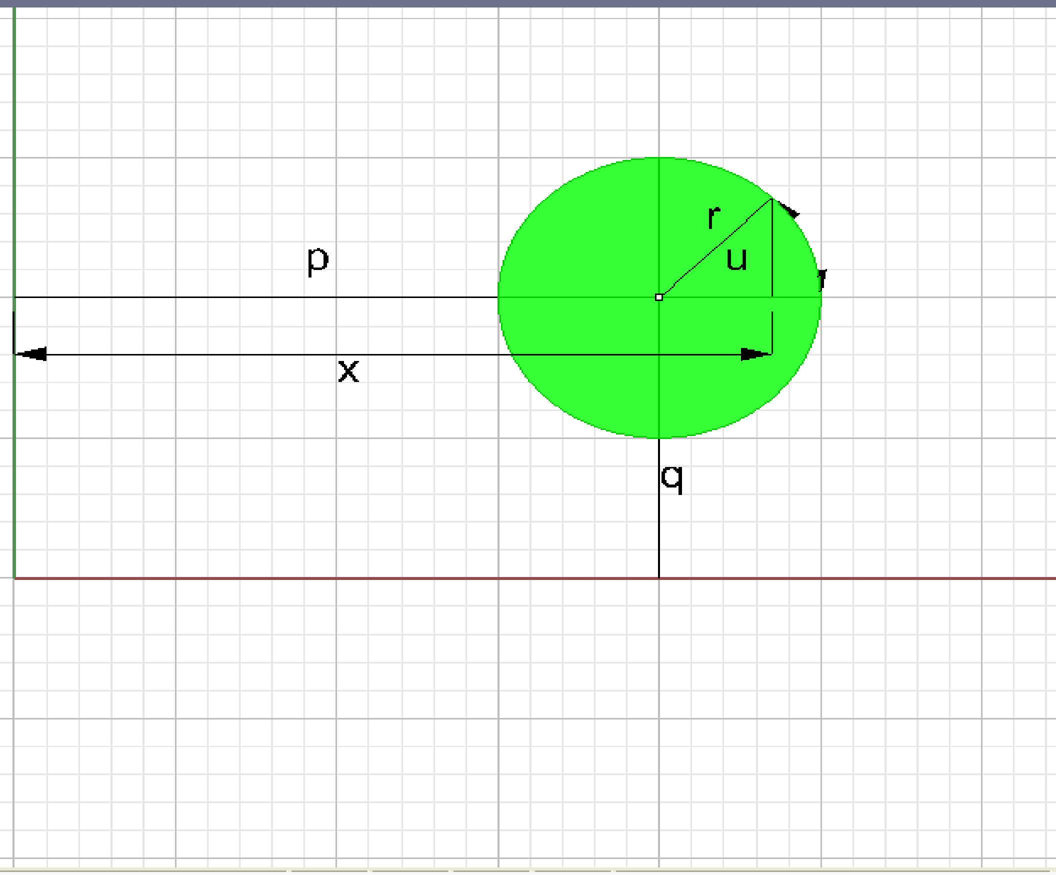
Primer 1. Torus nastao rotacijom kružnice u Oxz ravni sa centrom C(p,q) i poluprečnikom *r* oko *z*-ose

$$\vec{\mathbf{p}}(u) \begin{cases} x = p + r\cos u \\ y = 0 \\ z = q + r\sin u \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{p}}(u,v) \begin{cases} x = (p + r\cos u)\cos v \\ y = (p + r\cos u)\sin v \\ z = q + r\sin u \end{cases}$$

