

## 3.1. УОПШТЕ О ЗУПЧАНИЦИМА

### 3.1.1. Увод

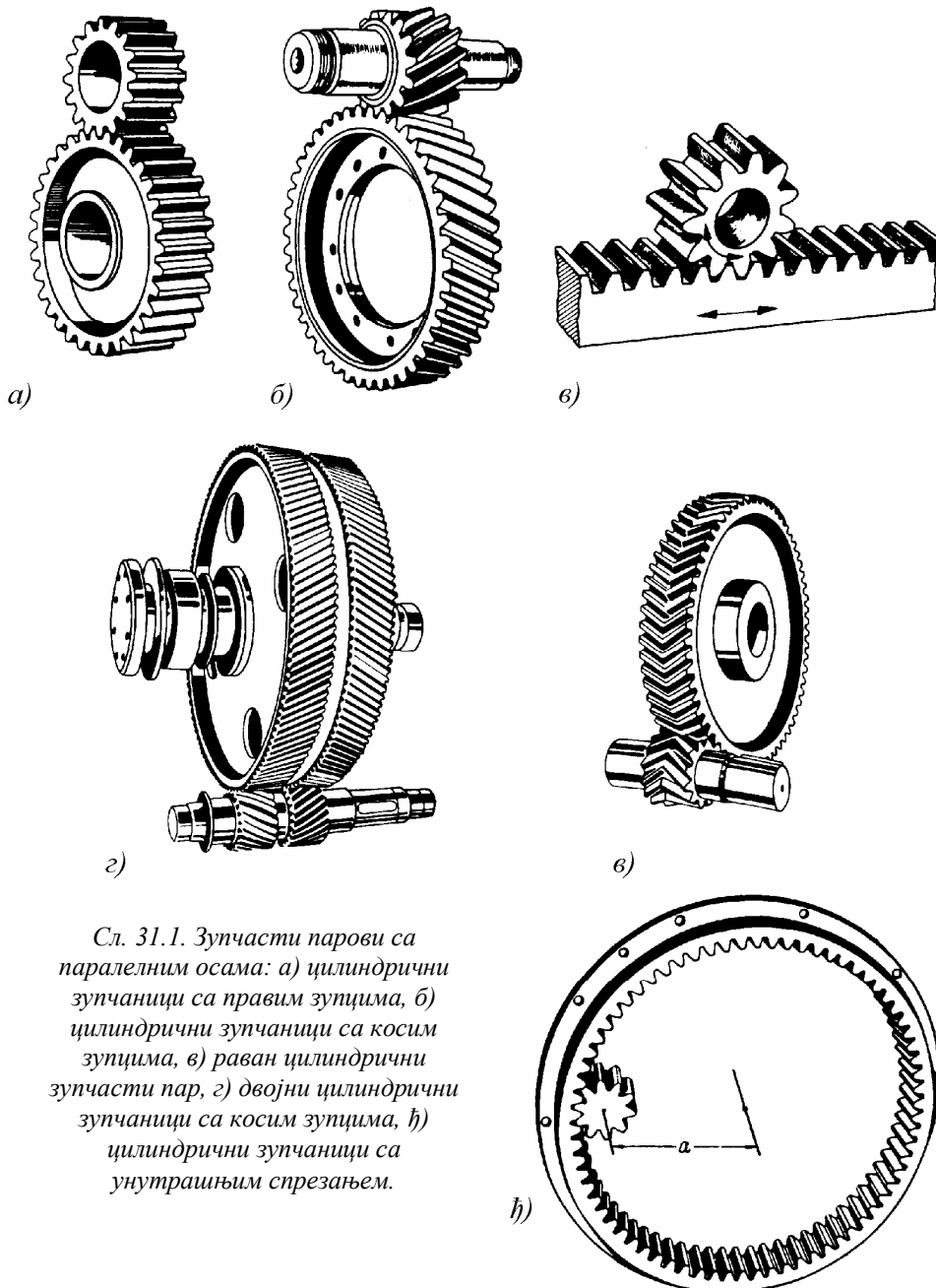
Зупчасти преносници су механички преносници помоћу којих се кретање, односно обртни момент преноси са једног вратила на друго и трансформише непосредним додиривањем зубаца.

Према облику зубаца, зупчанице могу бити са правим зупцима (правозуби), са косим зупцима (косозуби), са стреластим зупцима, са кривим зупцима и сл. Узимајући у обзир и једну и другу поделу и друге специфичности у примени су:

1. цилиндрични зупчанице са правим зупцима (сл. 31.1,*а*)
2. цилиндрични зупчанице са косим (хеликоидним) зубцима (сл. 31.1,*б*)
3. равни цилиндрични зупчасти парови (сл. 31.1,*в*)
4. двојни зупчанице са косим зупцима (сл. 31.1,*з*)
5. цилиндрични зупчанице са стреластим зупцима (сл. 31.1,*д*)
6. цилиндрични зупчанице са унутрашњим спрезањем (сл. 31.1,*ђ*)
7. конусни зупчанице са правим зупцима (сл. 31.2,*а*)
8. конусни зупчанице са косим зупцима (сл. 31.2,*б*)
9. конусни зупчанице са кривим зупцима (сл. 31.2,*в*)
10. хипоидни зупчанице (сл. 31.3,*а*)
11. хиперболоидни еволвентни зупчанице (сл. 31.3,*б*)
12. пужни зупчасти парови са цилиндричним пужем (сл. 31.3,*в*)
13. пужни зупчасти парови са глобоидним пужем (сл. 31.3,*з*)

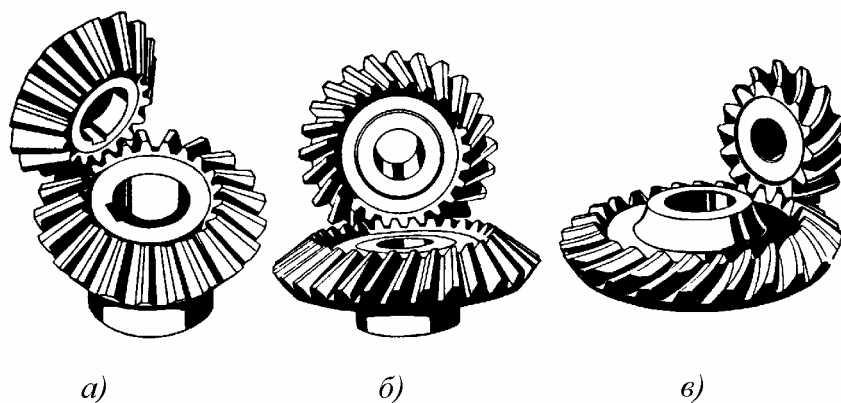
Према положају оса обртања спрегнутих зупчаника сви зупчасти парови могу се разврстати на:

- ◆ зупчасте парове са паралелним осама - цилиндрични зупчасти парови (сл. 31.1),
- ◆ зупчасте парове чије се осе обртања секу - конусни зупчасти парови (сл. 31.2),
- ◆ зупчасте парове са укрштеним осама (сл. 31.3).

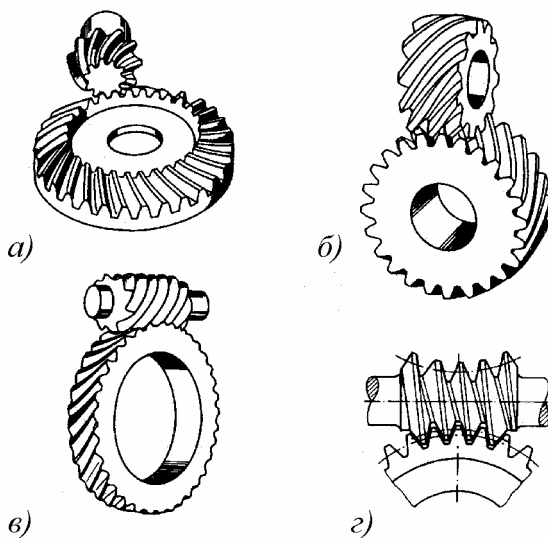


Сл. 31.1. Зупчasti парови са паралелним осамa: а) цилиндрични зупчаници са правим зупцима, б) цилиндрични зупчаници са косим зупцима, в) раван цилиндрични зупчasti пар, г) двојни цилиндрични зупчаници са косим зупцима, д) цилиндрични зупчаници са унутрашњим спрезањем.

Различитим повезивањем зупчастих парова, најчешће у низу, ређе паралелно образују се зупчasti преносници. То су најчешће коришћени преносници снаге који могу да се примене за све могуће положаје улазног и излазног вратила, као и за врло широки дијапазон снага, бројева обртаја и преносног односа.



Сл. 31.2. Зупчasti парови чије се осе обртања секу  
 а) конусни зупчаници са правим зупцима,  
 б) конусни зупчаници са косим зупцима,  
 в) конусни зупчаници са кривим зупцима



Сл. 31.3. Зупчasti парови са укрштеним осама; а) хипоидни зупчаници  
 б) хиперболоидни еволвентни зупчаници, в) пужни зупчasti пар са  
 цилиндричним пужем, г) пужни зупчasti пар са глобоидним пужем.

Предности зупчastих преносника су једноставно извођење, тачан кинематски преносни однос, мале димензије, високи степен искоришћења (изузимајући пужне преноснике).

Недостаци зупчastих преносника су велика крутост у преношењу снаге, вибрације и бука у току рада. Због тога захтевају еластичну спојницу на улазу или погон преко каишног преноса.

### 3.1.2. Основни појмови и дефиниције

**Зупчаник** је машински део који чини тело зупчаника и озубљени венац. Венац зупчаника састоји се од зубаца и међузубља, а ограничен је теменом и подножном површином (сл. 31.4) односно чеоним површинама у аксијалном правцу. Зупци и међузубља ограничени су бочним површинама - десном и левом. Линија пресека бочне површине зупца са равни која је управна на осу обртања зупчаника представља профил зупца.

**Корак профила зупца** је лучно растојање између суседних истоимених бокова. Величина корака зависи од величине кружнице на којој се врши мерење (сл. 31.4), те је овај појам увек повезан са одговарајућом кружницом. Корак је једнак збиру лучне дебљине зупца и лучне ширине међузубља.

Подеона раван односно подеони цилиндар дели зупце на темени део (глава зупца) и на подножни део (нога зупца). Пресецањем теменог, подеоног, подножног и других цилиндара чеоним равни добија се темена, подеона односно подножна кружница. Ако се обим подеоне кружнице пречника  $d$  изједначи са обимом који се добија као производ корака на подеоној кружници  $p$  и броја зубаца зупчаника  $z$  следи:

$$O = p \cdot z = d \cdot \pi \quad (31.1)$$

односно пречник подеоне кружнице је:

$$d = \frac{p}{\pi} \cdot z = m \cdot z \quad (31.2)$$

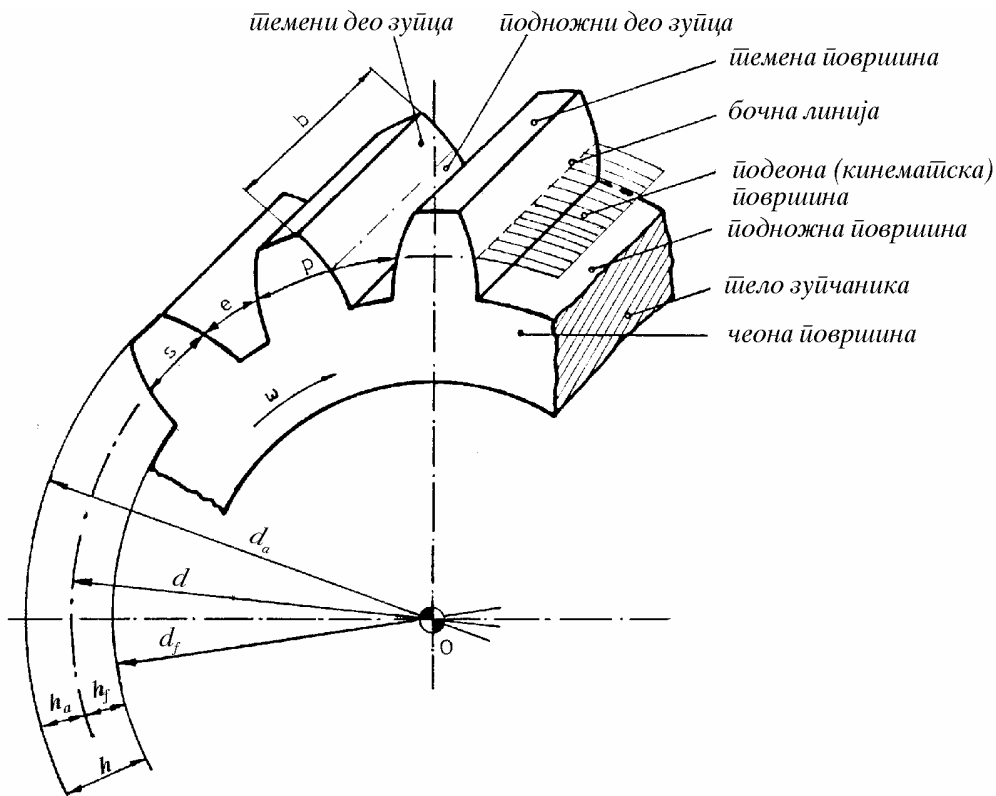
У изразу (31.2) са  $m$  је означен **модул** зупчаника који представља основни параметар зупчаника преко кога се одређују скоро све димензије зубаца и зупчаника. Ради ограничавања броја алата и прибора за израду и контролу зупчаника, величине модула су стандардизоване. У прилогу *ПЗ1-1* дате су стандардне вредности модула  $m$  према *SRPS M.C1.015*.

Стандардни модули распоређени су у два степена приоритета. При прорачуну првенствено треба користити вредности за модуле I степена приоритета. Вредности за модуле II степена приоритета треба користити само у изузетним случајевима.

**Зупчасти пар** чине два зупчаника истог модула који преносе оптерећење спрезањем - додиривањем зубаца. Један од зупчаника је **погонски** а други је **гоњени**. Погонски зупчаник преноси кретање и обртни момент на гоњени. Поред тога уобичајени су и називи **мали** и **велики** зупчаник. Мали зупчаник има мањи број зубаца, мањи пречник и мањи обртни момент али већу угаону брзину. Велики зупчаник се окреће спорије, има већи број зубаца односно већи пречник. Услед ових разлика зупчасти парови при преносу оптерећења и кретања мењају њихове карактеристике, односно трансформишу их. Ова трансформација сразмерна је преносном односу.

При спрезању зупци спрегнутих зупчаника додирују се преко бочних површина. Део бочне површине по коме се врши додиривање у току спрезања назива се **активни део бока зупца**, и он игра најважнију улогу у кинематици зупчаника јер се преко њега преноси обимна сила и кретање. Остале

површине зупца су од секундарног значаја. Бочна површина зупца је преко прелазног дела бока зупца спојена са подножном површином.



Сл. 31.4. Ознаке код цилиндричних зупчаника са правим зупцима:

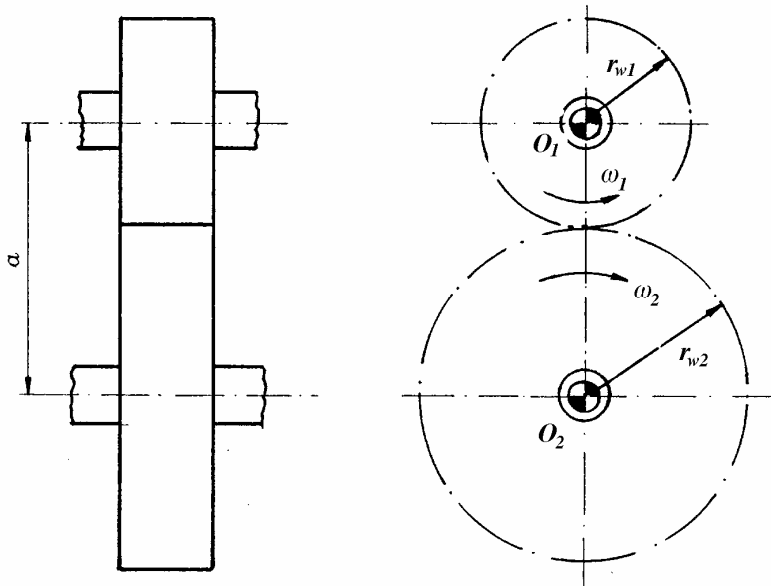
$b$  - ширина зупчаника;  $d_a$  - пречник темене кружности;  $d_f$  - пречник подножне кружности;  $d$  - пречник подеоне кружности;  $h$  - висина зупца;  $h_a$  - висина теменог дела зупца;  $h_f$  - висина подножног дела зупца;  $s$  - лучна дебљина зупца на подеоној кружности;  $e$  - лучна ширина међузубља на подеоној кружности;  $p$  - подеони корак;  $\omega$  - угаона брзина.

У току спрезања бокови зубаца спрегнутих зупчаника додирују се дуж линија које се називају линије додира бокова зубаца.

Да би преносни однос код зупчастог пара био константан, пренос мора бити тако остварен као да су на вратилу навучена два цилиндра која се котрљају један по другом без клизања. Ови замишљени цилиндри називају се **кинематски цилиндри**. Пресек кинематског цилиндра са чеоном равни одређује кинематску кружницу, а додирна тачка кинематских кружница назива се **кинематски** или **тренутни пол**.

Пошто се кинематски цилиндри спрегнутих зупчаника котрљају један по другоме без клизања (сл. 31.5) то су њихове обимне брзине међусобно једнаке

$$v = r_{w1} \cdot \omega_1 = r_{w2} \cdot \omega_2$$



Сл. 31.5. Котрљање кинематских цилиндара без клизања па се њихов преносни однос може да одреди као:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_{w2}}{d_{w1}} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} \quad (31.3)$$

$\omega_1, \omega_2$  - угаоне брзине малог и великог зупчаника,  
 $n_1, n_2$  - бројеви обртаја малог и великог зупчаника,  
 $d_{w1}, d_{w2}$  ( $r_{w1}, r_{w2}$ ) - пречници (полупречници) кинематских кружница.

Пошто је обим кинематске кружнице једнак производу броја зубаца и корака

$$\pi \cdot d_{w1} = z_1 \cdot p_{w1} \quad \text{односно} \quad \pi \cdot d_{w2} = z_2 \cdot p_{w2}$$

и како се исправно спрезање зупчаника може остварити само ако је на кинематским кружницама  $p_{w1} = p_{w2} = p_w$ , преносни однос се може изразити као

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_{w2}}{d_{w1}} = \frac{z_2}{z_1} \quad (31.4)$$

Израз (31.4) дефинише *радни преносни однос* и ако се прошири модулом  $m$  следи да је

$$i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{m \cdot z_2}{m \cdot z_1} = \frac{d_2}{d_1} \quad (31.5)$$

Осим радног преносног односа дефинише се и *кинематски преносни однос*:

$$u = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_{w2}}{d_{w1}} = \frac{n_1}{n_2} \quad (31.6)$$

И радни и кинематски преносни однос израчунавају се помоћу истих величина, али радни преносни однос  $i$  је однос одговарајућих вредности гоњеног и погонског зупчаника, а кинематски  $u$  је однос одговарајућих вредности великог и малог зупчаника те је увек  $u \geq I$ . Код редуктора мали зупчаник је погонски, а велики гоњени те је  $u = i$ . Обрнут је однос код мултипликатора који увећавају угаону брзину од улаза ка излазу те је  $u = I/i$  где је  $i \leq I$ .

Спрезање зубаца зупчастог пара остварује се котрљањем замишљених кинематских кружница и истовременим међусобним додиривањем бокова спрегнутих зубаца. Тачка додира профила зубаца помера се од подножја ка темену код погонског зупчаника и од темена ка подножју код гоњеног.

У свакој тачки додира бокови зубаца спрегнутих зупчаника имају заједничку тангенту и заједничку нормалу. Заједничка нормала на бокове зубаца спрегнутих зупчаника у било којој тачки додира назива се **нападна линија бокова зубаца**.

### 3.1.3. Основни закон (правило) спрезања

Облик профила зупца мора да обезбеди исправно спрезање зубаца. У току додира профила зубаца преносни однос  $u = \omega_1/\omega_2$  мора бити константан тј. не сме долазити до убрзавања односно до успоравања гоњеног зупчаника при континуалној ротацији погонског. Овај услов биће испуњен уколико **заједничка нормала у тренутној тачки додира профила зубаца сече праву која спаја осе обртања зупчаника  $O_1O_2$  у тренутном полу  $C$**  (сл. 31.6).

Полазећи од овог услова који представља основни закон спрезања, облик активног дела профила зупца једног зупчаника дефинисан је обликом активног дела профила зубаца зупчаника у спрези.

На сл. 31.6. приказана су два профила спрегнутих зупчаника. Профил  $b_1$  припада погонском зупчанику који се окреће око осе  $O_1$ , а профил  $b_2$  гоњеном зупчанику који се окреће око осе  $O_2$ . Кроз тачку додира спрегнутих профила  $B$  повучена је тангента  $t_B$  и нормала  $n_B$ . У тренутној тачки додира  $B$  приказан је распоред брзина.

Заједничка нормала  $n_B$  пролази кроз тачку  $C$  и током спрезања не мења угао  $\alpha_w$ . Тачка додира профила  $B$  помера се дуж праве  $n_B$  на коју су повучене нормале  $\overline{O_1T_1} = r_{T_1}$  и  $\overline{O_2T_2} = r_{T_2}$  као и полупречници  $r_{B1}$  и  $r_{B2}$  из центара  $O_1$  и  $O_2$ . Између ових величина постоје односи:

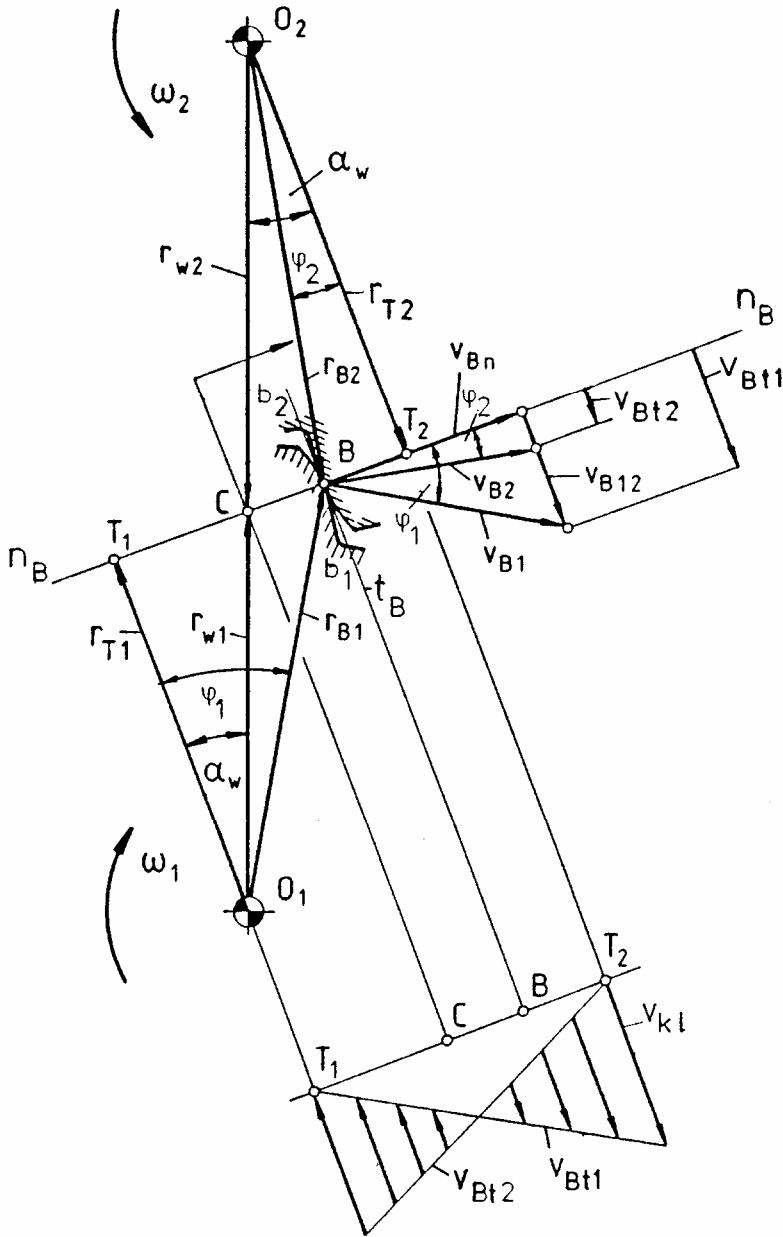
$$r_{T_1} = r_{B1} \cdot \cos \varphi_1$$

$$r_{T_2} = r_{B2} \cdot \cos \varphi_2$$

Обимна брзина тачке  $B$  у односу на осу обртања  $O_1$  је  $v_{B1} = r_{B1} \cdot \omega_1$ , а у односу на осу обртања  $O_2$  је  $v_{B2} = r_{B2} \cdot \omega_2$ , где су  $\omega_1$  и  $\omega_2$  угаоне брзине зупчаника 1 и 2. Компоненте обимних брзина у правцу заједничке нормале на спрегнуте профиле су:

$$v_{Bn1} = v_{B1} \cdot \cos \varphi_1 = r_{B1} \cdot \omega_1 \cdot \cos \varphi_1$$

$$v_{Bn2} = v_{B2} \cdot \cos \varphi_2 = r_{B2} \cdot \omega_2 \cdot \cos \varphi_2$$



Сл. 31.6. Основни закон спрезања са распоредом брзина

Да би се бокови зубаца непрекидно додиривали морају компоненте обимних брзина  $v_{Bn1}$  и  $v_{Bn2}$  бити међусобно једнаке. Ако би било  $v_{Bn1} > v_{Bn2}$  то би значило да профил зупца  $b_1$  зупчаника 1 продире у профил зупца  $b_2$  зупчаника 2, што је немогуће с обзиром да се ради о чврстим телима. За случај  $v_{Bn1} < v_{Bn2}$  дошло би до одвајања профила зупца  $b_1$  од профила  $b_2$ , што је такође немогуће, јер је зупчаник 1 погонски. Из свега овога следи да мора бити  $v_{Bn1} = v_{Bn2}$  одакле се добија:



$$r_{B1} \cdot \omega_1 \cdot \cos \varphi_1 = r_{B2} \cdot \omega_2 \cdot \cos \varphi_2$$

односно

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{B2} \cdot \cos \varphi_2}{r_{B1} \cdot \cos \varphi_1} = \frac{r_{T2}}{r_{T1}}$$

Из сличности троуглова  $O_1T_1C$  и  $O_2T_2C$  следи да је

$$\frac{r_{T2}}{r_{T1}} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}$$

па се коначно добија:

$$\omega_1 \cdot r_{w1} = \omega_2 \cdot r_{w2} = v_c \quad (31.7)$$

Израз (31.7) представља услов једнакости обимних брзина у тачки  $C$  што значи да је то тренутни пол, а полупречници  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$  су полупречници кинематских кружница које се котрљају једна по другој без клизања. Према томе израз (31.7) представља и доказ основног закона спрезања, тј. поставке дате на почетку да је тачка  $C$  тренутни пол брзина.

Компоненте обимних брзина у правцу заједничке тангенте нису међусобно једнаке:

$$\begin{aligned} v_{B1} &= v_{B1} \cdot \sin \varphi_1 = \omega_1 \cdot r_{B1} \cdot \sin \varphi_1 = \omega_1 \cdot \overline{T_1B} = \omega_1 (\overline{T_1C} + \overline{CB}) = \\ &= \omega_1 \left( r_{w1} \cdot \sin \alpha_w + \overline{CB} \right) = \omega_1 \cdot r_{w1} \left( \sin \alpha_w + \frac{\overline{CB}}{r_{w1}} \right) = v_c \left( \sin \alpha_w + \frac{\overline{CB}}{r_{w1}} \right) \\ v_{B2} &= v_{B2} \cdot \sin \varphi_2 = \omega_2 \cdot r_{B2} \cdot \sin \varphi_2 = \omega_2 \cdot \overline{T_2B} = \omega_2 (\overline{T_2C} + \overline{CB}) = \\ &= \omega_2 \left( r_{w2} \cdot \sin \alpha_w + \overline{CB} \right) = \omega_2 \cdot r_{w2} \left( \sin \alpha_w + \frac{\overline{CB}}{r_{w2}} \right) = v_c \left( \sin \alpha_w + \frac{\overline{CB}}{r_{w2}} \right) \end{aligned}$$

Разлика компонената обимних брзина у правцу заједничке тангенте представља брзину клизања:

$$v_{kl} = v_{B1} - v_{B2} = v_c \left( \frac{\overline{CB}}{r_{w1}} + \frac{\overline{CB}}{r_{w2}} \right) = \frac{v_c \cdot \overline{CB}}{r_{w1}} \left( 1 + \frac{1}{u} \right) \quad (31.8)$$

Из израза (31.8) види се да је брзина клизања директно пропорционална растојању  $\overline{CB}$  додирне тачке  $B$  од тренутног пола и обимној брзини у тренутном полу  $v_c$ , а обрнуто пропорционална полупречницима кинематских кружница  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$ . У тачки  $C$  је  $\overline{CB} = 0$  па је тада брзина клизања једнака нули, а највећа је у тачкама које су најудаљеније од тренутног пола. У току спрезања зубаца зупчаника ове тачке одговарају темену и подножју активног дела профила зупца. При проласку додирне тачке кроз тренутни пол брзина клизања мења смер. Дијаграм брзине клизања приказан је на сл. 31.6.

Код зупчасте летве је  $r_{w2} = \infty$ , а код озубљеног венца је  $r_{w2} < 0$ , што значи да је код равнoг цилиндричног зупчастог пара и код унутрашњег цилиндричног зупчастог пара брзина клизања мања.

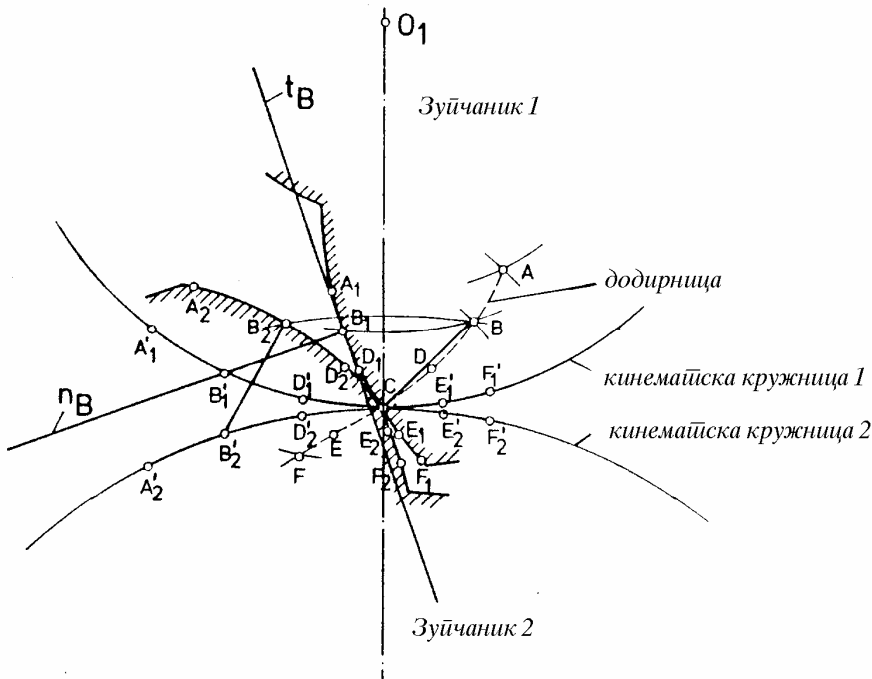
Однос релативне брзине клизања према одговарајућој компоненти брзине зупца у правцу тангенте назива се специфично клизање:

$$\zeta_1 = \frac{v_{kl}}{v_{t1}} = \frac{v_{t1} - v_{t2}}{v_{t1}}; \quad \zeta_2 = \frac{v_{kl}}{v_{t2}} = \frac{v_{t2} - v_{t1}}{v_{t2}} \quad (31.9)$$

Специфично клизање зависи од облика профила зубаца и мање је код зупчаника са већим бројем зубаца. Пожељно је да специфично клизање буде што мање.

### 3.1.4. Додирница

Коришћењем основног закона спрезања, графичким поступком може се за одређени профил зупца једног зупчаника и за задате пречнике кинематских кружница да одреди одговарајући профил зупца спрегнутог зупчаника. На слици 31.7 приказан је Рулоов (Reuleaux) поступак за одређивање облика профила зубаца у спрези за задати профил зупца првог зупчаника.

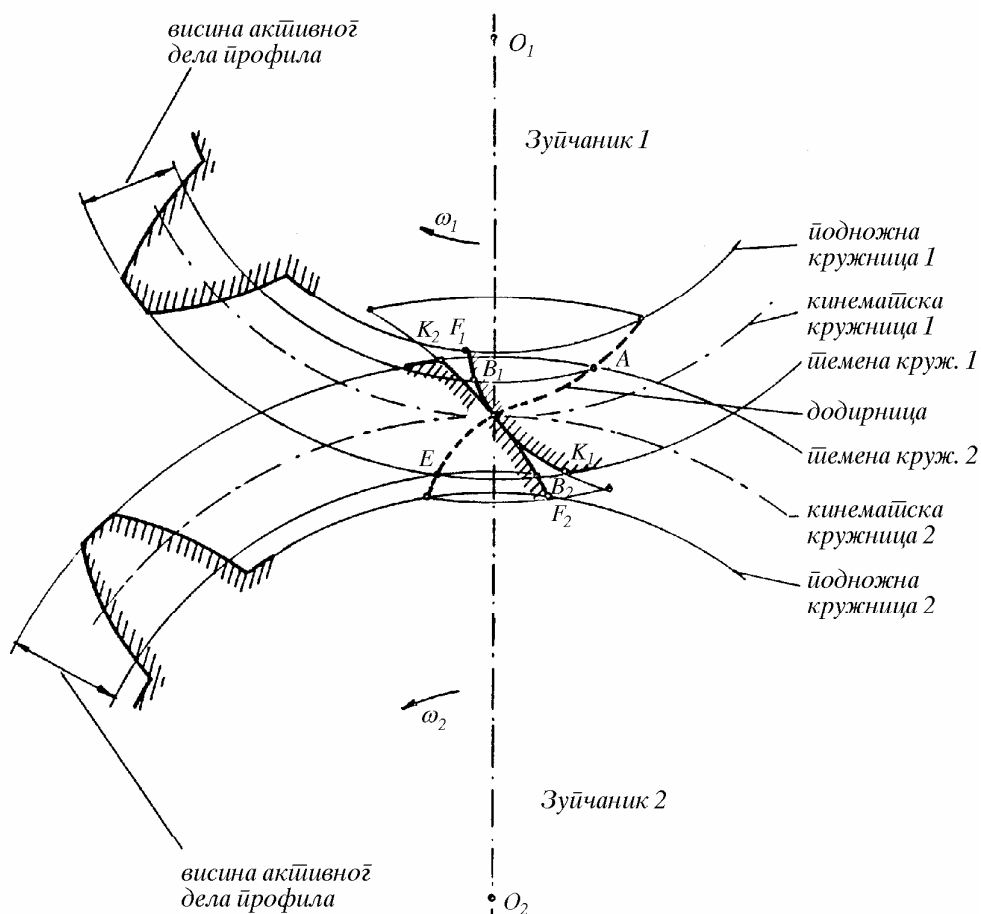


Сл. 31.7. Графичко одређивање спрегнутог профила и додирнице

На основу познатих пречника кинематских кружница на дужи  $\overline{O_1O_2}$  одређује се тренутни пол  $C$ , а затим се на задати профил бока зупца зупчаника  $I$  кроз изабрану тачку  $B_1$  повлачи тангента  $t_B$  и нормала  $n_B$ . Нормала  $n_B$  сече кинематску кружницу  $I$  у тачки  $B'_1$ . Заокретањем зупчаника  $I$  око осе  $O_1$  за

лук  $\overline{B'_1 C}$ , тачка  $B'_1$  поклопиће се са тачком  $C$ . У исто време тачка  $B_1$  помера се за одговарајући лук око осе  $O_1$ , тако да пресек тог лука и кружног лука полупречника  $\overline{B'_1 B_1}$  повученог из тачке  $C$  одређује положај тачке  $B$ . У тачки  $B$  додирују се тачке  $B_1$  профила зупца зупчаника 1 и неке тачке  $B_2$  профила зупца зупчаника 2, јер сходно основном закону спрезања у том положају нормала на спрегнуте профиле пролази кроз тренутни пол  $C$ .

Заокретањем зупчаника 1 у првобитни положај за лук  $\overline{B'_1 C}$ , због котрљања кинематских кружница једне по другој без клизања, и зупчаник 2 заокреће се за исти лук  $\overline{B'_1 C} = \overline{B'_2 C}$  око осе  $O_2$ . Тачка  $B_2$  која одговара профили зупца зупчаника 2 такође се заокреће за одговарајући кружни лук око тачке  $O_2$ . У пресеку тог лука и кружног лука полупречника  $\overline{B'_1 B_1} = \overline{CB}$  око тачке  $B'_2$  налази се тражена тачка  $B_2$  профила зупца зупчаника 2.



Сл. 31.8. Активна дужина додирнице  $AE$  и активна дужина профила  $B_1K_1$  односно  $K_2B_2$

Истим поступком налазе се и остале тачке  $A_2$ ,  $D_2$ ,  $E_2$  и  $F_2$ , а спајањем ових тачака добија се тражени профил зупца зупчаника 2. На овај начин одређују се и тачке  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  и  $F$ , а линија која спаја ове тачке је **додирница профила**. Додирница профила је геометријско место тачака додира спрегнутих профила у односу на непомичну раван. То је линија по којој се креће тачка додира и истовремено помера дуж профила зубаца. Облик додирнице зависи од облика профила спрегнутих зубаца. Додирница дефинише узајамне положаје зубаца и кинематске параметре спрезања зупчаника. Помоћу ње може за задати профил зупца једног зупчаника на основу напред описаног графичког поступка да се одреди непознати профил зупца спрегнутог зупчаника. Међутим од значаја је само такозвана **активна дужина додирнице**.

Активна дужина додирнице налази се између темених кружница спрегнутих зупчаника. Изван темених кружница нема додира. На сл. 31.8 активна дужина додирнице налази се између тачака  $A$  и  $E$ , где тачка  $A$  означава почетак додира и налази се у пресеку додирнице са теменом кружницом зупчаника 2, а тачка  $E$  означава крај додира спрегнутих профила и налази се у пресеку додирнице са теменом кружницом зупчаника 1.

Приликом спрезања зупци спрегнутих зупчаника додирују се по активној дужини профила. Активна дужина профила зупца зупчаника 1 је  $B_1K_1$  (сл. 31.8). У тачки  $B_1$  почиње додиривање са спрегнутим зупцем и у том тренутку она се поклапа са тачком  $A$  на додирници, а завршава се у тачки  $K_1$  на врху зупца када се она поклопи са тачком  $E$  на додирници.

Код зупца спрегнутог зупчаника 2 активна дужина профила је  $K_2B_2$ . Додиривање са зупцем зупчаника 1 почиње у тачки  $K_2$  и у том тренутку се тачке  $K_2$  и  $B_1$  поклопе са тачком  $A$  на додирници, а престаје у тачки  $B_2$  када се тачке  $K_1$  и  $B_2$  поклопе са тачком  $E$  на додирници.

У току додиривања пара спрегнутих профила тачка додира креће се по активном делу профила зупца, и то код погонског зупчаника од подножја ка темену, а код гоњеног од темена ка подножју. При томе геометријско место свих тачака додира профила зубаца посматрано у односу на непомичан координатни систем везан за осе обртања је активна дужина додирнице ( $AE$ ), а посматрано у односу на покретни систем везан за сваки зупчаник посебно представља активне дужине профила зубаца ( $B_1K_1$  односно  $K_2B_2$ ).