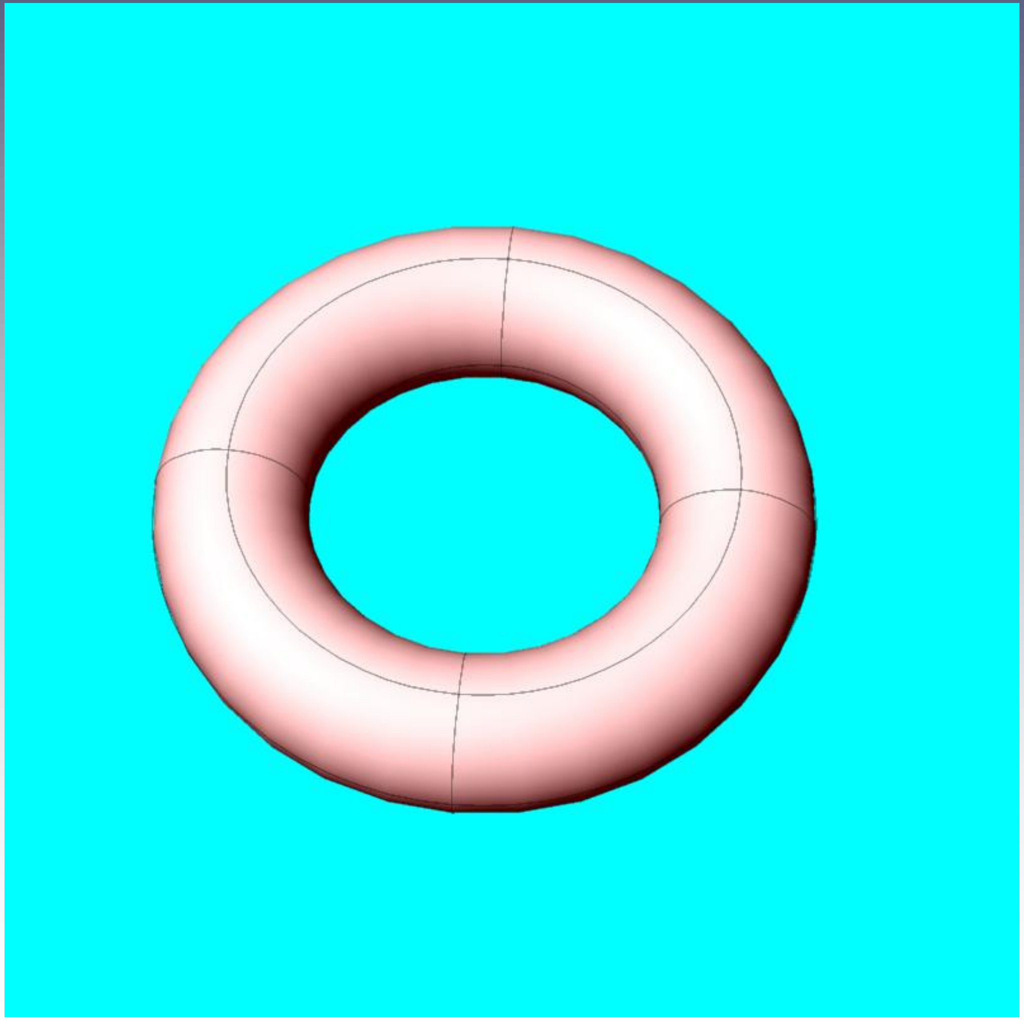
TORUS

$$\begin{cases} x = p + r\cos u \\ y = 0 \\ z = q + r\sin u \end{cases}$$



Torus

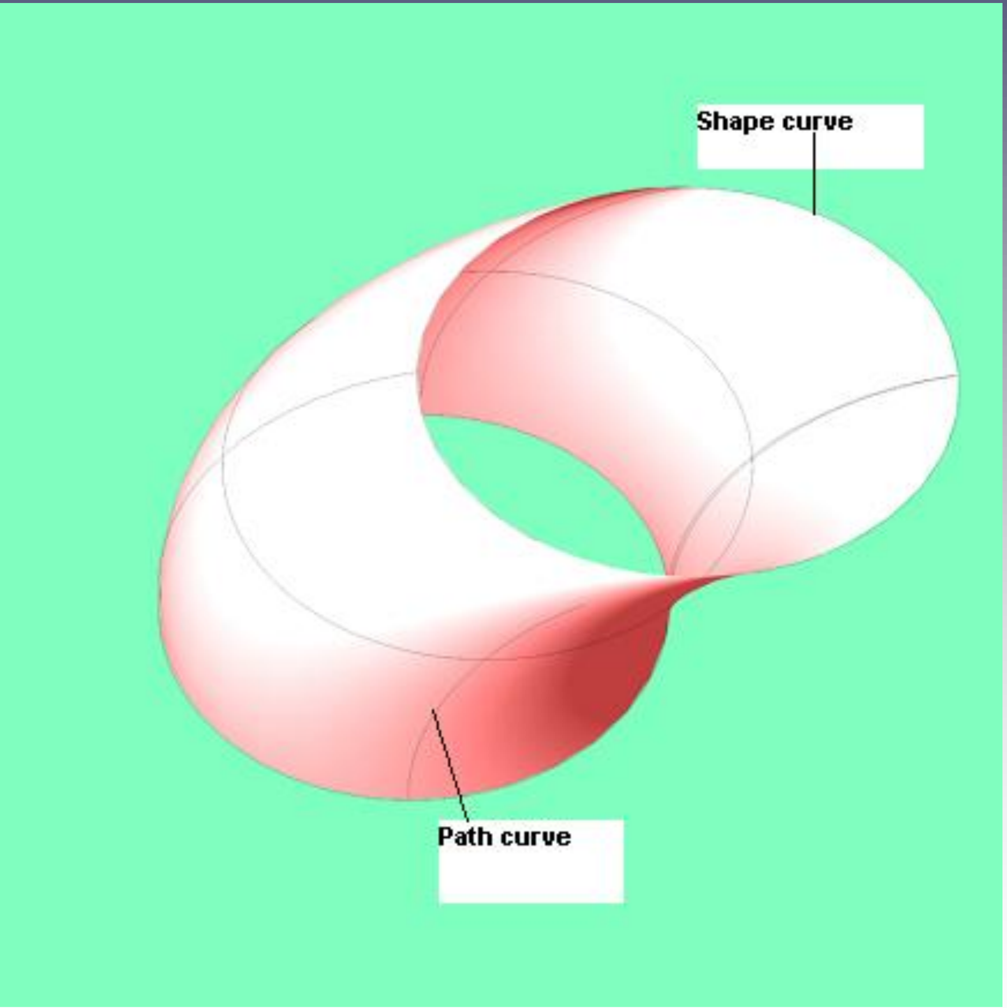
$$\begin{cases} x &= (p + r\cos u)\cos v \\ y &= (p + r\cos u)\sin v \\ z &= q + r\sin u \end{cases}$$



Površ nastala izvlačenjem osnovne krive duž izvodnice

Površ nastala izvlačenjem
osnovne krive
(shape curve, direktrisa)
duž krive izvodnice
(path curve, generatrisa, putanja)
dobija se pomoću
Surface > Extrude > Along Curve

Surface > Extrude > Along Curve



MREŽA KOORDINATNIH LINIJA NA POVRŠI (GREED)

Koordinatne u-linije date su jednačinama

$$\vec{\mathrm{p}} = \vec{\mathrm{p}}(u, v_0), \quad u \in (a, b)$$

Koordinatne v-linje su

$$\vec{\mathrm{p}} = \vec{\mathrm{p}}(u_0, v), \quad v \in (c, d)$$

KOORDINATNE LINIJE NA CILINDRU

$v - linije \quad (prave)$

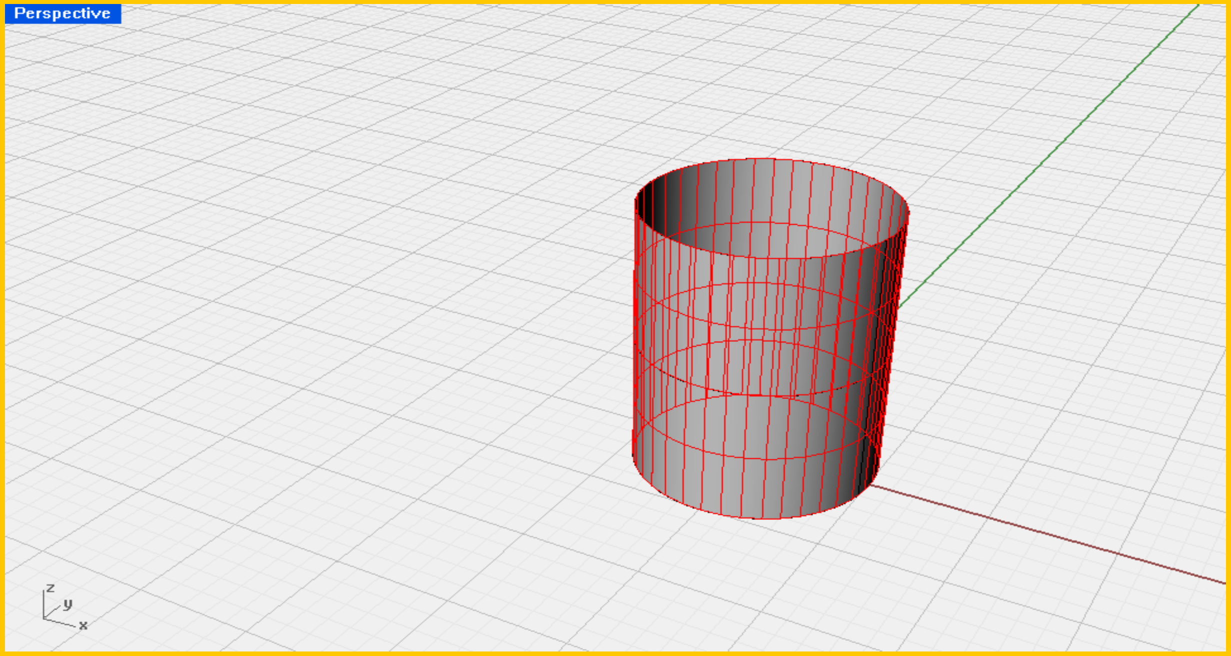
$$\begin{cases} x = R\cos u_0 \\ y = R\sin u_0 \\ z = v \end{cases}$$