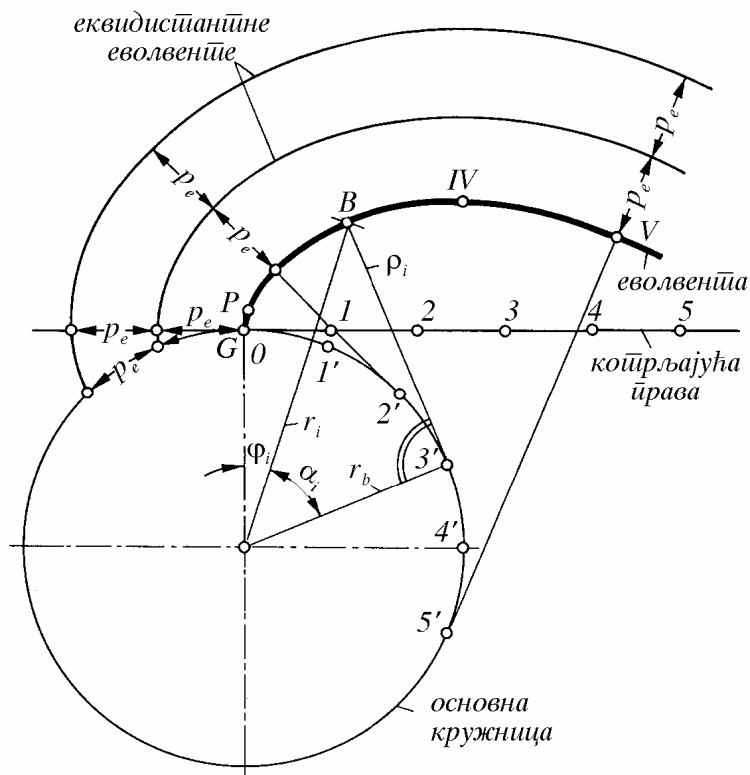
Поред додирнице профила у кинематици зупчаника користи се и **додирница бокова**. То је геометријско место свих тачака додира бокова зубаца спрегнутих зупчаника посматрано у односу на непомични координатни систем, дакле представља путању линије додира односно једну површину.

### 3.1.5. Криве профила зубаца

У општем случају облик профила једног зупца може се бирати произвољно, али је при томе за дато осно растојање и за дати преносни однос облик профила зупца спрегнутог зупчаника једнозначно одређен. Због тога је потребно наћи такву криву линију да линија спрегнутог профила буде крива

истог карактера, али са другим параметрима. Такве криве линије које задовољавају основни закон спрезања познате су у кинематици као **рулете**.

У машинству се за облик профила зубаца најчешће користи еволвента и разне врсте циклоида. У том смислу разликују се **циклоидни** и **еволвентни** зупчаници.



Сл. 31.9. Конструкција еволвенте

У погледу носивости циклоидни зупчаници имају низ предности у односу на еволвентне, али због тешкоће при изради користе се само за специјалне намене. Еволвентни зупчаници су једноставни за израду па се и најчешће користе у пракси.

При котрљању праве по непокретној кружници, свака тачка праве описује у равни криву линију која се назива еволвента круга. Кружница по којој се котрља права назива се основна кружница (сл. 31.9), а све на овај начин настале криве налазе се на једнаком међусобном растојању (еквидистантне криве).

## 3.2. ГЕОМЕТРИЈА ЦИЛИНДРИЧНИХ ЕВОЛВЕНТНИХ ЗУПЧАНИКА

### 3.2.1. Зупчаници са правим зупцима

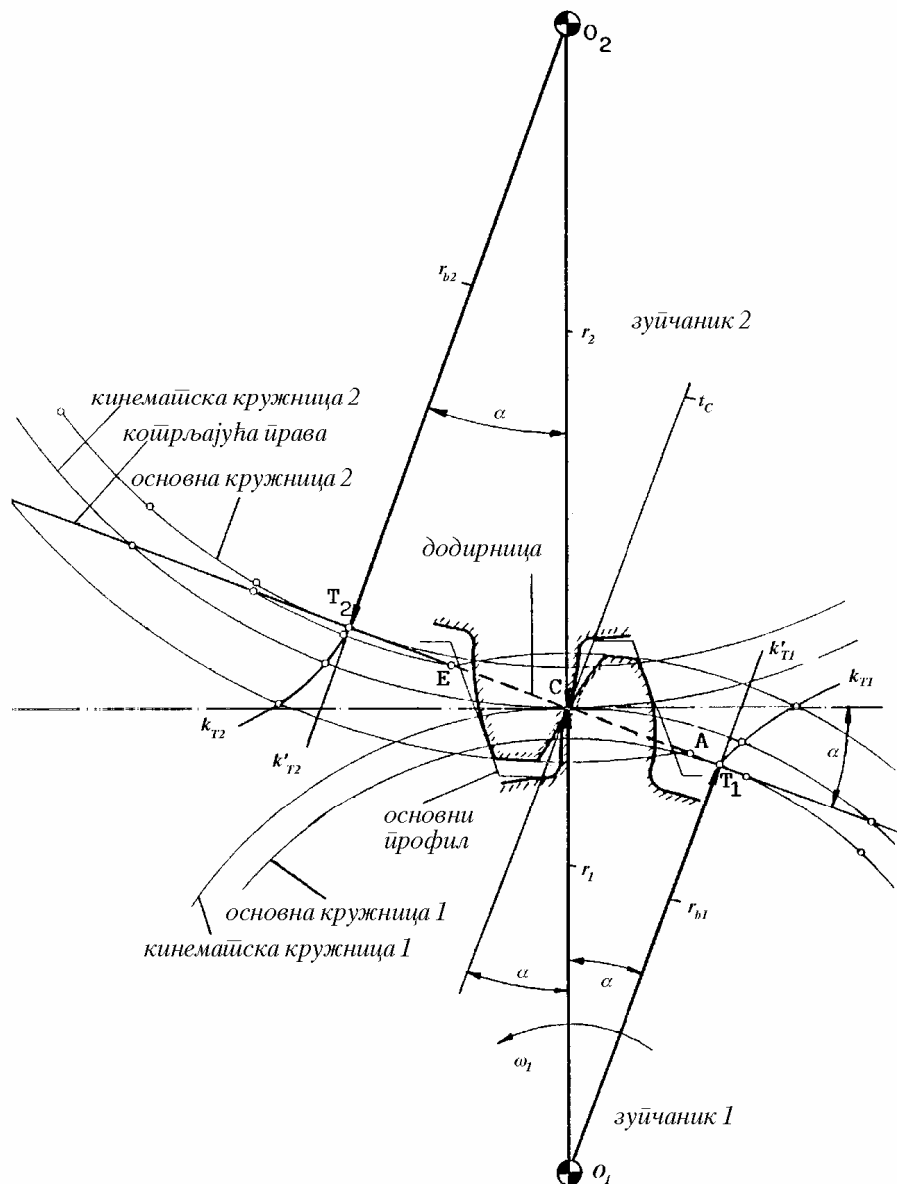
#### 3.2.1.1. Уводна разматрања

Поступак добијања еволвенте као линије профила зупца дат је у одељку 3.1.5. Котрљањем праве по основној кружности  $1$  њена тачка  $T_1$  у равни зупчаника  $1$  описује криву линију - еволвенту  $k_{T_1}$ , а котрљањем исте праве по основној кружности  $2$  њена тачка  $T_2$  у равни зупчаника  $2$  описује криву линију - еволвенту  $k_{T_2}$  (сл. 32.1). Криве линије  $k_{T_1}$  и  $k_{T_2}$  су линије профила зубаца спрегнутих зупчаника. Дата права је тангента на основне кружнице  $1$  и  $2$  и на њој лежи додирница. Одговарајућим заокретањем зупчаника  $1$  и  $2$  доћи ће до додира профила зубаца, а тачка додира налазиће се на додирници  $\overline{T_1T_2}$ . Ако приликом израде зупчаника релативним котрљањем нема подсецања профила, граничне тачке на додирници  $A$  и  $E$  налазиће се у пресеку темених кружница зупчаника  $2$  и  $1$  са додирницом. Окретањем зупчаника  $1$  угаonom брзином  $\omega_1$  у назначеном смеру спрезање почиње у тачки  $A$ , а завршава се у тачки  $E$ . Дуж  $\overline{AE}$  представља активну дужину додирнице.

Код еволвентних профила у свакој тачки додира заједничка нормала на спрегнуте профиле је и тангента на основне кружнице спрегнутих зупчаника и сходно закону спрезања увек пролази кроз тренутни пол  $C$ .

#### 3.2.1.2. Основни профил зупчаника

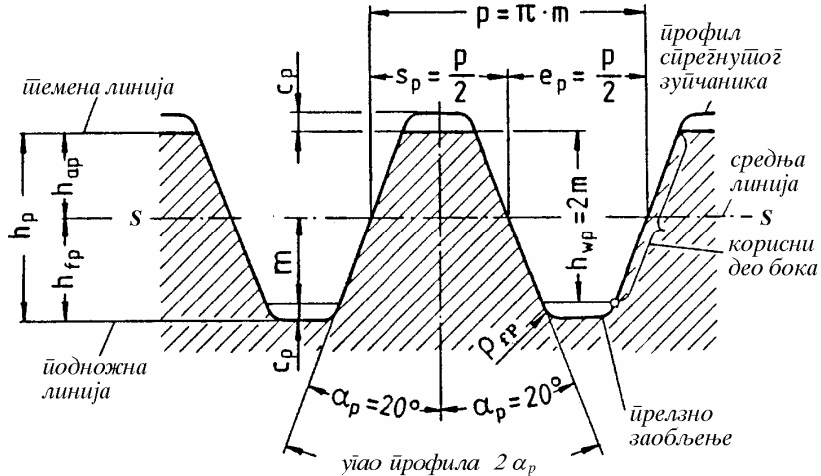
Ако пречници  $d_{b1}$  и  $d_{b2}$  односно полупречници  $r_{b1}$  и  $r_{b2}$  теже  $\infty$  (сл. 32.1) онда ће еволвенте  $k_{T_1}$  и  $k_{T_2}$  прећи у праве линије  $k'_{T_1}$  и  $k'_{T_2}$  које су управне на додирницу. Зупци са праволинијским профилом могу се једноставно и тачно израдити па је стога овакав профил усвојен као основни профил зупчаника и користи се и као профил алата за израду зупчаника и за теоријска разматрања.



Сл. 32.1. Еволвентни зупчасти пар; добијање профила зупца и основног профила

Основни профил, профил алата у облику зупчате летве и профил зупца основне зупчате летве међусобно се разликују. Висина основног профила је  $h_{wP} = 2m$  и он нема никаквих заобљења (сл. 32.2). Висина профила алата је  $h_w = 2h_{a0}$  и он има одговарајућа заобљења на прелазу бочних линија у темену и подножну контуру (сл. 32.3). Висина зупца основне зупчате летве је међутим  $h_P = h_{fP} + h_{aP}$  (сл. 32.2) и код ње прелазно заобљење постоји само на прелазу бокова зубаца у подножје.

Све еволвентне зупчанике могуће је дефинисати преко основне зупчасте летве која је и усвојена као стандардни профил зубаца зупчаника (сл. 32.2). За стандардни профил може се закључити следеће:



Сл. 32.2. Стандардни профил цилиндручних еволвентних зупчаника према DIN 867

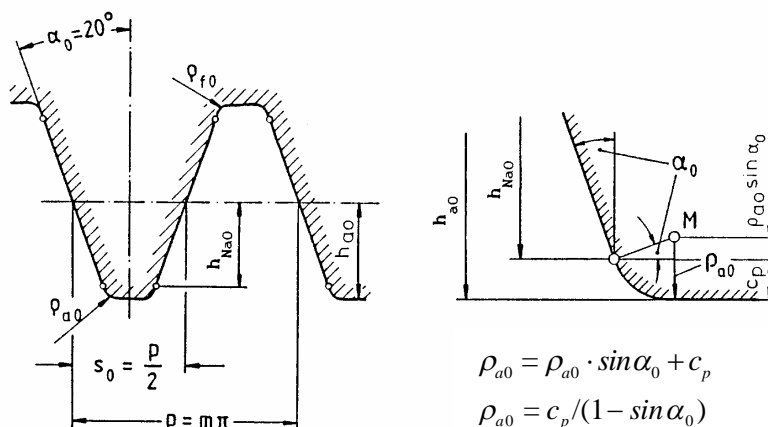
- ◆ Бокови стандардног профила код цилиндричних еволвентних зупчаника су праве линије.
- ◆ Стандардни профил има подеони корак  $p = m \cdot \pi$ , па је стандардни модул једнак  $m = p/\pi$ .
- ◆ Средња линија стандардног профила  $S - S$  дели стандардни профил тако да је дебљина зупца једнака ширини међузубља тј.  $s_P = e_P = p/2$ .
- ◆ Нормала на средњу линију профила заклапа са праволинијским боком основног профила угао  $\alpha_P = 20^\circ$ , тако да је угао основног профила зупца једнак  $2\alpha_P = 40^\circ$ .
- ◆ Величине које одређују висину стандардног профила су:
 

висина теменог дела зупца	$h_{aP} = m$
висина подножног дела зупца	$h_{fP} = m + c_P$
укупна висина	$h_P = h_{aP} + h_{fP} = 2m + c_P$
- ◆ Темени зазор се креће у границама  $c_P = (0,1 \dots 0,3)m$  и зависи од карактеристика алата и од специјалних захтева за израду зупчаника (у изузетним случајевима може се узети до  $0,4m$ ).
- ◆ Корисни део бока зупца одређује заједничка висина спрегнутих профила која је једнака  $h_{wP} = 2m$ .
- ◆ Прелазни део између праволинијског дела бока и подножја зупца има полупречник заобљења (види сл. 32.3.)  $\rho_{a0} = c_P / (1 - \sin \alpha_P)$ .

Према стандардима *ISO* и *DIN* предвиђене су различите висине теменог дела алата  $h_{a0}$  и различити полупречници заобљења  $\rho_{a0}$  као и углови основног профила  $\alpha_P$  (прилози ПЗ2-1 и ПЗ2-2). Код зупчаника чији се зупци бруше неопходно је оставити додатак за брушење што се постиже алатом са протуберанцом који има измењени профил теменог дела зупца. На тај начин



добија се профил без зареза на прелазном делу између брушеног и небрушеног бока зупца.



Сл.32.3. Профил алата који одговара стандардном профили према сл.32.2.

### 3.2.1.3. Еволвентна функција

За прорачун геометријских величина врло често се користи еволвентна функција. Из услова котрљања праве по основној кружности (сл. 32.4) следи да је:

$$\overline{PT} = \overline{BT}$$

односно

$$r_b(\theta_i + \alpha_i) = r_i \cdot \tan \alpha_i$$

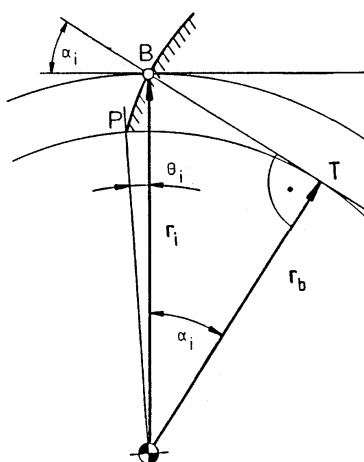
па се коначно добија

$$\theta_i = \tan \alpha_i - \alpha_i \quad (32.1)$$

Угао  $\theta_i$  у изразу (32.1) назива се еволвентна функција угла  $\alpha_i$  и означава се са  $\text{inv } \alpha_i$  (инволут  $\alpha_i$ ). Вредности еволвентне функције у зависности од угла  $\alpha$  израчунате су ради лакшег коришћења и дате у таблица П32-3.

Свака нормала на еволвенту односно нападна линија еволвентног профила је тангента на основну кружницу. Угао између нападне линије у некој тачки и тангенте на кружницу кроз исту тачку назива се нападни угао профила  $\alpha_i$ . Према сл. 32.4 овај угао може да се одреди према:

$$\cos \alpha_i = \frac{r_b}{r_i} = \frac{d_b}{d_i}$$



Сл. 32.4. Еволвентна функција

Нападна линија профила зупца на

подеоној кружности пречника  $d$  има нападни угао  $\alpha$  па је:

$$\cos \alpha = \frac{d_b}{d}$$

одакле следи зависност између пречника основне и пречника подеоне кружности:

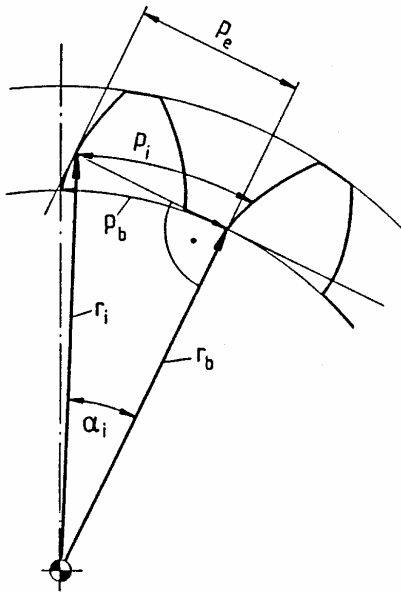
$$d_b = d \cdot \cos \alpha \quad (32.2)$$

Полупречник кривине еволвентног профила може да се одреди као

$$\rho_i = \overline{BT} = \sqrt{r_i^2 - r_b^2} = r_b \cdot \tan \alpha_i = r_i \cdot \sin \alpha_i \quad (32.3)$$

Ова величина је веома важна за прорачун носивости јер утиче на величину контактних напрезања на боковима зубаца.

#### 3.2.1.4. Основни корак профила



Сл. 32.5. Корак профила на основној кружности

Истоимене профиле два суседна зупца образују две еволвенте исте основне кружности. Из дефиниције еволвенте следи да ће нормално растојање ових двеју линија бити увек исто, односно ове две еволвенте су еквилистантне. Нормално растојање два истоимена суседна профила је уствари корак профила на основној кружности, који се другачије назива и основни корак профила  $p_b$ . Корак профила на било ком другом пречнику  $p_i$  (сл. 32.5) може да се одреди зависно од корака на основној кружности  $p_b$ , односно од корака на додирници  $p_e$  (спрежног корака) као

$$p_e = p_b = \frac{2 \cdot r_b \cdot \pi}{z} = \frac{2 \cdot r_i \cdot \pi \cdot \cos \alpha_i}{z} = p_i \cdot \cos \alpha_i \quad (32.4)$$

Према томе корак профила на подеоној кружности је:

$$p = \frac{p_b}{\cos \alpha} \quad (32.5)$$

### 3.2.1.5. Промена осног растојања

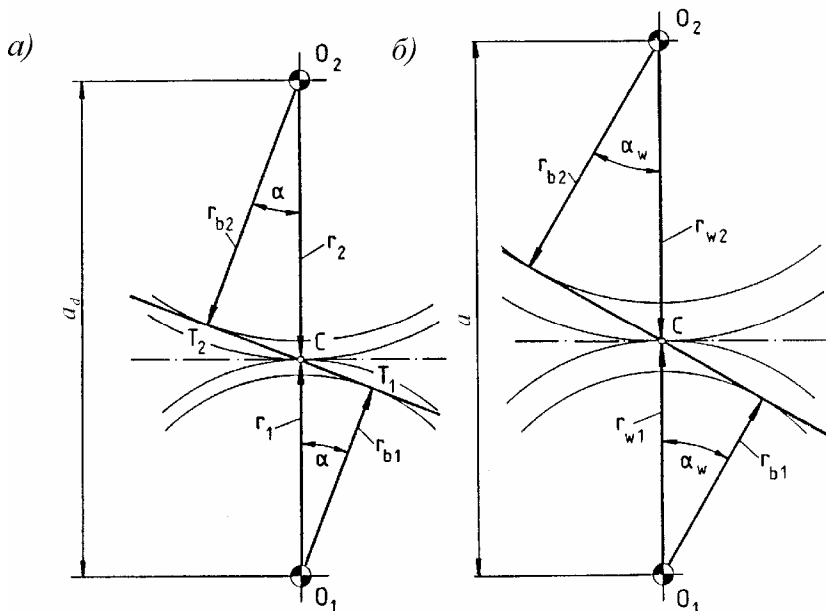
Одлика зупчаника са еволвентним профилем је што они могу да се спрежу на било ком осног растојању. У било којој тачки додира заједничка нормала пролази кроз тренутни пол и она је уједно тангента на основне кружнице зупчаника. У току спрезања заједничка нормала не мења свој положај у односу на осе зупчаника, и на њој леже све тачке додира спрегнутих профила. Према томе она је уједно и додирница цилиндричних еволвентних зупчаника.