$v \in (0, b)$

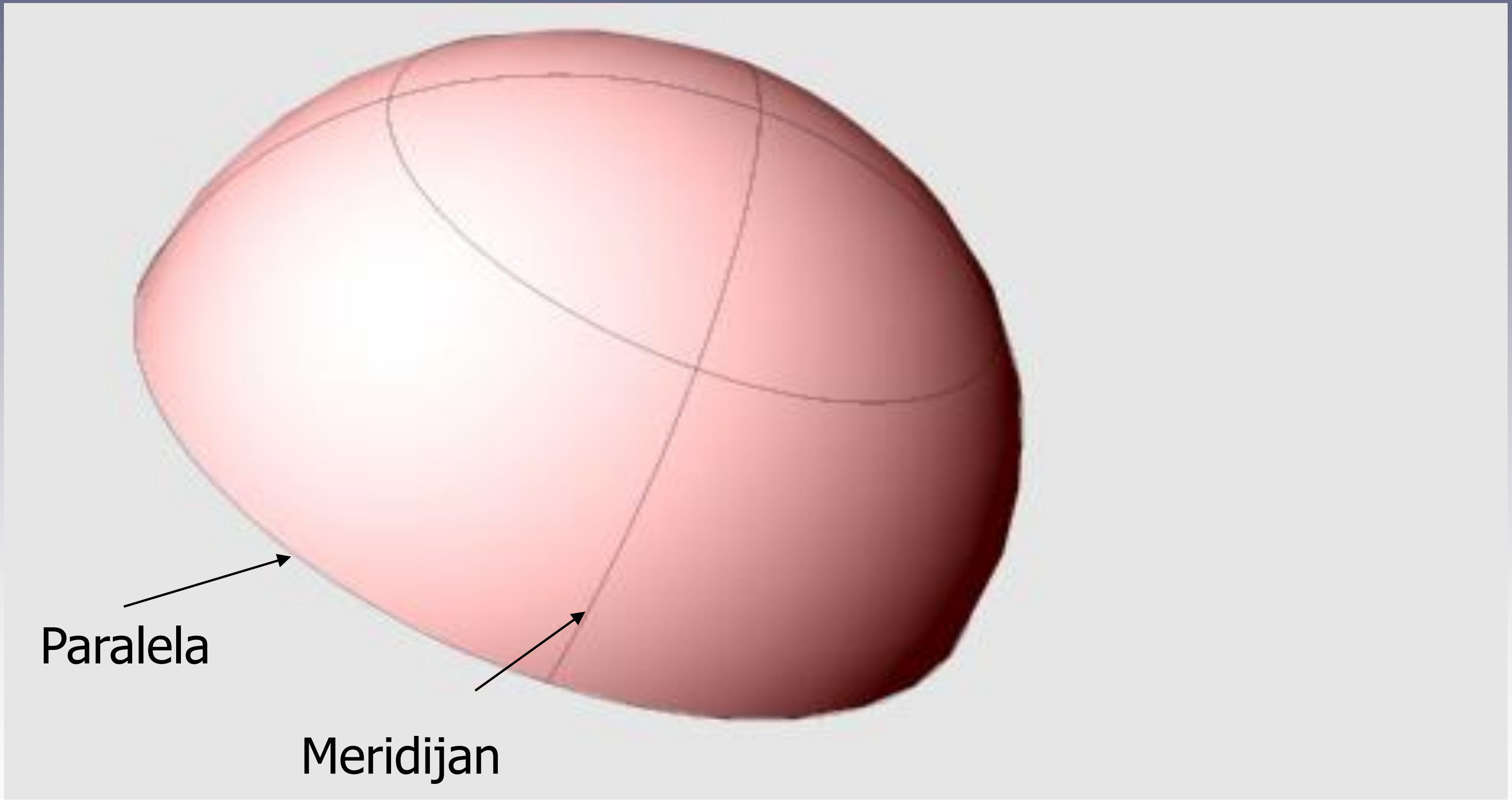
$u - linije\,(kruznice)$

$$\begin{cases} x = R\cos u \\ y = R\sin u \\ z = v_0 \end{cases}$$

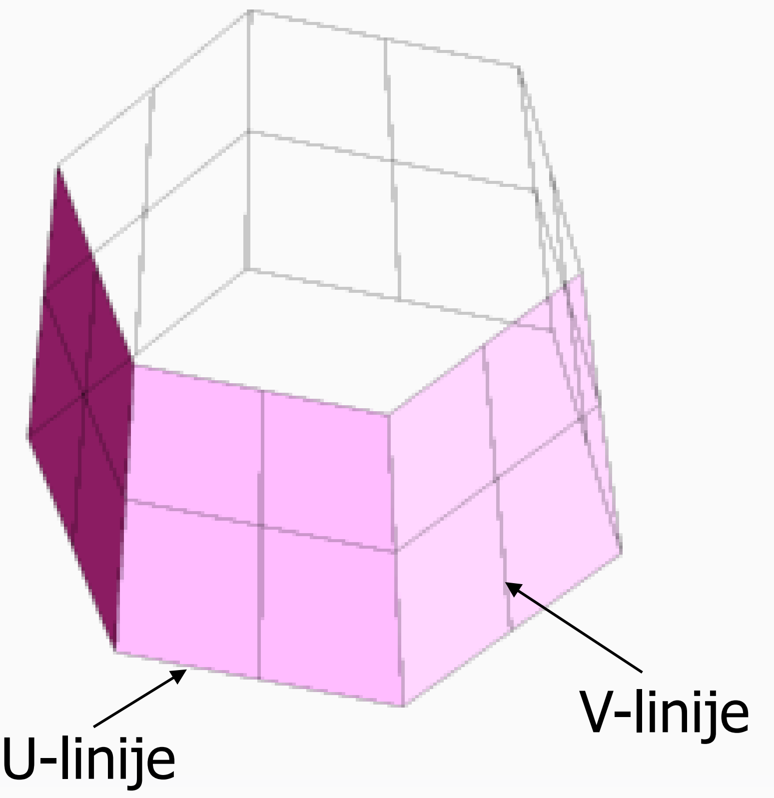
$u \in (0, 2\pi)$



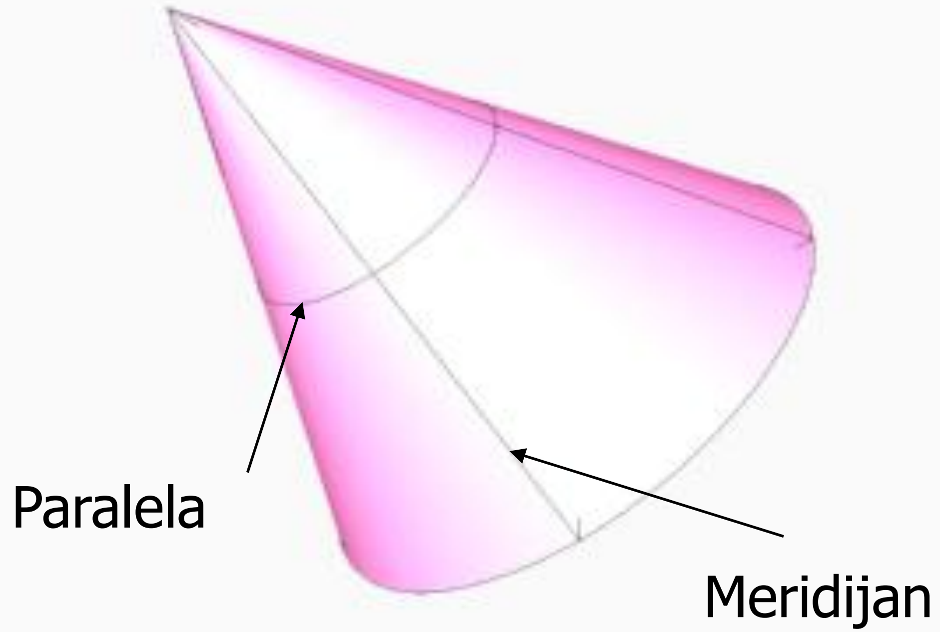
MREŽA KOORDINATNIH LINIJA NA POVRŠI (GREED)



MREŽA KOORDINATNIH LINIJA NA POVRŠI (GREED)



MREŽA KOORDINATNIH LINIJA NA POVRŠI (GREED)