У било којој тачки додира нападни углови профила спрегнутих зупчаника су различити. Једино у тренутном полу оба нападна угла су међусобно једнака и поклапају се са углом између додирнице и заједничке тангенте кинематских кружница у тренутном полу. Због тога се овај угао назива угао додирнице  $\alpha_w$ .

На сл. 32.6.а приказан је зупчasti пар код кога се кинематска тачка  $C$  налази на додиру подеоних кружница полупречника  $r_1$  и  $r_2$ . Осно растојање је тада једнако теоријској вредности

$$a_d = r_1 + r_2 \quad (32.6)$$

Овде се пречници подеоних и кинематских кружница поклапају.



Сл. 32.6. Зупчasti парови са различитим осног растојањем;  
 а) кинематска тачка  $C$  као тачка додира подеоних кружница  
 б) кинематска тачка  $C$  као тачка додира кинематских кружница

На сл. 32.6.б приказан је исти зупчasti пар при чему је осно растојање повећано на  $a$ . Кинематска тачка  $C$  (тренутни пол) такође се помера и сада се налази на додиру кинематских кружница полупречника  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$ . Пречници

подеоних и кинематских кружница се више не поклапају, а угао додирнице се такође мења и износи  $\alpha_w$ .

Према томе при промени осног растојања мењају се угао додирнице и пречници кинематских кружница, а пречници подеоних и основних кружница се не мењају.

Из сличности троуглова  $O_1T_1C$  и  $O_2T_2C$  на сл. 32.6.a следи:

$$\frac{r_1}{r_{b1}} = \frac{r_2}{r_{b2}} \quad \text{односно} \quad \frac{r_{w1}}{r_{b1}} = \frac{r_{w2}}{r_{b2}}$$

тако да се добија

$$\frac{r_{b2}}{r_{b1}} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = i \quad (32.7)$$

Из (32.7) следи да за било које осно растојање заједничка нормала на спрегнуте профиле дели линију  $O_1O_2$  на два дела чији је однос увек једнак преносном односу.

У општем случају осно растојање  $a$  (сл. 32.6.б) може да се одреди као:

$$a = r_{w1} + r_{w2} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_w} + \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_w} = \frac{r_1 \cdot \cos \alpha + r_2 \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha_w} \quad (32.8)$$

па се коначно добија

$$a = m \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} \quad (32.9)$$

Израз (32.9) важи и за зупчасте парове са унутрашњим спрезањем само се тада број зубаца озубљеног венца узима са негативним предзнаком. Препоручује се да вредности за осно растојање буду цели бројеви из реда стандардних бројева.

Из (32.7) и (32.8) следи да су полупречници кинематских кружница једнаки:

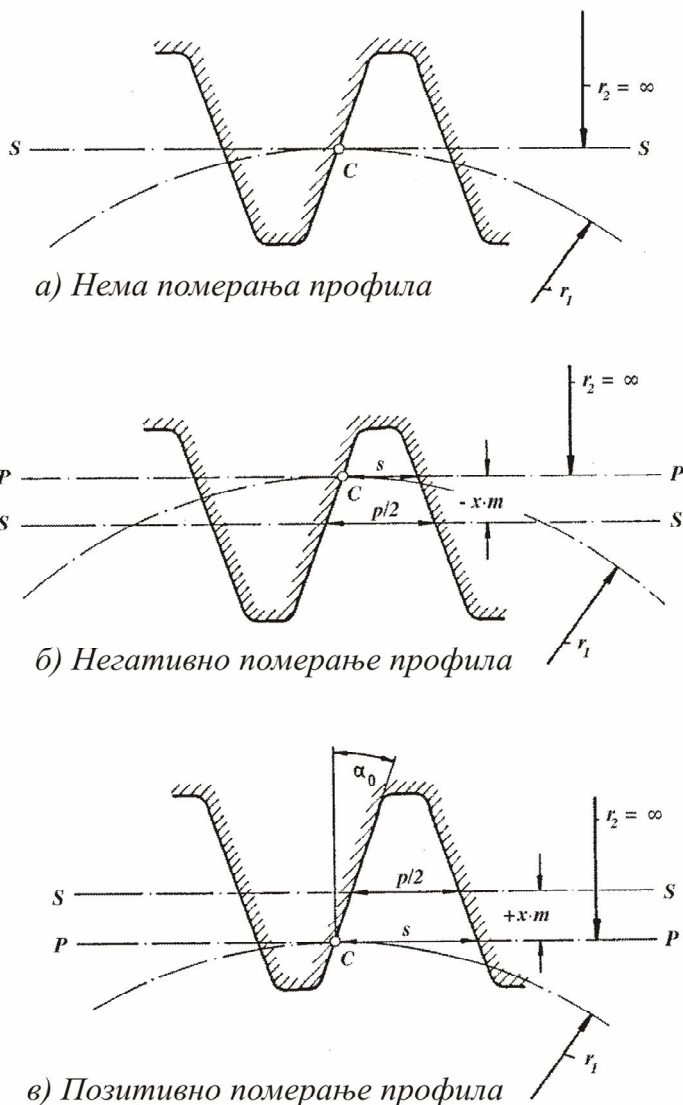
$$r_{w1} = a \cdot \frac{1}{i+1}; \quad r_{w2} = a \cdot \frac{i}{i+1} \quad (32.10)$$

### 3.2.1.6. Померање профила алата

При спрезању профила алата са зупчаником који се израђује врши се котрљање подеоне праве  $P-P$  по подеоној кружници (сл. 32.7). Пошто се подеона права и подеона кружница котрљају једна по другој без клизања, то корак профила алата мора бити једнак кораку спрегнутог зупчаника. Овај корак једнак је подеоном кораку  $p$ .

Средња линија профила алата  $S-S$  (сл. 32.7) дели праволинијски део профила на два једнака дела и према њој се одређује положај профила алата. Подеона права  $P-P$  не мора се поклапати са средњом линијом профила алата  $S-S$ . Растојање између средње линије профила алата и подеоне праве назива се померање профила алата. Изражава се производом коефицијента померања профила алата  $x$  и модула  $m$ , тј као  $x \cdot m$ . Померање профила може бити

позитивно када се профил алата удаљава од осе зупчаника (сл. 32.7,в), и негативно када се профил алата приближава осе зупчаника (сл. 32.7,б).

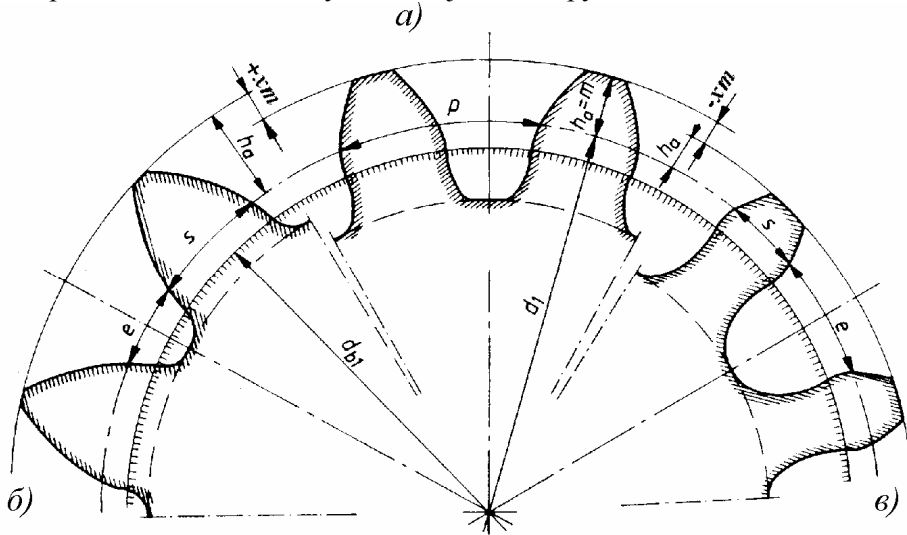


Сл. 32.7. Различити положаји алата у односу на зупчаник (S-S - средња линија; P-P - подеона права)

Померање профила алата значајно утиче на облик профила зубаца израђеног зупчаника и на његове димензије. Осим померања, на облик профила утиче и број зубаца зупчаника. Ако је број зубаца мањи профил образују нижи предели еволвенте. Профил је ближи основној кружности и има мањи радијус кривине. Код већих бројева зубаца профил образују виши предели еволвенте, бокови су равнији тако да код зупчасте летве (зупчанице) где је  $z = \infty$ , прелазе у праву линију.

Померање профила утиче на облик зупца као и број зубаца. Позитивним померањем профил се подиже ка вишим пределима еволвенте, а негативним спушта наниже. При томе се пречник основне кружнице не мења јер не зависи од померања профила.

Померањем профила мењају се сви пречници зупчаника осим подеоног и основног. Тако померање профила омогућује и фино подешавање величине зупчаника (сл. 32.8) и осног растојања. Улога померања профила цилиндричних еволвентних зупчаника је вишеструка.



Сл. 32.8. Облици зубаца у зависности од померања профила,  
а) без померања, б) са позитивним померањем,  
в) са негативним померањем

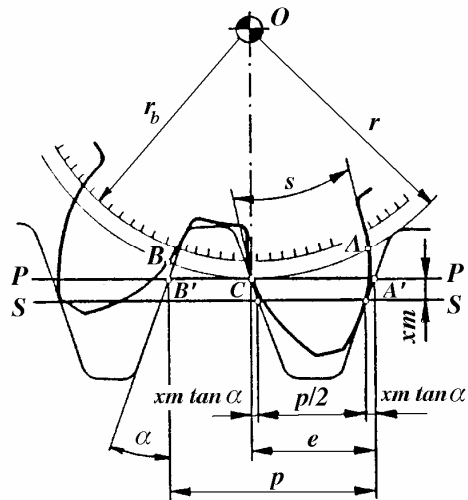
### 3.2.1.7. Лучна дебљина зупца

Из услова котрљања подеоне праве  $P-P$  по подеоној кружници без клизања следи да је лучна дебљина зупца на подеоној кружници једнака ширини међузубља профила алата и може да се срачуна према (сл. 32.9):

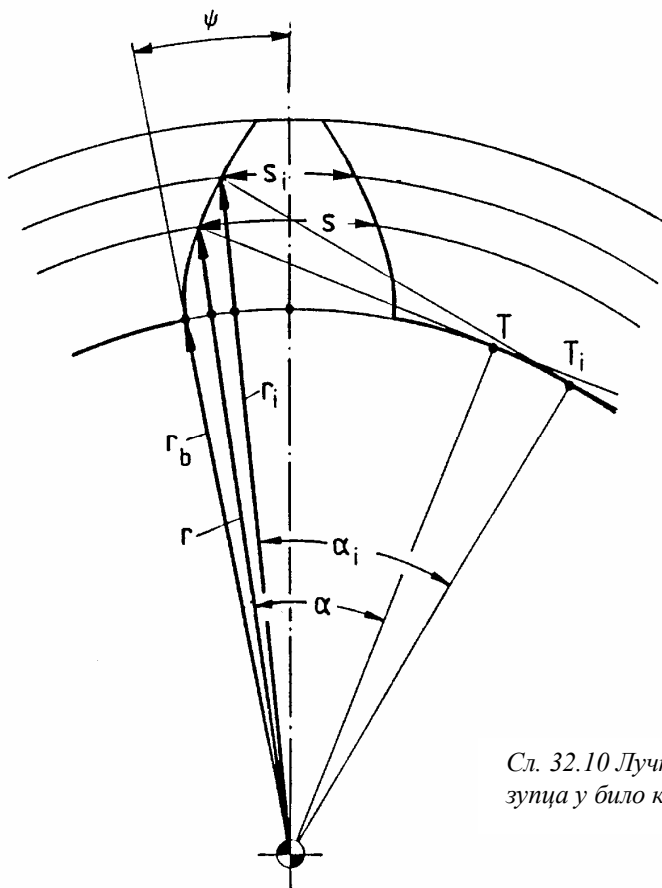
$$s = \frac{P}{2} + 2 \cdot x \cdot m \cdot \tan \alpha = m \cdot \left( \frac{\pi}{2} + 2 \cdot x \cdot \tan \alpha \right) \quad (32.11)$$

Међутим врло често неопходно је срачунати лучну дебљину зупца у било ком пресеку. Сваки зубац зупчаника састоји се од два лука еволвенти исте основне кружнице које су постављене симетрично у односу на осу симетрије профила зупца. Лучна дебљина зупца у било ком пресеку одређује се у зависности од лучне дебљине зупца на подеоној кружници. Угао половине дебљине зупца на основној кружници може да се срачуна као (сл. 32.10):

$$\psi = \operatorname{inv} \alpha + \frac{s}{2r} = \operatorname{inv} \alpha_i + \frac{s_i}{2r_i}$$



Сл. 32.9. Лучна дебљина зупца на подеаној кружности



Сл. 32.10 Лучна дебљина зупца у било ком пресеку

одакле се добија лучна дебљина зупца у било ком пресеку:

$$s_i = d_i \left( \frac{s}{d} + \operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_i \right) \quad (32.12)$$

Заменом  $d_i = d_b$  и  $\alpha_i = 0$  у (32.12) добија се лучна дебљина зупца на основној кружности

$$s_b = d_b \left( \frac{s}{d} + \operatorname{inv}\alpha \right) \quad (32.13)$$

Лучна ширина међузубља на пречнику  $d_i$  одређује се преко корака профила

$$p_i = \frac{d_i \cdot \pi}{z} = s_i + e_i$$

односно

$$e_i = p_i - s_i \quad (32.14)$$

Заменом  $d_i = d_a$  и  $\alpha_i = \alpha_a$  у (32.12) добија се лучна дебљина зупца на теменој кружности

$$s_a = d_a \left( \frac{s}{d} + \operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_a \right) \quad (32.15)$$

где је  $\alpha_a$  нападни угао профила на теменој кружности који је сходно сл. 32.4 једнак:  $\cos\alpha_a = r_b/r_a$ .

### 3.2.1.8. Угао додирнице

Сви прорачуни димензија зупчаника врше се за случај да нема кружног зазора. Потребан кружни зазор обезбеђује се погодним избором толеранција називних мера дебљине зубаца спрегнутих зупчаника и осног растојања.

Због кортљања кинематских кружница једне по другој без клизања следи да је лучна ширина међузубља једног зупчаника једнака лучној дебљини зупца другог зупчаника на кинематској кружности (сл. 32.11), односно

$$s_{w1} = e_{w2}; \quad s_{w2} = e_{w1}$$

па је корак профила зупца на кинематској кружности једнак

$$p_w = s_{w1} + e_{w1} = e_{w2} + s_{w2} = s_{w1} + s_{w2} \quad (32.16)$$

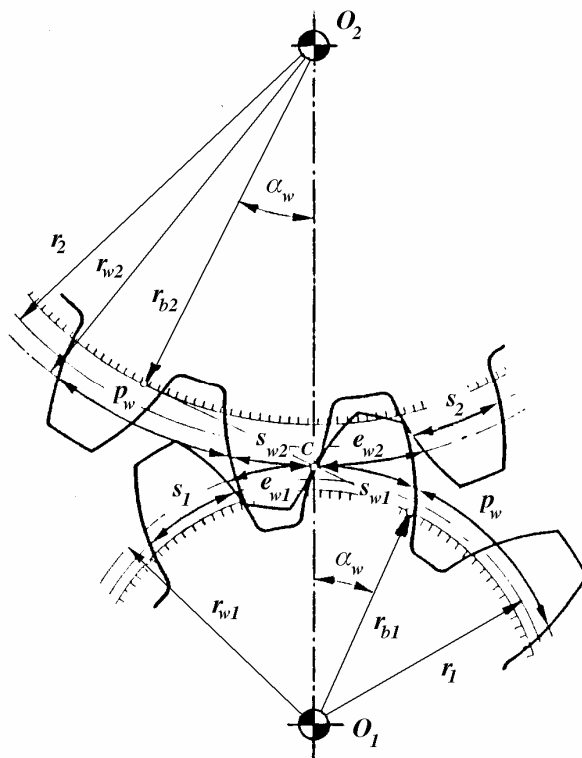
Израз (32.16) показује да се корак профила зупца на кинематској кружности може да се одреди као збир дебљина зубаца спрегнутих зупчаника на кинематској кружности.

Узимајући у обзир изразе (32.11) и (32.12) и заменом индекса  $i = w$  дебљине зубаца на кинематској кружности су:

$$s_{w1} = \frac{d_{w1}}{z_1} \left[ \frac{\pi}{2} + 2 \cdot x_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha - z_1 (\operatorname{inv}\alpha_w - \operatorname{inv}\alpha) \right]$$

$$s_{w2} = \frac{d_{w2}}{z_2} \left[ \frac{\pi}{2} + 2 \cdot x_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha - z_2 (\operatorname{inv}\alpha_w - \operatorname{inv}\alpha) \right]$$





Сл. 32.11. Спрезање без бочног зазора

Пошто је

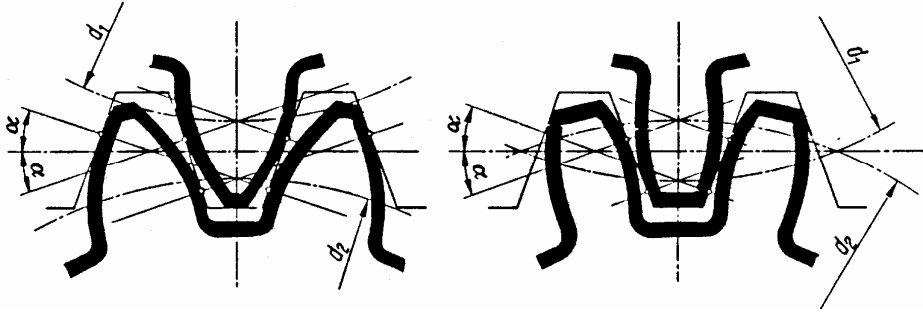
$$p_w = \frac{d_{w1} \cdot \pi}{z_1}$$

то заменом у (32.16) после сређивања добија се

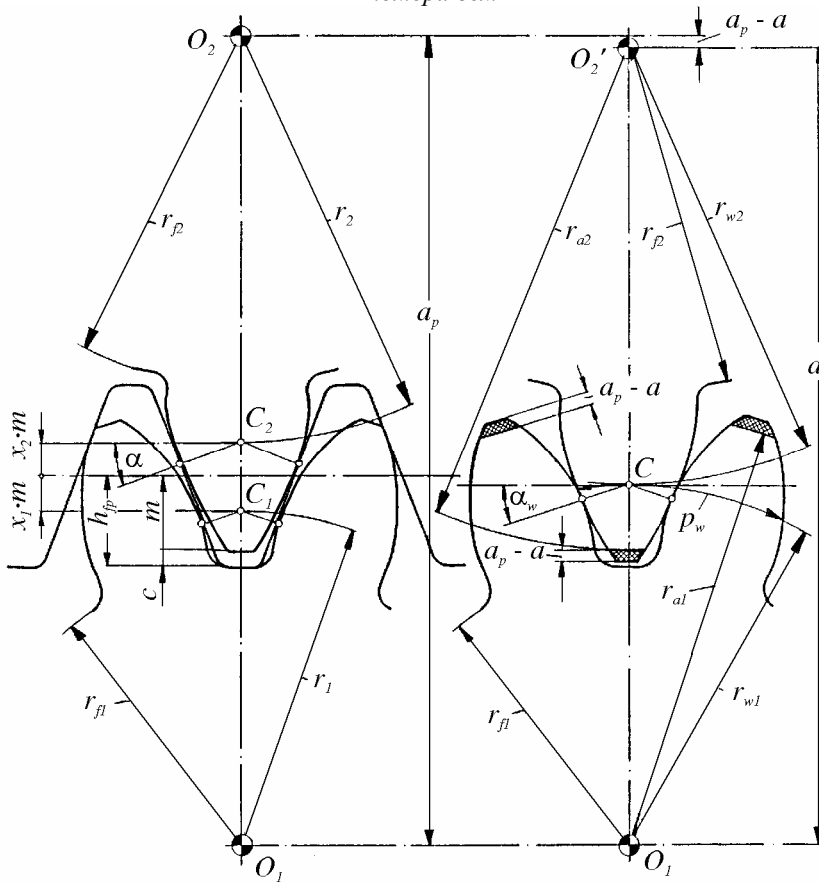
$$\operatorname{inv} \alpha_w = 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \tan \alpha + \operatorname{inv} \alpha \quad (32.17)$$

Израз (32.17) показује да угао додирнице зависи од коефицијената померања профила спрегнутих зупчаника. Како облик зубаца такође зависи од коефицијената померања профила то су зависно од коефицијената  $x_1$  и  $x_2$  сви зупчасти парови подељени на:

- нулте зупчасте парове ( $x_1 = x_2 = 0$ ),
- V-нулте зупчасте парове ( $x_1 + x_2 = 0$ ),
- V-зупчасте парове ( $x_1 + x_2 \neq 0$ ).



Сл. 32.12. Додатни бочни зазор код V-зупчастих парова са осним растојањем  $a_p$  ;  
 а) зупчасти пар са позитивним померањем; б) зупчасти пар са негативним померањем



Сл. 32.13. V-зупчасти парови; а) без скраћења главе зупца; б) са скраћењем главе зупца

### 3.2.1.9. Скраћење главе зупца

Код V-зупчастих парова, зупчасти пар може бити тако изведен да се стандардни профили спрегнутих зупчаника међусобно поклапају. При томе кинематске кружнице тангирају средњу линију профила алата и осно

растојање би било једнако  $a_p$  (сл. 32.13,*a*). Код тако изведеног зупчастог пара настаје пак додатни бочни зазор (не узимајући у обзир толеранције називних мера дебљина зубаца и осног растојања) јер су на кинематским кружницама ширине међузубља веће од дебљине зубаца (сл. 32.12). У случају да повећани зазор није дозвољен (на пример код преносника са променљивим смером обртања или код преносника са динамичким оптерећењима) изводе се зупчasti парови без додатног бочног зазора. Да би се овај бочни зазор одстранио потребно је осе зупчаника приближити тј. смањити осно растојање  $a_p$  на  $a$  (сл. 32.13,*б*). При томе се смањује и темени зазор што намеће потребу скраћења главе зупца тј. смањење пречника темених кружница. Потребна величина скраћења главе зупца износи:

$$k \cdot m = a_p - a = r_1 + r_2 + m \cdot (x_1 + x_2) - a \quad (32.18)$$

где је  $k$  - коефицијент скраћења главе зупца.

Скраћење главе зупца изводи се и за случај избегавања појаве шиљатог зупца рецимо код зупчаника са екстремно малим бројевима зубаца.

### 3.2.1.10. Карактеристични пречници и димензије зупчаника

Пречници подеоних и основних кружница се не мењају без обзира на померање профила алата. Пречници подеоних кружница могу да се срачунају према (31.2) односно:

$$d_1 = m \cdot z_1; \quad d_2 = m \cdot z_2 \quad (32.19)$$

Зависност између пречника основних и подеоних кружница дата је изразом (32.2) односно пречници основних кружница могу да се срачунају према:

$$d_{b1} = d_1 \cdot \cos \alpha; \quad d_{b2} = d_2 \cdot \cos \alpha \quad (32.20)$$

Са слике 32.6 следи:

$$r_b = r \cdot \cos \alpha = r_w \cdot \cos \alpha_w$$

односно добија се зависност између пречника подеоних и кинематских кружница:

$$d_{w1} = d_1 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}; \quad d_{w2} = d_2 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} \quad (32.21)$$

Према сл. 32.13,*a* полупречници темених кружница су:

$$r_{a1} = r_1 + m(1 + x_1); \quad r_{a2} = r_2 + m(1 + x_2)$$

Узимајући у обзир и скраћење главе зупца (сл. 32.13,*б*) добија се:

$$r_{a1} = r_1 + m(1 + x_1) - k \cdot m; \quad r_{a2} = r_2 + m(1 + x_2) - k \cdot m$$

те заменом  $k \cdot m$  из израза (32.18) добијају се изрази за пречнике темених кружница у облику:

$$d_{a1} = 2(a + m - m \cdot x_2) - d_2; \quad d_{a2} = 2(a + m - m \cdot x_1) - d_1 \quad (32.22)$$

За усвојени темени зазор  $c$  осно растојање је (сл. 32.13,*б*):

$$a = r_{f1} + c + r_{a2} = r_{f2} + c + r_{a1}$$

па пречници темених кружница могу да се срачунају и као:

$$d_{a1} = 2a - d_{f2} - 2c; \quad d_{a2} = 2a - d_{f1} - 2c \quad (32.23)$$

Уколико су зупчаници израђени са алатом у облику зупчасте летве онда пречници подножних кружница могу да се одреде према:

$$d_{f1} = d_1 + 2mx_1 - 2h_{fp}; \quad d_{f2} = d_2 + 2mx_2 - 2h_{fp} \quad (32.24)$$

При изради са алатом у облику зупчаника са пречником темене кружнице  $d_{a0}$  и граничним осним растојањем при изради  $a_0$  пречници подножних кружница одређују се према:

$$d_{f1} = 2a_{01} - d_{a01}; \quad d_{f2} = 2a_{02} - d_{a02} \quad (32.25)$$

Укупна висина зупца  $h$  (сл. 31.2) једнака је збиру висина теменог  $h_a$  и подножног  $h_f$  дела зупца, односно

$$h = h_a + h_f$$

Може се дефинисати и заједничка висина зупца  $h_w$  која је једнака збиру висина темених делова малог  $h_{a1}$  и великог  $h_{a2}$  зупчаника, тј.:

$$h_w = h_{a1} + h_{a2} = \frac{d_{a1} - d_{a2}}{2} - a$$

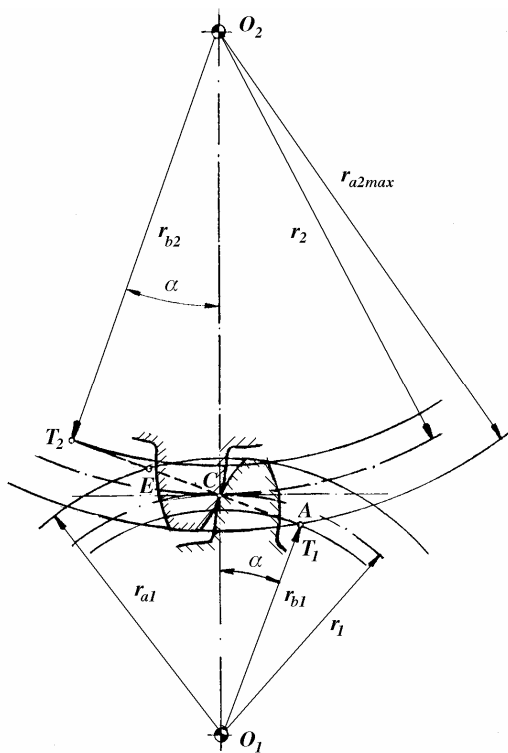
Висина теменог дела зупца  $h_a$  најчешће је једнака модулу ( $h_a = m$ ), а висина подножног дела зупца  $h_f$  код стандардних зупчаника креће се у границама  $h_f = (1,1 \dots 1,3)m$ . За познате димензије једног зупчастог пара темени зазор може да се одреди према:

$$c_1 = h_1 - h_w = a - \frac{d_{a1} + d_{f2}}{2}; \quad c_2 = h_2 - h_w = a - \frac{d_{a2} + d_{f1}}{2} \quad (32.26)$$

### 3.2.1.11. Гранични број зубаца зупчаника

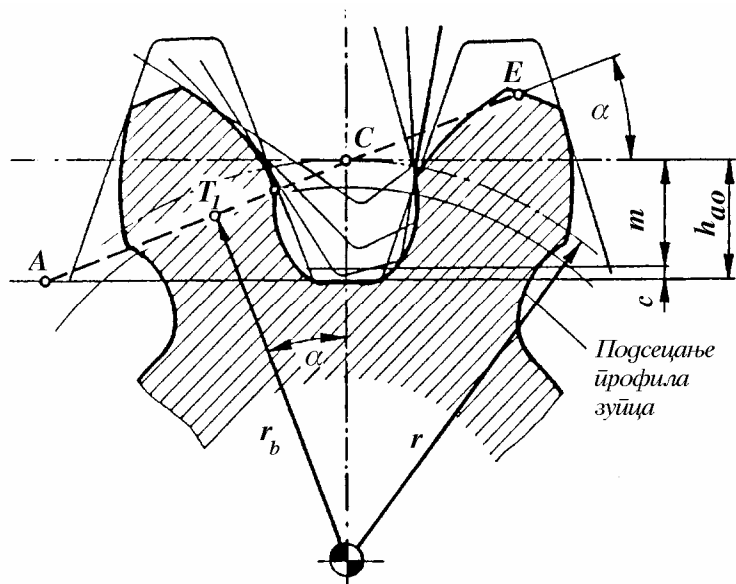
У току спрезања профила спрегнутих зупчаника тачка додира креће се по додирници. Граничне тачке на додирници  $A$  и  $E$  налазе се у пресеку темених кружница зупчаника 2 и 1 са додирницом (сл. 32.1). Међутим у извесним случајевима може доћи до тога да у току спрезања темена кружница већег зупчаника пресече додирницу у тачки  $T_1$  (односно до поклапања тачака  $A$  и  $T_1$ ), па чак и испред тачке  $T_1$ . Тачка  $T_1$  је најближа тачка додирнице средишту малог зупчаника и налази се на основној кружници малог зупчаника. Када се тачке  $A$  и  $T_1$  поклопе онда је пречник темене кружнице великог зупчаника гранични пречник при коме се још увек може постићи правилан рад код спрегнутих зупчаника (сл. 32.14). Онда је мали зупчаник гранични зупчаник за те услове спрезања, а број зубаца малог зупчаника гранични број зубаца.

За већи пречник темене кружнице великог зупчаника, односно даљим смањивањем броја зубаца малог зупчаника тачка  $A$  нашла би се изван употребљивог дела додирнице  $\overline{T_1T_2}$ . Ако би већи зупчаник био алат за израду



Сл. 32.14. Гранични услови спрезања

малог зупчаника онда би релативна путања врха зупца била таква да би он издубио подножје зубаца малог зупчаника. Зупци малог зупчаника били би подсечени. Код подсечених зубаца смањује се попречни пресек подножја зубаца и скраћује се корисна дужина еволвентног профила. Уколико би мали зупчаник био израђен независно од великог на пример профилисаним глодалом, онда се ова два зупчаника не би могла спрезати, јер би се зупци великог зупчаника заглавили у међузубљу малог зупчаника.



Сл. 32.15. Подсецање профила зубаца при изради алатом у облику зупчасте летве

При спрезању зупчаника са алатом у облику зупчасте летве подсецање наступа много раније (сл. 32.15). Ако се међутим изврши позитивно померање профила алата подсецање ће бити отклоњено. Између померања профила и граничног броја зубаца с обзиром на појаву подсецања постоји корелација. На сл. 32.16 приказан је зупчаник са граничним бројем зубаца у односу на подсецање.

Из троугла  $TDC$  следи да је:

$$\overline{TC} = \frac{\overline{DC}}{\sin \alpha} = \frac{m - x \cdot m}{\sin \alpha}$$

а из троугла  $OTC$  иста величина  $\overline{TC}$  је

$$\overline{TC} = r \cdot \sin \alpha = \frac{m \cdot z}{2} \cdot \sin \alpha$$

Изједначавањем горњих израза добија се:

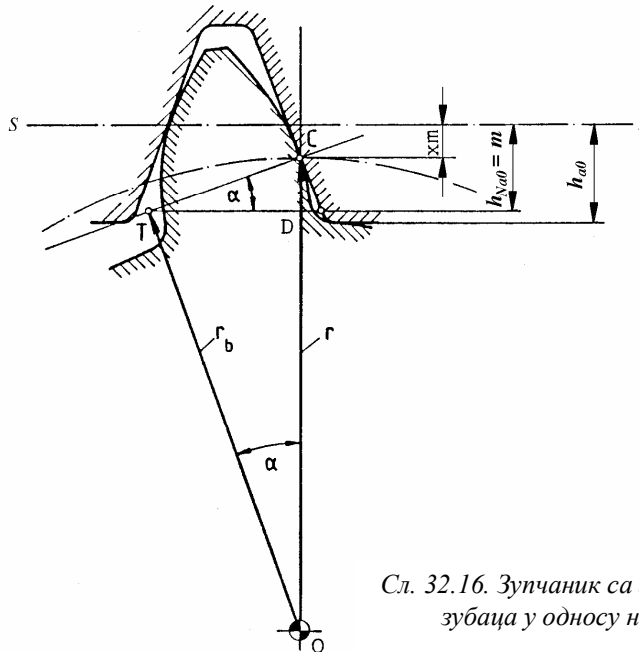
$$m \cdot (1 - x) = \frac{m \cdot z}{2} \cdot \sin^2 \alpha \quad (32.27)$$

па је гранични број зубаца

$$z = z_G = (1 - x) \cdot \frac{2}{\sin^2 \alpha}$$

За  $\alpha = 20^\circ$  гранични број зубаца је

$$z_G = 17,1 \cdot (1 - x)$$



Сл. 32.16. Зупчаник са граничним бројем зубаца у односу на подсецање

Према томе коефицијенту померања профила  $x = 0$  одговара гранични број зубаца  $z_G = 17,1$ . За усвојени број зубаца малог зупчаника минимална теоријска вредност коефицијента померања профила може да се срачуна према:

$$x = \frac{z_G - z}{z_G} = \frac{17 - z}{17} \quad (32.28)$$

Ако се може дозволити извесно подсецање зубаца малог зупчаника минимална вредност коефицијента померања профила малог зупчаника може се одредити према:

$$x = \frac{14 - z}{17} \quad (32.29)$$

Максимална вредност коефицијента померања профила одређена је појавом "шиљатог зупца". Наиме при удаљавању алата од зупчаника (позитивно померање профила) темена дебљина зупца се смањује па може доћи до појаве такозваног "шиљатог зупца" када је темена дебљина зупца једнака нули. У пракси се препоручује да темена дебљина зупца буде  $s_a \geq 0,2m$ , код некаљених зубаца, односно  $s_a \geq 0,4m$  код каљених зубаца.

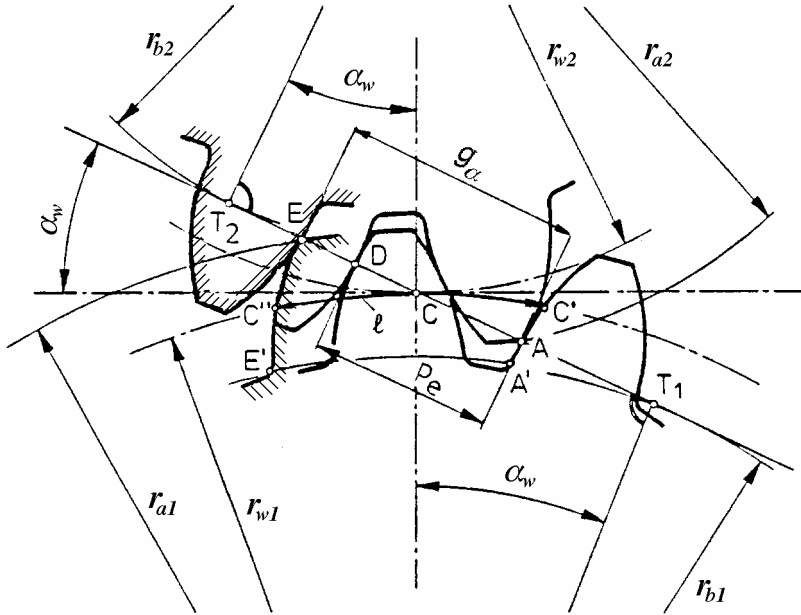
За практично одређивање екстремних вредности коефицијента померања профила алата односно граничног броја зубаца може се користити дијаграм на сл. 32.29.

### 3.2.1.12. Једнострука и двострука спрега

Бокови зубаца спрегнутог зупчастог пара у току спрезања додирују се дуж активног дела додирнице  $\overline{AE}$ . У тренутку додира једног пара профила зубаца у тачки  $A$ , на растојању  $p_e$  од те тачке дуж додирнице тј. у тачки  $D$  налази се у захвату претходни пар зубаца (сл. 32.17,*а*). Претходни пар зубаца излази из захвата у тачки  $E$  додирнице и у том тренутку посматрани пар спрегнутих зубаца налазиће се у тачки  $B$ . Према томе у подручју спрезања између тачака  $A$  и  $B$  односно  $D$  и  $E$  налазиће се истовремено у захвату два пара спрегнутих профила зубаца па је то период двоструке спреге. Тачка  $B$  је тачка почетка једноструке спреге јер је претходни пар у том тренутку изашао из захвата, а наредни пар спрегнутих профила још увек није ушао у захват. Он ће ући у захват тек онда када тачка додира буде удаљена од тачке  $A$  за величину спрежног корака  $p_e$ , а то је тачка  $D$  на додирници. Према томе дуж додирнице између тачака  $B$  и  $D$  у захвату ће бити само један пар зубаца, те је то период једноструке спреге.

Ако се посматрају тачке додира релативно у односу на профил зупца малог (погонског) зупчаника (сл. 32.17,*б*) онда је тачка  $B$  крајња унутрашња тачка једноструке спреге, а тачка  $D$  крајња спољашња тачка једноструке спреге. Код профила зупца великог (гоњеног) зупчаника биће обрнуто. Тачка  $B$  одговара крајњој спољашњој, а тачка  $D$  крајњој унутрашњој тачки једноструке спреге.

Сл. 32.17. Једнострука и двострука спрега



Сл. 32.18. Додирни лук профила на кинематској  $l$  и на основној кружности  $A'E'$

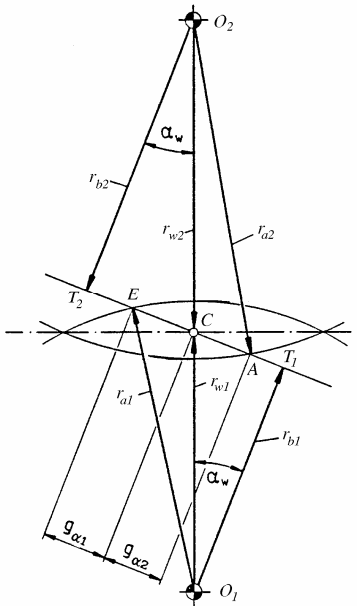
### 3.2.1.13. Степен спрезања профила

У циљу обезбеђења континуалног преношења кретања са погонског на гоњени зупчаник потребно је да пре него што један пар зубаца изађе из спреге, следећи пар уђе у спрегу. То ће бити испуњено ако је додирни лук  $l$  већи од корака профила зупца  $p_w$  на кинематској кружности односно  $l > p_w$ . Однос додирног лука профила и корака на кинематској кружности назива се степен спрезања профила:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{l}{p_w} \geq 1$$

Пошто су углови испод додирних лукова профила на кинематској кружности  $l$  и на основној кружности  $E'A'$  међусобно једнаки (сл. 32.18) то је:

$$\frac{E'A'}{r_b} = \frac{l}{r_w}$$



Сл. 32.14. Гранични услови спрезања



С обзиром на особине еволвенте кружнице, додирни лук профила на основној кружници  $\overline{E'A'}$  једнак је активној дужини додирнице  $\overline{EA} = g_a$ , па узимајући у обзир зависност између полупречника кинематских и основних кружница (сл. 32.6,б) добија се:

$$l = g_a \cdot \frac{r_w}{r_b} = \frac{g_a}{\cos \alpha_w} \quad (32.30)$$

На основу израза (32.4) следи однос између спрежног корака и корака на кинематској кружници

$$p_e = p_b = p_w \cdot \cos \alpha_w = m\pi \cdot \cos \alpha$$

па израз за степен спрезања добија облик:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{l}{p_w} = \frac{g_a}{p_w \cdot \cos \alpha_w} = \frac{g_a}{p_e} = \frac{g_a}{m\pi \cdot \cos \alpha} \quad (32.31)$$

Израз (32.31) показује да се степен спрезања профила код еволвентних зупчаника може да одреди као однос активне дужине додирнице  $g_a$  и спрежног корака  $p_e$ .