TANGENTE KOORDINATNIH LINIJA

Tangenta u-linije

$$\vec{\mathrm{p}}_u = \frac{d\,\vec{\mathrm{p}}}{du}(u_0, v_0),$$

Tangenta v-linije

$$\vec{\mathrm{p}}_v = \frac{d\,\vec{\mathrm{p}}}{dv}(u_0, v_0),$$

NORMALA POVRŠI I TANGENTNA RAVAN

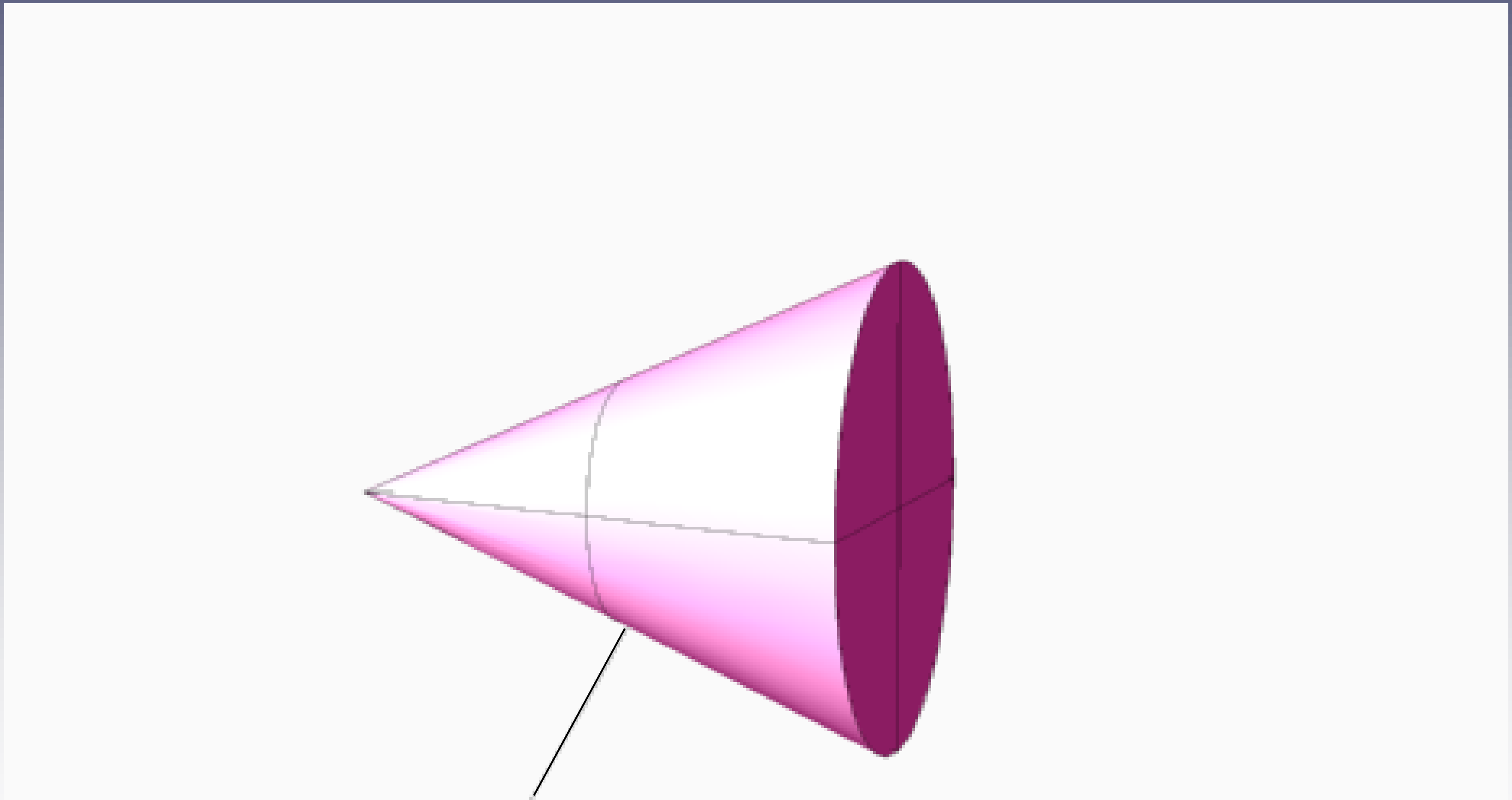
Vektor normale

$$\vec{n} = \frac{d\,\vec{\mathbf{p}}}{du} \times \frac{d\,\vec{\mathbf{p}}}{dv},$$