Парцијално посматрајући активни део додирнице у односу на темени део ( $g_a$ ) и подножни део ( $g_f$ ) погонског зупчаника 1 укупни степен спрезања може да се одреди као:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{g_a}{p_e} + \frac{g_f}{p_e} = \frac{g_{a1}}{p_e} + \frac{g_{a2}}{p_e} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (32.32)$$

Према сл. 32.19 добија се  $g_a = \overline{T_1E} - \overline{T_1C}$  односно

$$g_a = g_{a1} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - r_{b1} \cdot \tan \alpha_w \quad (32.33)$$

Према томе парцијалне дужине активног дела додирнице могу да се одреде према:

$$g_a = g_{a1} = \frac{1}{2} \cdot d_{b1} \left[ \sqrt{\left(\frac{d_{a1}}{d_{b1}}\right)^2 - 1} - \tan \alpha_w \right] \quad (32.34)$$

$$g_f = g_{a2} = \frac{1}{2} \cdot d_{b2} \left[ \sqrt{\left(\frac{d_{a2}}{d_{b2}}\right)^2 - 1} - \tan \alpha_w \right] \quad (32.35)$$

Заменом (32.34) и (32.35) у (32.32) добија се израз за одређивање укупног степена спрезања профила у следећем облику:

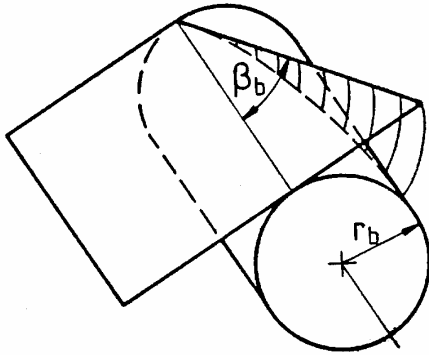
$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1}{2\pi} \left[ \sqrt{\left(\frac{d_{a1}}{d_{b1}}\right)^2 - 1} + u \cdot \sqrt{\left(\frac{d_{a2}}{d_{b2}}\right)^2 - 1} - (u+1) \cdot \tan \alpha_w \right] \quad (32.36)$$

Изрази за прорачун основних геометријских величина цилиндричних еволвентних зупчаника дати су у табlici 32.1.

### 3.2.2. Зупчаници са косим зупцима

#### 3.2.2.1. Облици зубаца

Ради уочавања специфичности облика бока зупца код цилиндричних зупчаника са косим зупцима, најпре ће још једном бити разматрано добијање бока зупца код цилиндричних зупчаника са правим зупцима. Добијање профила зупца код цилиндричних еволвентних зупчаника са правим зупцима дато је на сл. 31.9 односно 32.1. Бочна површина зупца је цилиндрична еволвентна површина па су сви профили у односу на дужину зупца истог облика и истог положаја.



Сл. 32.20. Добијање бочне површине зупца код хеликоидних зупчаника

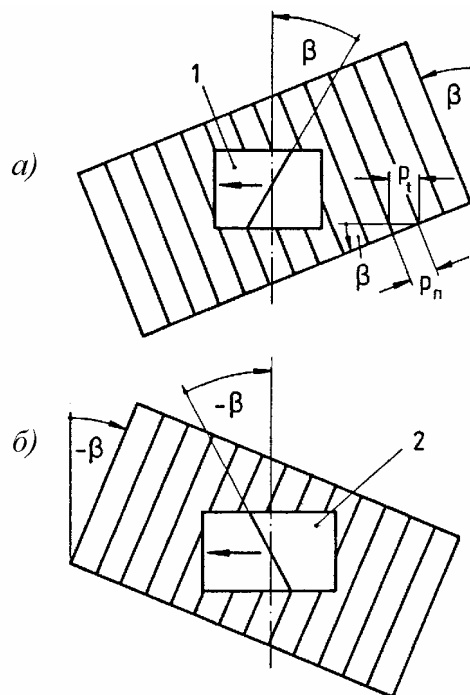
Ова цилиндрична еволвентна бочна површина настаје котрљањем замишљене тангентне равни по основном цилиндру. Било која права тангентне равни основног цилиндра, паралелна изводници основног цилиндра описиваће цилиндричну еволвентну површину. Свака тачка ове праве при томе истовремено описује еволвенту основне кружнице, тако да скуп ових еволвенти чини цилиндричну еволвентну површину, односно дефинише бочну површину зупца. Због тога код ових зупчаника нема потребе за разликовањем бока и профила.

Код цилиндричних еволвентних зупчаника са косим зупцима бочну површину зупца дефинише права која са изводницом основног цилиндра заклапа угао  $\beta_b$  (сл. 32.20). Свака тачка ове праве ће при котрљању тангентне равни по основном цилиндру описивати једну еволвенту основне кружнице.

Међутим за разлику од зупчаника са правим зупцима, све ове еволвенте неће бити описиване истовремено, већ ће бити угаоно померене једна у односу на другу. Почетак свих ових еволвенти биће на једној завојници основног цилиндра, а скуп ових еволвенти чиниће завојну (хеликоидну) површину. Ова еволвентна хеликоидна површина је уствари бочна површина зупца зупчаника са косим зупцима. Због тога се ови зупчаници називају и хеликоидни зупчаници.

#### 3.2.2.2. Основне геометријске величине

На сл. 32.21 приказане су кинематске равни алата у облику зупчасте летве са бочним линијама као и подеони цилиндри зупчаника са тангентама на



Сл. 32.21. Зупчаници са косим зупцима и одговарајући алати:

а) зупчаник 1 са десним нагибом зупца;

б) зупчаник 2 са левим нагибом зупца

бочну линију. Стрелицама су означене обимне брзине зупчаника. За израду зубаца зупчаника 1 (сл. 32.21,а) алат је заокренут за угао  $\beta$  у односу на осу зупчаника, а за израду зубаца зупчаника 2 (сл. 32.21,б) за угао  $-\beta$ . Зупци зупчаника 1 и 2, који чине један зупчasti пар имају дакле супротне углове нагиба.

Према томе алат у облику основне зупчaste летве који се примењује код зупчаника са правим зупцима може се заокретањем за одговарајући угао нагиба  $\beta$  применити и за израду зупчаника са косим зупцима. Профил зубаца алата може се посматрати у два пресека: у пресеку зубаца у равни управној на кинематску осу - чеони пресек - и у пресеку зубаца у равни управној на бокове зубаца - нормални пресек. Профил алата у нормалном пресеку идентичан је са профилом алата код зупчаника са правим зупцима (сл. 32.2).

Величине у чеоном пресеку користе се за одређивање осног растојања и осталих кинематских односа спрегнутих зупчаника и означавају се индексом  $t$ . Величине у нормалном пресеку користе се за одређивања носивости зубаца и кинематских односа при изради зупчаника и означавају се индексом  $n$ .

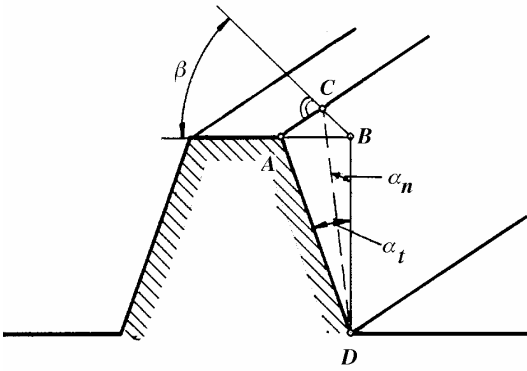
Сви односи изведени за зупчанике са правим зупцима важе и код зупчаника са косим зупцима па ће надаље бити успостављене одговарајуће корелационе зависности између геометријских величина зупчаника са правим и зупчаника са косим зупцима. Према сл. 32.21,а однос између подеоних корака у чеоном и нормалном пресеку је:

$$\frac{p_n}{p_t} = \frac{m_n \cdot \pi}{m_t \cdot \pi} = \frac{m_n}{m_t} = \cos \beta \quad (32.37)$$

Величине  $m_n$  и  $m_t$  означавају модуле зупчаника у чеоном и нормалном пресеку. Вредности модула  $m_n$  одговарају стандардним вредностима модула датим у прилогу ПЗ1-1.

Аналогно изразу (32.37) следи и однос корака на кинематском цилиндру у чеоном и нормалном пресеку

$$\frac{p_{wn}}{p_{wt}} = \cos \beta_w \quad (32.38)$$



Сл. 32.22. Зубац алата у облику зупчасте летве са нормалним и чеоним пресеком

На сл. 32.22 приказан је зубац основне зупчасте летве са одговарајућим пресецима у нормалној и чеоној равни. На овај начин добија се једна тространа пирамида, чије бочне стране чине нормална раван, чеона раван и бочна површина зупца алата. Са слике следи:

$$\tan \alpha_n = \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}}; \quad \tan \alpha_t = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$

па се добија:

$$\frac{\tan \alpha_n}{\tan \alpha_t} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \cos \beta$$

односно

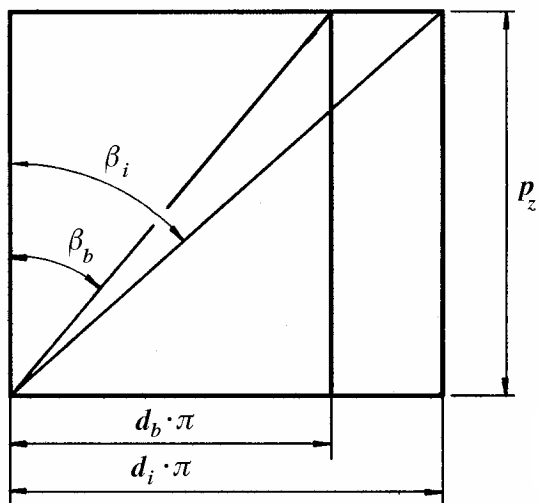
$$\tan \alpha_t = \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} \quad (32.39)$$

Аналогно изразу (32.39) следи за кинематски цилиндар

$$\tan \alpha_{wt} = \frac{\tan \alpha_{wn}}{\cos \beta_w} \quad (32.40)$$

Као што је већ напоменуто код зупчаника са косим зупцима бок зупца ограничен је хеликоидном еволвентном површином (сл. 32.20). Пресеком ове

хеликоидне еволвентне површине са било којим цилиндром пречника  $d_i$ , чија



Сл. 32.23. Развијене завојнице бокова

се оса поклапа са осом основног цилиндра, добијају се одговарајуће завојнице. Све ове завојнице имају исте ходове  $p_z$ , а различите углове нагиба.

Као угао нагиба бока зупца  $\beta$  код цилиндричних еволвентних зупчаника са косим зупцима узима се угао нагиба завојнице бока зупца на подеоном цилиндру. Угао нагиба завојнице бока зупца на основном цилиндру је  $\beta_b$ , а на кинематском цилиндру  $\beta_w$ . Са слике 32.23 следи:

$$p_z = \frac{d_i \cdot \pi}{\tan \beta_i} = \frac{d_b \cdot \pi}{\tan \beta_b} = \frac{d \cdot \pi}{\tan \beta} = \frac{d_w \cdot \pi}{\tan \beta_w}$$

одакле је

$$\frac{\tan \beta_b}{\tan \beta} = \frac{d_b}{d} = \cos \alpha_i; \quad \frac{\tan \beta_b}{\tan \beta_w} = \frac{d_b}{d_w} = \cos \alpha_{wt}$$

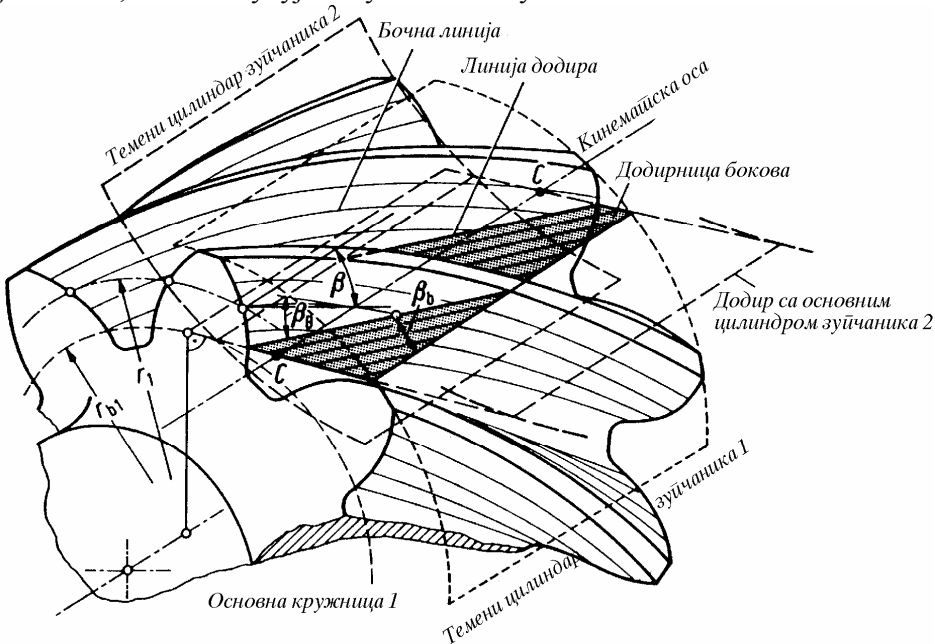
тако да се добија

$$\tan \beta_b = \tan \beta \cdot \cos \alpha_i; \quad \tan \beta_w = \frac{\tan \beta_b}{\cos \alpha_{wt}} = \tan \beta \cdot \frac{\cos \alpha_i}{\cos \alpha_{wt}} \quad (32.41)$$

Положај тренутних линија додира бокова зубаца код зупчаника са правим и косим зупцима се разликује. Линије додира бокова зубаца код зупчаника са правим зупцима паралелне су осам обртања спрегнутих зупчаника. Зупци зупчаника улазе истовремено у захват по целој дужини зупца. Исти је случај и при излазу зубаца из захвата. При томе се линија додира креће од подножја ка врху зупца код погонског зупчаника, односно од врха ка подножју зупца код гоњеног зупчаника.

Линије додира бокова зубаца код цилиндричних еволвентних зупчаника са косим зупцима нису паралелне осам обртања. Због тога зупци зупчаника улазе у захват постепено. Захват почиње на једној страни зупчаника и постепено се шири по целој дужини бока зупца. Линија додира бокова зубаца спрегнутог зупчастог пара је права линија и лежи дијагонално у односу на бок

зупца. Додир почиње у подножју зупца погонског зупчаника, шири се дијагонално по ширини зупца и завршава се на врху зупца (сл. 32.24). Код гоњеног зупчаника додир почиње на врху зупца на пример код предње чеоне површине, линија додира се затим дијагонално шири дуж бока зупца, а завршава се у подножју зупца код задње чеоне површине. Због тога оптерећење зупца није истовремено по целој ширини зупца већ постепено и дијагонално, што омогућује већу носивост зупчаника.



Сл. 32.24. Зупчаник са косим зупцима са додирницом бокова зубаца и линијама додира

Додирницу бокова зубаца дефинише путања линије додира од улаза до излаза из спреге. То је раван која тангира основне цилиндре спрегнутих зупчаника. Активни део додирнице бокова зубаца ограничен је теменим цилиндрима спрегнутих зупчаника (сл. 32.24).

Додирница бокова зубаца као тангентна раван на основне цилиндре спрегнутих зупчаника лако се одређује. Линије додира бокова зубаца налазе се у пресеку ове равни са боковима зубаца и то су праве линије. На сл. 32.25 приказан је активни део додирнице бокова зубаца са линијама додира три пара зубаца у спреси.

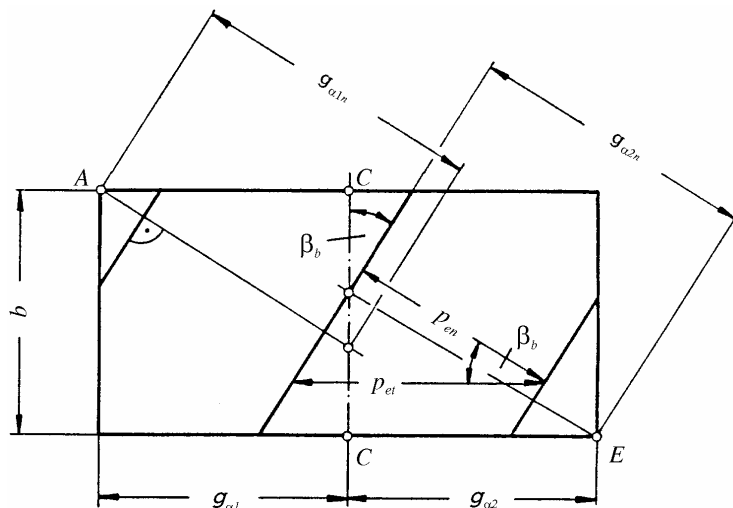
Сходно (сл. 32.25) следи  $p_{en} = p_{et} \cdot \cos \beta_b$  тако да је степен спрезања профила у нормалном пресеку:

$$\varepsilon_{an} = \frac{g_{\alpha 1n}}{p_{en}} + \frac{g_{\alpha 2n}}{p_{en}} = \frac{g_{\alpha 1}}{p_{et} \cdot \cos^2 \beta_b} + \frac{g_{\alpha 2}}{p_{et} \cdot \cos^2 \beta_b}$$

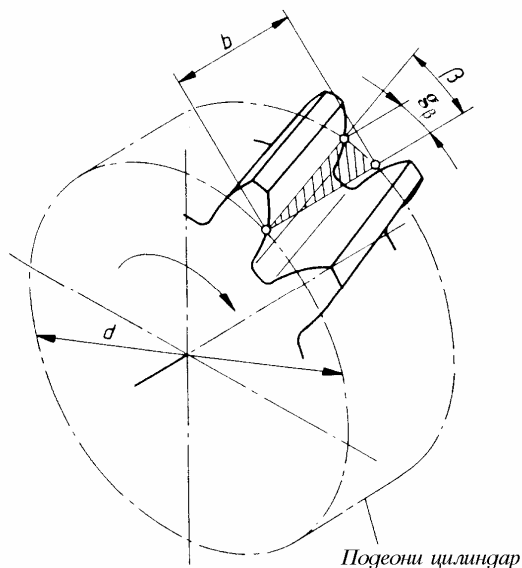
односно према изразу (32.31) следи:

$$\varepsilon_{an} = \frac{\varepsilon_{\alpha 1}}{\cos^2 \beta_b} + \frac{\varepsilon_{\alpha 2}}{\cos^2 \beta_b} = \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\cos^2 \beta_b} \quad (32.42)$$

Израз (32.42) даје везу између степена спрезања профила у нормалној и чеоној равни што се користи при прорачуну носивости зупчаника.