Tangentna ravan

$$\vec{n} \circ (\vec{p} - \vec{p}_0) = 0$$

Normala površi



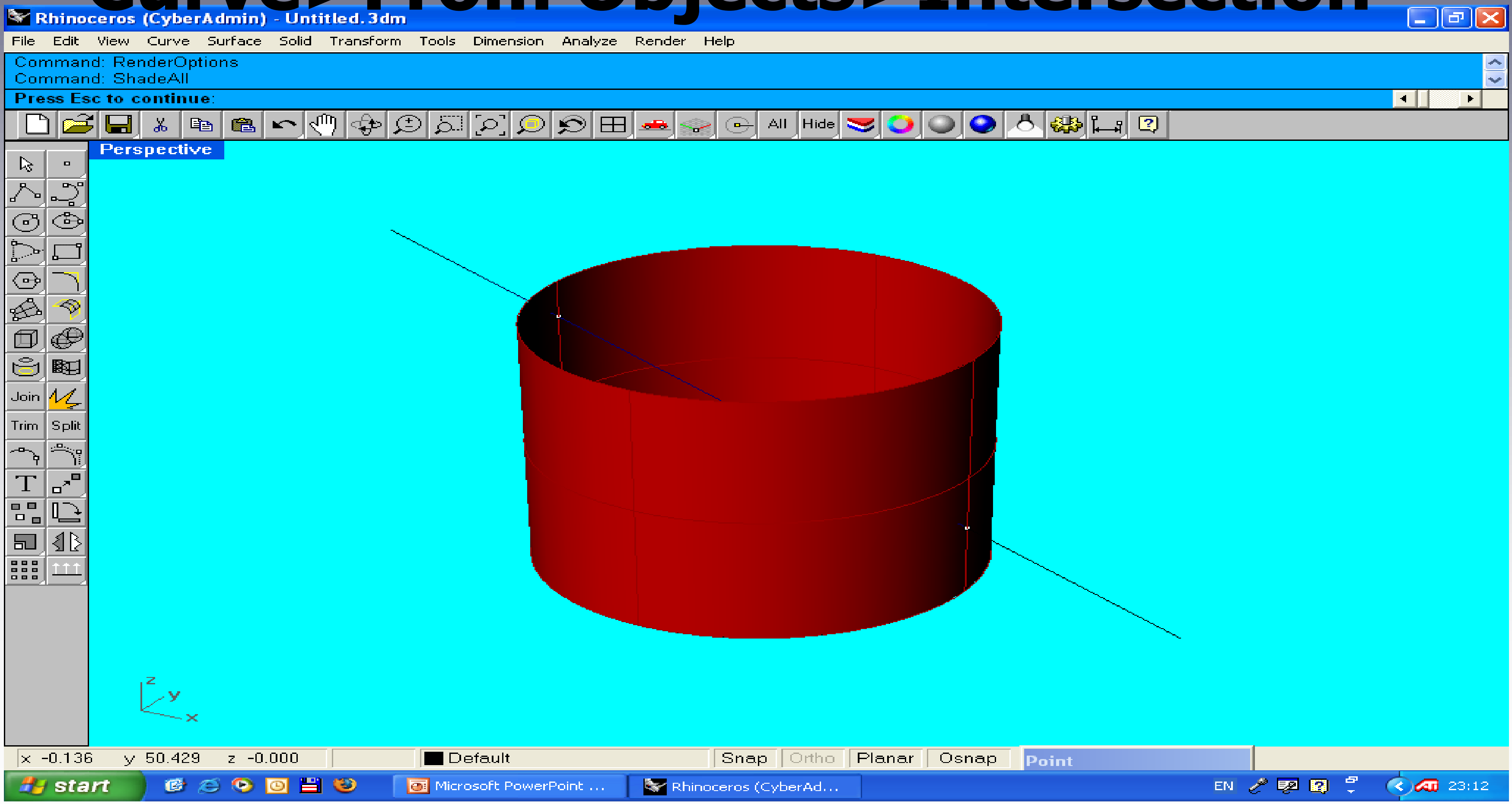
PRESECI KRIVIH I POVRŠI

Presečna kriva dveju površi i tačke prodora krive kroz površ dobijaju se pomoću opcije

Curve>From Objects>Intersection

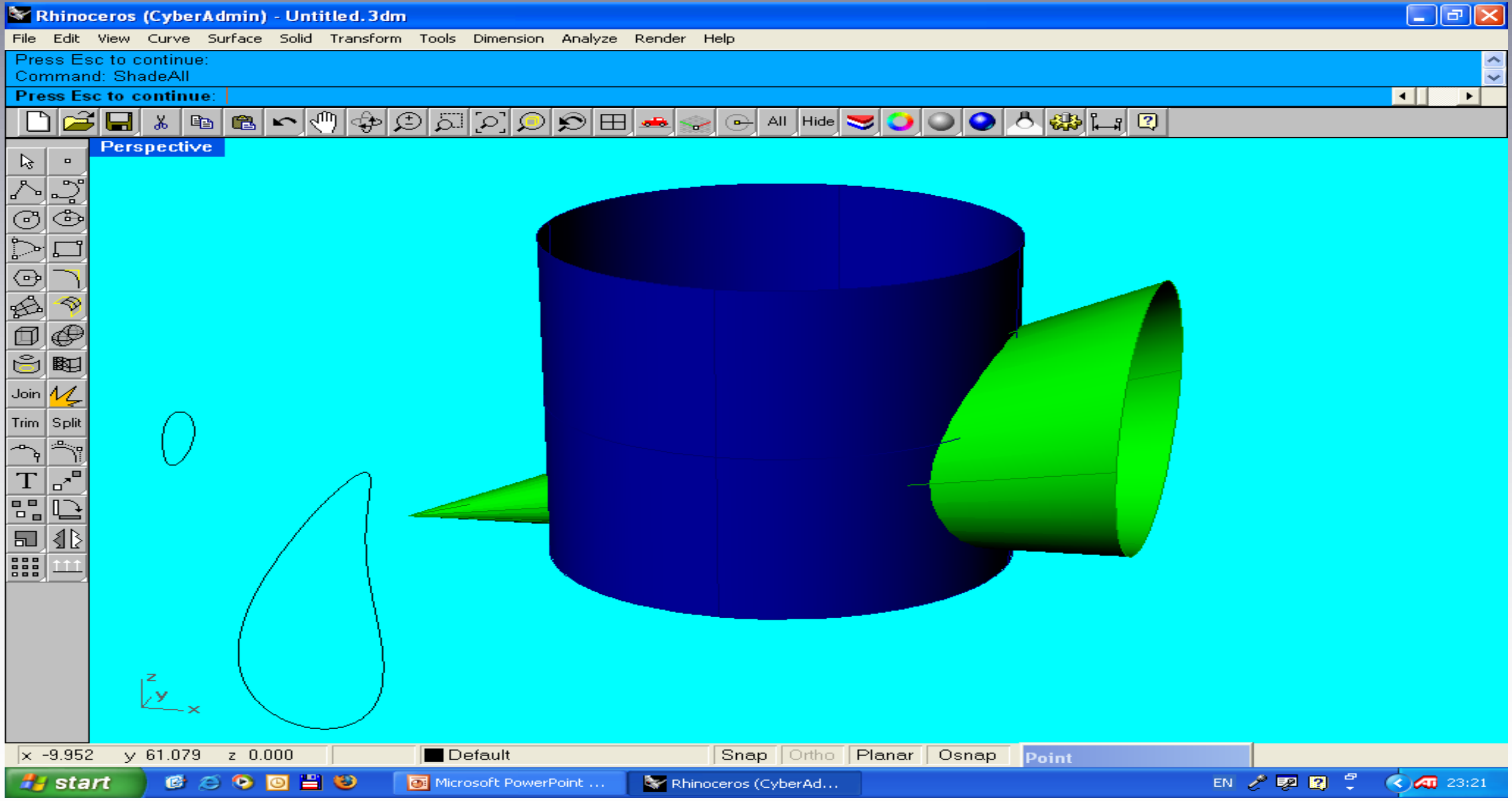
PRESEK KRIVE I POVRŠI

Curve>From Objects>Intersection



PRESEČNA KRIVA DVEJU POVRŠI

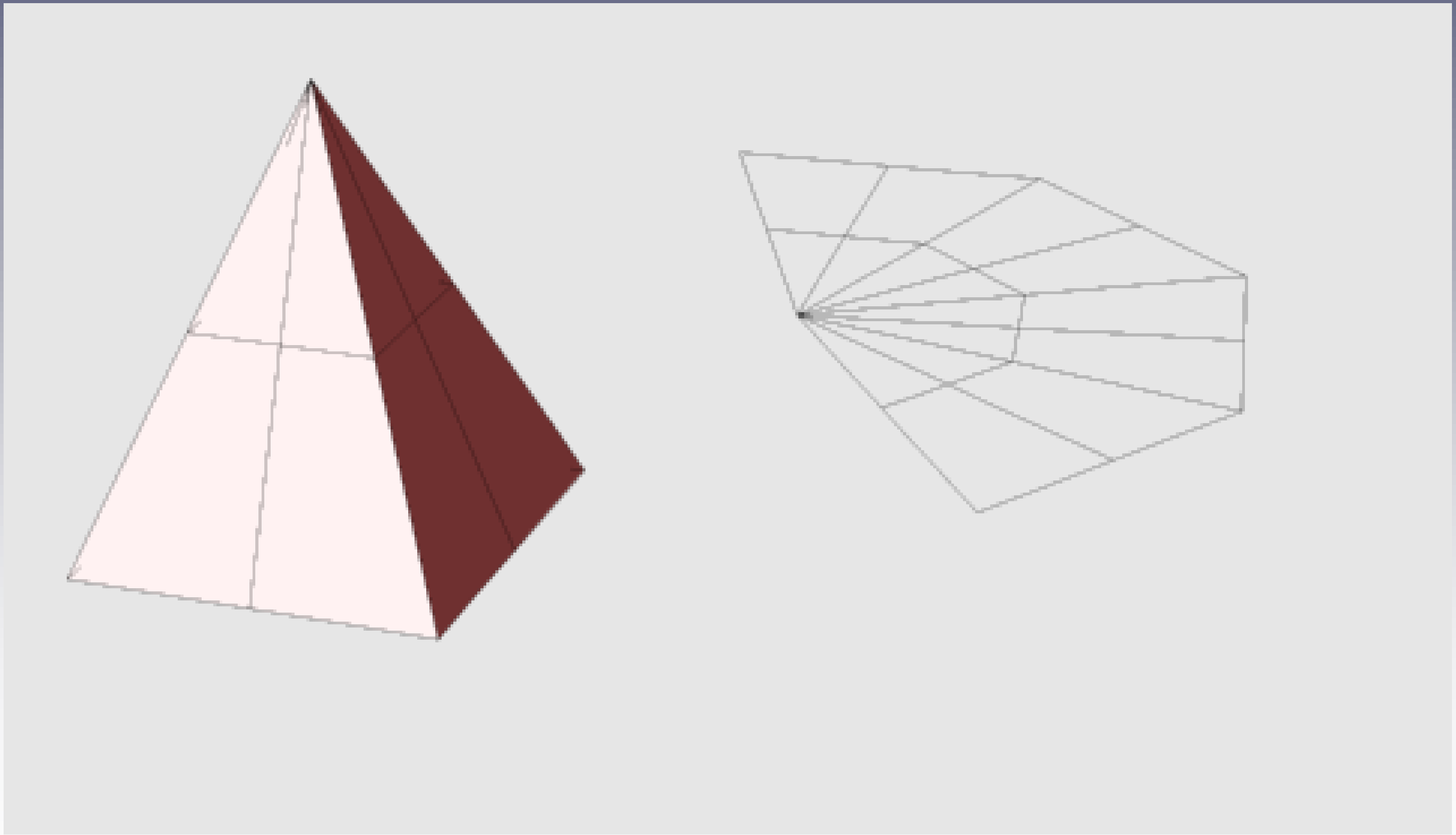
Curve>From Objects>Intersection



MREŽA POVRŠI (UNROLL SURFACE)

Mreža date površi je površ u ravni nastala razvijanjem prostorne površi.
Razloživa površ je ona čija se mreža može prikazati u jednoj ravni.
Postoje i nerazložive površi.
Površi koje imaju dvostruku krivinu nisu razložive (sfera, torus).

MREŽA POVRŠI (UNROLL SURFACE)



MREŽA POVRŠI (UNROLL SURFACE)