Сл. 32.25. Активни део додирнице бокова са линијама додира за три пара зубаца у спреси



Сл. 32.26. Додирни лук бочних линија

Поред додирног лука профила, код зупчаника са косим зупцима може се дефинисати и додирни лук бочних линија. Додирна линија овде заклапа угао  $\beta_b$  са осом обртања, тако да све тачке бока зупца не почињу и не завршавају додиривање истовремено. Додиривање једног бока почиње у тачки  $A$  на предњој чеоној страни зупчаника (сл. 32.25), а завршава се у тачки  $E$  на задњој чеоној страни. Додирни лук бочних линија је лук кинематске кружнице који одговара углу за који се обрне посматрани зупчаник од тренутка додира тачке

на кинематској кружности предње чеоне површине, до тренутка додир исте тачке на задњој чеоној површини. Према томе додирни лук бочних линија је пројекција бочне линије на чеону раван (сл. 32.26) и износи:

$$g_{\beta} = b \cdot \tan \beta_b$$

Због тога се код цилиндричних зупчаника са косим зупцима одређује и степен спрезања бочних линија:

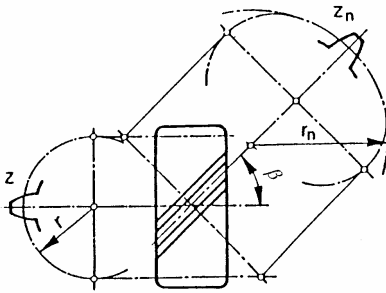
$$\varepsilon_{\beta} = \frac{g_{\beta}}{p_t} = \frac{b \cdot \tan \beta}{m_t \cdot \pi} = \frac{b \cdot \sin \beta}{m_n \cdot \pi} \quad (32.43)$$

Укупни степен спрезања код зупчаника са косим зупцима једнак је збиру степена спрезања профила и степена спрезања бочних линија:

$$\varepsilon_{\gamma} = \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} \quad (32.44)$$

и назива се степен спрезања бокова. Према томе зупчаници са косим зупцима имају већи степен спрезања у односу на одговарајуће зупчанике са правим зупцима.

### 3.2.2.3. Стварни и фиктивни зупчаник



Сл. 32.27. Стварни и фиктивни зупчаник

Ако се зупчаник са косим зупцима пресеке једном равни ( $N-N$ ) која је нормална на бочну линију зупца, онда се у пресеку те равни и подеоног цилиндра пречника  $d$  добија елипса (сл. 32.27). Ова елипса подудар се са фиктивним зупчаником са правим зупцима. Сва напред изведена правила и релације код зупчаника са правим зупцима важе и код зупчаника са косим зупцима, ако се примене на овај фиктивни зупчаник за додир у кинематској тачки  $C$ .

Однос геометријских величина у чеоном и нормалном пресеку:

- ◆ пречник основне кружнице

$$d_{bn} = \frac{d_b}{\cos \beta_b \cdot \cos \beta} \quad (32.45)$$

- ◆ пречник подеоне кружнице

$$d_n = \frac{d}{\cos^2 \beta_b} \quad (32.46)$$

- ◆ бројеви зубаца

$$z_n = \frac{z}{\cos \beta \cdot \cos^2 \beta_b} \approx \frac{z}{\cos^3 \beta_b} \quad (32.47)$$



Таблица 32.1. Изрази за прорачун основних геометријских величина цилиндричних еволвентних зупчаника са правим и косим зупцима

(Индекси: n-нормални пресек; t-чеони пресек; Код зупчаника са правим зупцима индекси t односно n не морају се користити јер је  $a_t = a_n = a$ ; Померање профила: према врху зупца - позитивно, према подножју - негативно; Нагиб зупца: код спољашњег зупчастог пара - десни нагиб је позитиван  $+\beta$ , а леви је негативан  $-\beta$ , код унутрашњег зупчастог пара је обрнуто, - збир углова нагиба  $\beta$  мора бити нула; Сви изрази такође важе и за унутрашње зупчате парове, при чему се број зубаца  $z_2$  узима са негативним предзнаком)

Бр.	Величина	Чеони пресек	Нормални пресек	Напомена
1	Стандардни профил	-	$\alpha_n, h_{aP}, h_{pP}, c$	JUS M.C1.016
2a	Осно растојање	$a = a_d \cdot \cos \alpha_t / \cos \alpha_{wt} = m_n (z_1 + z_2) \cdot \cos \alpha_t / (2 \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha_{wt})$		Заокружити на цео стандардни број
2б	Нулто осно растојање	$a_d = (d_1 + d_2) / 2 = m_t (z_1 + z_2) / 2 = m_n (z_1 + z_2) / (2 \cos \beta)$		
3	Угао нагиба профила алата	$\tan \alpha_t = \tan \alpha_n / \cos \beta$ $\cos \alpha_t = d_b / d$	$\tan \alpha_n = \alpha_t \cdot \cos \beta$	Најчешће је $\alpha_n = \alpha_P$ стандардног профила
4	Угао додирнице	$\cos \alpha_{wt} = d_b / d_w = m_t \cdot (z_1 + z_2) \cdot \cos \alpha_t / (2a) = a_d \cdot \cos \alpha_t / a$ $\text{inv } \alpha_{wt} = \text{inv } \alpha_t + 2 \cdot (x_1 + x_2) \cdot \tan \alpha_n / (z_1 + z_2)$		
5	Збир коефицијената померања профила	$x_1 + x_2 = (\text{inv } \alpha_{wt} - \text{inv } \alpha_t) (z_1 + z_2) / (2 \tan \alpha_n)$		У нормалном пресеку
6	Угао нагиба бочне линије зупца на основном цилиндру	$\sin \beta_b = \sin \beta \cdot \cos \alpha_n$ ; $\tan \beta_b = \tan \beta \cdot \cos \alpha_t$ $\cos \beta_b = \cos \beta \cdot \cos \alpha_n / \cos \alpha_t = \sin \alpha_n / \sin \alpha_t$		
7	Модул	$m_t = m_n / \cos \beta$	$m_n$	$m_n$ - JUS M.C1.015
8	Број зубаца	$z$	$z_n = z / \cos^2 \beta_b \cos \beta \cong z / \cos^2 \beta$	
9	Пречник подеоне кружнице	$d = z \cdot m_t = z \cdot m_n / \cos \beta$	$d_n = d / \cos^2 \beta$	$d_n = \emptyset$ кривине елипсе у нормалном пресеку
10	Пречник основне кружнице	$d_b = d \cdot \cos \alpha_t$	$d_{bn} = d_n \cdot \cos \alpha_n$	
11	Пречници кинематских кружница	$d_{w1} = 2 \cdot a \cdot z_1 / (z_1 + z_2) = 2 \cdot a / (u + 1) = d_1 \cdot \cos \alpha_t / \cos \alpha_{wt}$ $d_{w2} = u \cdot d_{w1}$		$u = z_2 / z_1$
12	Пречници темених кружница	$d_{a1} = 2a - d_2 - 2c = d_1 + 2h_{a1} \leq d_1 + 2 \cdot m_n (1 + x_1)$ $d_{a2} = 2a - d_1 - 2c = d_2 + 2h_{a2} \leq d_2 + 2 \cdot m_n (1 + x_2)$		Заокружити на цео број; $c = (0.1 - 0.3) m_n$ , $h_a$ - висина главе зупца
13	Пречници подножних кружница	$d_{f1} = d_1 - 2h_{f1} = d_1 + 2 \cdot x_1 \cdot m_n - 2h_{fP}$ $d_{f2} = d_2 - 2h_{f2} = d_2 + 2 \cdot x_2 \cdot m_n - 2h_{fP}$		$h_f$ - висина ноге зупца $h_{fP} = k_P m_n$ ( $k_P = 1.2; 1.25; 1.3; 1.4 \dots$ )
14	Подеони корак	$p_t = m_t \cdot \pi = m_n \cdot \pi / \cos \beta$	$p_n = m_n \cdot \pi = p_t \cdot \cos \beta$	
15	Основни корак = спрежни корак	$p_{et} = p_{bt} = p_t \cdot \cos \alpha_t$	$p_{en} = p_{bn} = p_n \cdot \cos \alpha_n = p_{bt} \cdot \cos \beta_b$	
16	Дебљина зупца на подеоној кружници	$s_t = m_t (\pi / 2 + 2x \cdot \text{tg } \alpha_n) + A_s$	$s_n = s_t \cdot \cos \beta$	$A_s$ - толеранција дебљине зупца
17	Парцијални степени спрезања	$\epsilon_1 = \frac{z_1}{2\pi} \left[ \sqrt{(d_{a1} / d_{b1})^2 - 1} - \tan \alpha_{wt} \right]$ $\epsilon_2 = \frac{z_2}{2\pi} \left[ \sqrt{(d_{a2} / d_{b2})^2 - 1} - \tan \alpha_{wt} \right]$		
18	Степен спрезања профила	$\epsilon_a = \epsilon_1 + \epsilon_2 =$ $\epsilon_1 = \frac{z_1}{2\pi} \left[ \sqrt{(d_{a1} / d_{b1})^2 - 1} + u \sqrt{(d_{a2} / d_{b2})^2 - 1} - \tan \alpha_{wt} (u + \right.$		
19	Степен спрезања бочних линија	$\epsilon_\beta = b \cdot \tan \beta / p_t = b \cdot \sin \beta / (m_n \cdot \pi)$		
20	Степен спрезања бокова	$\epsilon_g = \epsilon_a + \epsilon_\beta$		

За прорачун геометрије зупчаника са косим зупцима меродаван је чеони пресек, а за прорачун носивости нормални пресек. Основни изрази за прорачун геометријских величина и у нормалном и у чеоном пресеку дати су у табlici 32.1. Померање профила алата код зупчаника са косим зупцима одређује се на исти начин као и код зупчаника са правим зупцима (тачка 3.2.1.11), али се при томе користе подаци за фиктивни зупчаник односно број зубаца  $z_n$ . Одређивање граничних вредности померања профила дато је у тачки 3.2.4.

#### 3.2.2.4. Карактеристике зупчаника са косим зупцима

На основу свега напред изложеног могу се навести следеће карактеристичне особине цилиндричних еволвентних зупчаника са косим зупцима:

- ◆ Профили зубаца у чеоном пресеку су у облику еволвенте. За прорачун осног растојања и осталих геометријских величина меродаван је чеони пресек. Клизање и котрљање бокова зубаца спрегнутих зупчаника је само у правцу висине зубаца (радијалном правцу).
- ◆ У односу на зупчанике са правим зупцима код зупчаника са косим зупцима линије додира бокова зубаца постављене су косо у односу на бок зупца. То су праве линије које заклапају угао  $\beta_b$  са бочним линијама зубаца (сл. 32.24).
- ◆ Зупци зупчаника улазе постепено у захват, а такође постепено и излазе из захвата. Изузев код зупчаника врло мале ширине, у захвату су истовремено два и више парова зубаца. Укупна крутост парова зубаца у спрези мање варира него код зупчастих парова са правим зупцима. Обртно кретање се равномерно преноси уз смањење буке и вибрација.
- ◆ Укупна дужина додирних линија (односно одговарајућа ефективна ширина зупчаника) мења се са нагибом зупца. Самим тим мења се и јединично оптерећење по ширини зупчаника.
- ◆ Одступања праваца бочних линија и паралелности оса зупчаника мењају носећу ширину као и степен спрезања бочних линија. Одступања корака доводе код зупчаника са косим зупцима до разарања ивица зубаца јер се дешава да целокупно оптерећење преноси темени део зупца. Ово може да се избегне високим квалитетом тачности израде односно корекцијом профила и бочне линије зупца.
- ◆ Опасност од подсецања и гранични број зубаца  $z_G$  смањују се са порастом угла нагиба јер нападни угао у чеоном пресеку (израз 32.39) постаје већи.

#### 3.2.3. Унутрашњи зупчасти парови

Теоријски посматрано унутрашњи зупчасти пар може се добити од спољашњег зупчастог пара. Ако би се број зубаца великог зупчаника повећао

до  $z_2 = \infty$  онда би се добило спрезање зупчаника и зупчасте летве. За негативне вредности броја зубаца  $z_2$  добија се спрезање зупчаника са озубљеним венцем - венчаником. Код озубљеног венца величине  $z_2$ ,  $d_2$  и осно растојање  $a$  имају негативни предзнак, док угао нагиба  $\beta$  мења предзнак у односу на зупчаник.

Бокови зубаца озубљеног венца су еволвенте као и код зупчаника али се при томе користи унутрашњи (конкавни) део еволвенте (сл. 32.28). Према томе код унутрашњих зупчастих парова спрежу се конкавни и конвексни бокови зубаца. У односу на спољашње зупчасте парове, унутрашњи зупчасти парови имају предности али и недостатке.

Предности унутрашњих зупчастих парова:

- ◆ Смерови окретања зупчаника и озубљеног венца су исти, што уз додир конкавних и конвексних бокова зубаца доприноси повољнијим условима клизања, смањује хабање и повећава степен искоришћења.
- ◆ Степен спрезања код унутрашњих зупчастих парова је већи у односу на спољашње зупчасте парове, што утиче на повећање носивости.
- ◆ Код унутрашњих зупчастих парова постиже се већа компактност конструкције јер се зупчаник налази унутар озубљеног венца.
- ◆ Унутрашњи зупчасти парови имају мирнији рад.
- ◆ При додиру конкавних и конвексних бокова зубаца контактна напрезања су мања, а подмазивање повољније у односу на додир два конвексна бока што је случај код спољашњих зупчастих парова. Због тога је и носивост по критеријуму издржљивости бокова зубаца као и у односу на заривавање код унутрашњих зупчастих парова већа.

Недостаци унутрашњих зупчастих парова су:

- ◆ Израда озубљеног венца је сложенија у односу на израду зупчаника.
- ◆ Улежиштење унутрашњих зупчастих парова је теже у односу на спољашње зупчасте парове.
- ◆ Код унутрашњих зупчастих парова много чешће долази до разних неправилности у току спрезања у односу на спољашње зупчасте парове.
- ◆ Између броја зубаца озубљеног венца и зупчаника мора постојати одговарајућа разлика.

Унутрашњи зупчасти парови израђују се најчешће са правим зупцима, док је нешто ређа примена са косим или стреластим зупцима. Најчешће се примењују код планетних преносника.

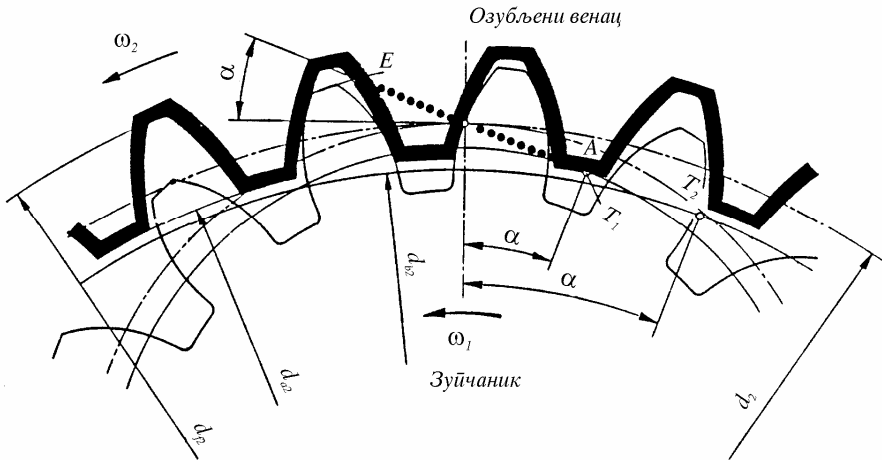
Изрази за прорачун основних геометријских величина који су изведени за спољашње зупчасте парове могу се применити и код унутрашњих зупчастих парова при чему се бројеви зубаца  $z_2$  узимају са негативним предзнаком (таблица 32.1). Померање профила се при томе од подножја ка темену зупца рачуна као позитивно, а од темена ка подножју као негативно.

Пречник подножне кружнице озубљеног венца добија се зависно од параметара алата:

$$d_{f2} = 2a_0 - d_{a0} \quad (32.48)$$

где су:  $a_0$  - осно растојање при изради алатним зупчаником при последњем пролазу,

$d_{a0}$  - пречник темене кружнице алатног зупчаника.



Сл. 32.28. Унутрашњи зупчasti пар

Негативно померање профила означава према дефиницији (супротно у односу на спољашње зупчaste парове) одмицање профила зупца од основне кружнице. На тај начин може се повећати носивост бокова и подножја.

Код унутрашњих зупчastих парова не постоји опасност подсецања профила зупца. Међутим у односу на спољашње зупчaste парове могућност сметњи при спрезању је знатно израженија, што треба имати у обзир при избору коефицијената померања профила и при прорачуну геометријских величина унутрашњих зупчastих парова (тачка 3.2.4).

### 3.2.4. Границе геометријског облика зубаца зупчаника

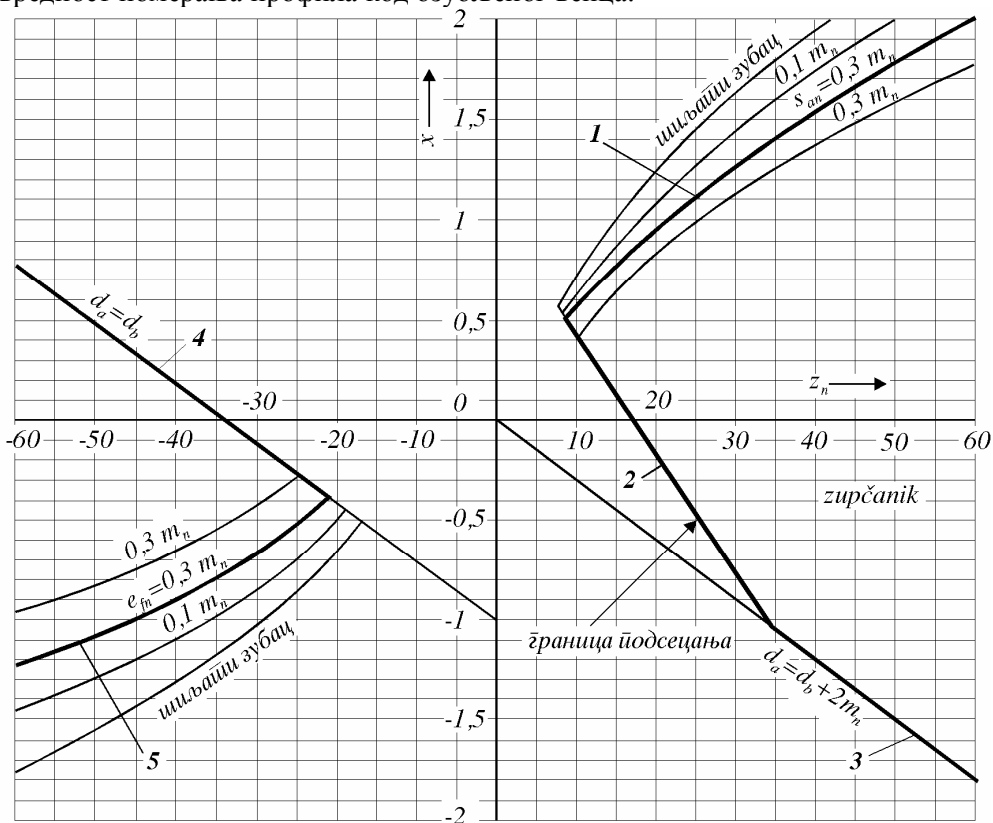
О границама у погледу геометриског облика зубаца зупчаника било је речи у тачки 3.2.1.11. Међутим то се односило на зупчанике са правим зупцима и то су махом била разматрања теоријског карактера. Због тога је неопходно све ове границе дати на једном месту, проширити их и на зупчанике са косим зупцима и на озубљене венце уз одговарајуће дијаграме и изразе за ефикасну примену. При томе треба разликовати границе које се односе на зупчаник посебно и границе које се односе на зупчasti пар. Међутим највећа ограничења у погледу геометријског облика постоје код унутрашњих зупчastих парова.

#### 3.2.4.1. Границе везане за зупчаник

Границе геометријског облика зубаца зупчаника везане за зупчаник посебно, узимају у обзир померање профила алата односно гранични број зубаца зупчаника. Граничне линије геометријског облика зубаца еволвентних зупчаника приказане су на слици 32.29, и могу се разврстати на следећи начин.

♦ **Границе 1 и 5.** Лучну дебљину зупца на теменој кружници зупчаника одређује линија 1, а лучну ширину међузубља на подножној кружници

озубљеног венца одређује линија 5. Обадве величине су ограничене у погледу своје минималне вредности која најчешће износи  $0,2m_n$ . Прорачун ових величина изводи се према изразу (32.15). С обзиром на промену облика зупца при померању профила алата гранична линија 1 дефинише максималну вредност померања профила код зупчаника, а гранична линија 5 минималну вредност померања профила код озубљеног венца.



Сл. 32.29. Дијаграм за избор коефицијента померања профила код еволвентних зупчаника. Граничне линије: 1 - лучна дељина зупца на теменој кружници; 2 - граница подсецања; 3,4 - минимални пречник темене кружнице; 5 - минимална лучна ширина међузубља.

♦ **Границе 3 и 4.** Додир бочне површине зупца испод основне кружнице није могућ у току спрезања. Због тога код зупчастих парова са нормалном висином зупца важе следећа ограничења:

- код зупчаника (гранична линија 3)  $d_a \geq d_b + 2m_n$
- код озубљеног венца (гранична линија 4)  $|d_a| \geq |d_b|$

(32.49)

На овај начин добија се код зупчаника минимална вредност померања профила (гранична линија 3), а код озубљеног венца максимална вредност померања профила (гранична линија 4).

♦ **Граница 2.** Подсецање настаје када меродавна темена линија алата сече додирницу испред тачке  $T_1$  (сл. 32.14). При томе релативна путања врха зупца алата сече еволвентни профил зупца у тачки  $P$ . Подсечени зупци су

ослабљени у подножју и имају скраћену корисну дужину еволвентног профила. Подсецање зависи и од тачке где темена кружница спрегнутог зупчаника сече активни део додирнице (сл. 32.14)

Узимајући у обзир и зупчанике са косим зупцима израз (32.27) за граничне услове у односу на подсецање (сл. 32.16) може да се напише у облику:

$$h_{Na0} - x \cdot m = \frac{d \cdot \sin^2 \alpha_t}{2} = \frac{m_n \cdot z \cdot \sin^2 \alpha_t}{2 \cdot \cos \beta}$$

На тај начин израз за гранични број зубаца добија се у облику:

$$z_G = 2 \cdot \cos \beta \cdot \frac{h_{Na0} - x \cdot m_n}{m_n \cdot \sin^2 \alpha_t} = 2 \cdot \cos \beta \cdot \frac{h_{a0} - \rho_{a0} (1 - \sin \alpha_n) - x \cdot m_n}{m_n \cdot \sin^2 \alpha_t} \quad (32.50)$$

Позитивним померањем, мањом висином теменог дела алата и већим углом додирнице (што је случај код зупчаника са косим зупцима) може се избећи подсецање и смањити гранични број зубаца.

Минимална вредност коефицијента померања профила (гранична линија 2) код корисне висине теменог дела алата  $h_{Na0} = m_n$  је:

$$x = 1 - \frac{z \cdot \sin^2 \alpha_t}{2 \cdot \cos \beta} = 1 - \frac{z_n \cdot \sin^2 \alpha_t}{2} \quad (32.51)$$

где је  $z_n$  број зубаца фиктивног зупчаника према (32.47).

### 3.2.4.2. Границе везане за зупчasti пар

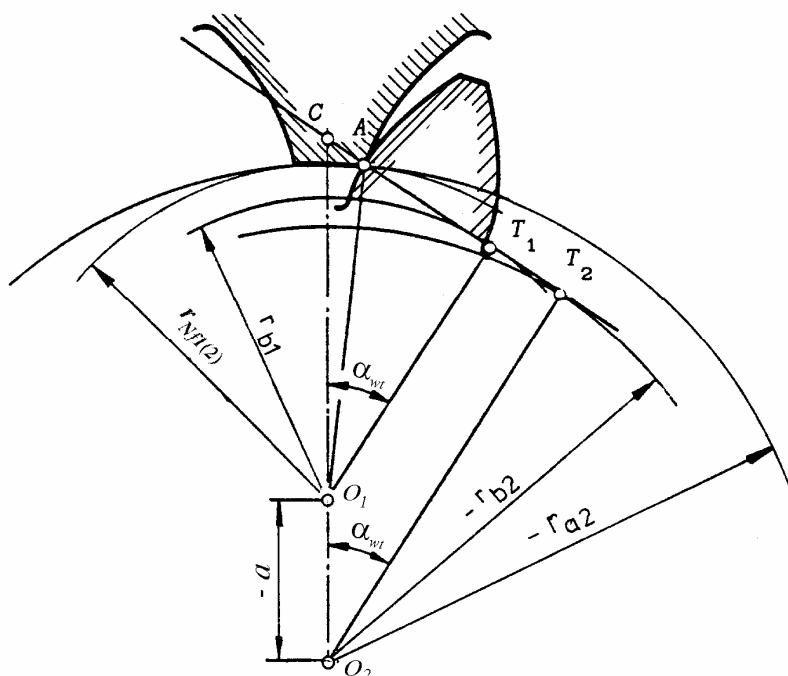
Границе геометријског облика зубаца зупчаника везане за зупчasti пар махом се односе на сметње при спрезању односно на интерференцу. Интерференца настаје уколико дође до спрезања еволвентног теменог дела једног зупчаника са нееволвентним прелазним делом подножја зупца другог зупчаника. Додирна тачка мора због тога бити изнад задње еволвентне тачке  $P$  подножја зупца која је одређена полупречницима  $r_{Nf1(0)}$  и  $r_{Nf2(0)}$  (индекс "0" односи се на алат). Тачку  $P$  дефинише алат у току израде. Од тачке  $P$  ка подножју наставља се прелазни део бока зупца, а ка темену еволвентни део бока зупца на коме може несметано да дође до спрезања.

Почетак активног дела бока зупца одређује почетна  $A$  (сл. 32.17,б) и крајња  $E$  тачка активног дела додирнице, односно њима припадајуће кружнице у подножном делу зупца полупречника  $r_{Nf1(2)}$  и  $r_{Nf2(1)}$ .

Према томе до сметњи при спрезању неће доћи уколико је:

$$r_{Nf1(2)} \geq r_{Nf1(0)} \quad \text{односно} \quad r_{Nf2(1)} \geq r_{Nf2(0)} \quad (32.52)$$

Код спољашњих зупчastих парова који су израђени алатом у облику зупчaste летве услов (32.52) је најчешће испуњен. При изради алатним зупчаником положај тачке  $P$  одређује пречник темене кружнице алата. За темену висину зупца алата  $h_{a0} = 1,25m$  код спољашњих зупчastих парова у највећем броју случајева не треба очекивати сметње при спрезању.



Сл. 32.30. Сметње при спрезању између подножног дела зупца зупчаника и теменог дела зупца озубљеног венца

Код унутрашњих зупчастих парова овакве сметње при спрезању су врло честе па је неопходна провера услова (32.52). При томе могу да се јаве следеће сметње при спрезању.

ⓘ Сметње при спрезању између подножног дела зупца зупчаника и теменог дела зупца озубљеног венца (сл. 32.30). Почетна тачка активног дела бока зупца зупчаника  $A$  при спрезању са озубљеним венцем одређена је полупречником  $r_{Nf1(2)}$ :

$$r_{Nf1(2)} = \sqrt{r_{b1}^2 + \left( \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} + a \cdot \sin \alpha_{wr} \right)^2} \quad (32.53)$$

Положај тачке  $P$  зупчаника при изради алатом у облику зупчасте летве одређен је полупречником  $r_{Nf1(0)}$  односно:

$$r_{Nf1(0)} = \sqrt{r_{b1}^2 + \left( r_1 \cdot \sin \alpha_t - \frac{h_{Na0} - x \cdot m_n}{\sin \alpha_t} \right)^2} \quad (32.54)$$

а при изради алатним зупчаником:

$$r_{Nf1(0)} = \sqrt{r_{b1}^2 + \left( a_0 \cdot \sin \alpha_{wr0} - \sqrt{r_{Na0}^2 - r_{b0}^2} \right)^2} \quad (32.55)$$

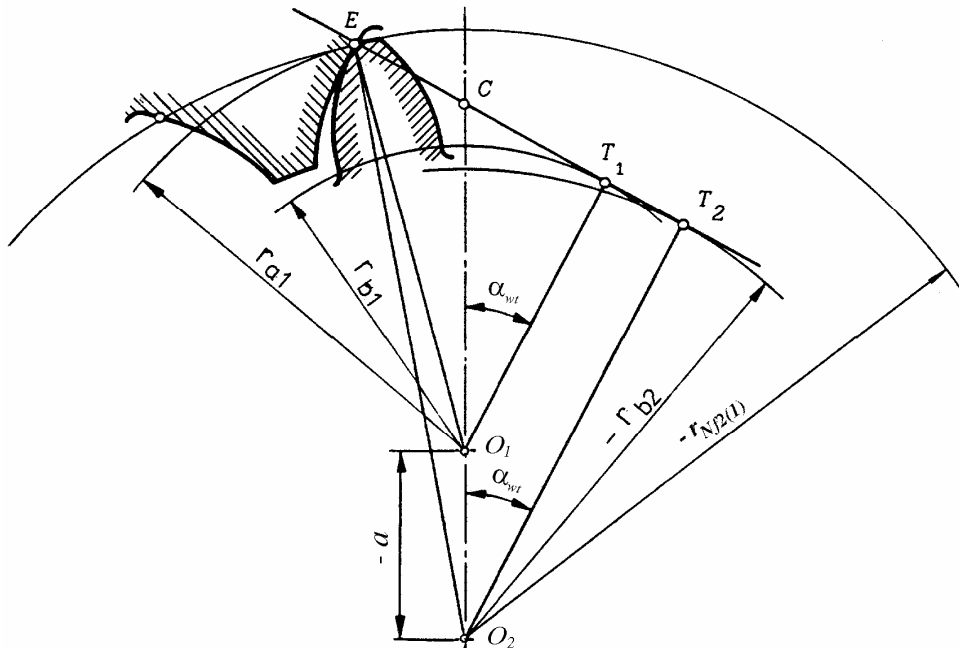
ⓘ Сметње при спрезању између теменог дела зупца зупчаника и подножног дела зупца озубљеног венца (сл. 32.31). Почетна подножна тачка  $E$

активног дела бока зупца озубљеног венца при спрезању са зупчаником одређена је полупречником  $r_{Nf2(1)}$ , односно:

$$r_{Nf2(1)} = -\sqrt{r_{b2}^2 + \left(\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - a \cdot \sin \alpha_{wt}\right)^2} \quad (32.56)$$

Положај тачке  $P$  озубљеног венца одређен је полупречником  $r_{Nf2(0)}$  односно:

$$r_{Nf2(0)} = -\sqrt{r_{b2}^2 + \left(a_0 \cdot \sin \alpha_{wt0} - \sqrt{r_{Na0}^2 - r_{b0}^2}\right)^2} \quad (32.57)$$



Сл. 32.31. Сметње при спрезању између теменог дела зупца зупчаника и подножног дела зупца озубљеног венца

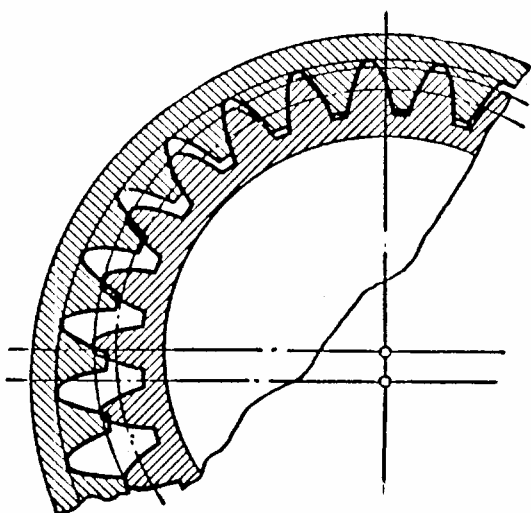
У изразима (32.53) и (32.56), сходно напред усвојеном ставу (тачка 3.2.3), величине  $r_{b2}$  и  $a$  имају негативни предзнак.

Уколико према прорачуну постоје сметње при спрезању неопходно је смањеје пречника темене кружнице одговарајућег зупчаника или озубљеног венца ради испуњења услова (32.52). То се може извршити одговарајућим померањем профила, скраћењем теменог дела зупца или изменом карактеристика алата. Треба имати у виду да се на овај начин смањује степен спрезања профила.

⊠ Поред напред наведених сметњи код унутрашњих зупчастих парова постоји и могућност интерференце врхова зубаца спрегнутих зупчаника (сл.32.32). Код мале разлике бројева зубаца унутрашњег зупчастог пара постоји опасност да при спрезању дође до преклапања врхова њихових зубаца. Иста опасност постоји и при изради озубљеног венца алатним зупчаником. У



случају да је разлика бројева зубаца озубљеног венца и са њим спрегнутог зупчаника мања од 10 неопходно је извршити ову проверу.



Сл. 32.32. Интерференца  
темених делова зубаца  
унутрашњег зупчастог пара

### 3.2.5. Мерење и контрола цилиндричних еволвентних зупчаника

Геометријске мере и облици зупчаника као што су профил зупца, корак, осно растојање и др. не могу бити израђени са апсолутном тачношћу, што намеће потребу за прописивањем дозвољених одступања односно толеранција. Толеранције зупчаника имају врло велики утицај како на кинематске параметре тако и на носивост зупчастих преносника. Виши квалитет тачности израде омогућује мање зазоре у преноснику, већу тачност у преносу кретања, смањење буке и вибрација као и већу носивост. Треба такође имати у виду да виши квалитет тачности израде поскупљује цену зупчаника.

Толеранције зупчаника обухваћене су нашим стандардима JUS M.C1.030...036 и међународним стандардом ISO 1328-1975. JUS стандард се у извесној мери разликује од ISO-система толеранција. Толеранције зупчаника обухвата и DIN 3960...70, али се оне нешто разликују у односу на ISO систем толеранција.

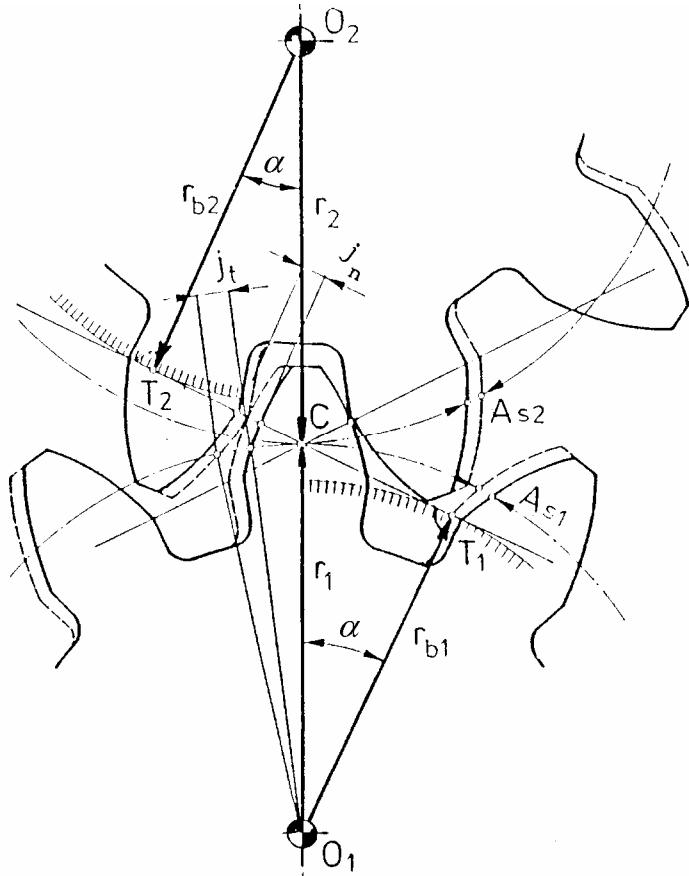
Систем толеранција зупчаника дефинише положај толеранцијских поља мера и облика зупчаника. За све толеранције предвиђено је 12 квалитета при чему број 1 означава највиши квалитет, а број 12 најнижи квалитет односно највеће толеранцијско поље. Гранична одступања праваца бочне линије, подеоног и основног корака, дебљине зупца односно мере преко зубаца, осног растојања, положаја оса вратила зупчаника, смернице за избор толеранција зупчаника према DIN, као и пример начина избора толеранција дате су у прилозима П32-5...П32-11.

### 3.2.5.1. Бочни зазор

Због грешака и нетачности при изради (грешке у облику профила, у кораку и дебљини зупца), при склапању (нетачно осно растојање, ексцентричност), као и при раду (деформације од механичких и топлотних напрезања, вибрација, дебљине слоја мазива) намеће се потреба постојања бочног зазора. Зато је неопходно да дебљина зупца буде мања од ширине међузубља ( $s < e$ ) па је кружни бочни зазор једнак

$$j_t = e - s$$

Ова разлика у дебљини зупца и ширини међузубља постиже се приближавањем алата при изради зупчаника.



Сл. 32.33. Кружни ( $j_t$ ) и нормални ( $j_n$ ) бочни зазор код зупчастог пара са правим зупцима

Бочни зазор може да се изрази као кружни бочни зазор у чеоном пресеку  $j_t$  који се мери по обиму додирне кружнице или као нормални бочни зазор  $j_n$  који је једнак најкраћем растојању бокова зубаца (сл. 32.33). Веза између ова два облика бочног зазора је:

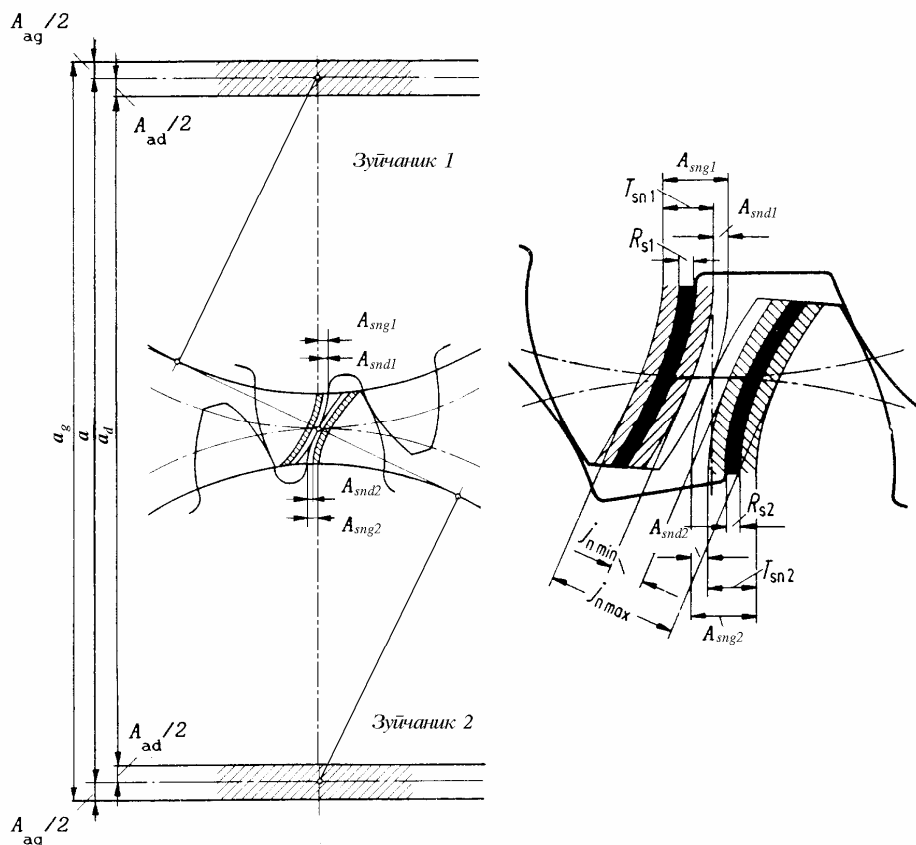
$$j_n = j_t \cdot \cos \alpha_n \cdot \cos \beta \quad (32.58)$$

Бочни зазор обезбеђује се прописивањем одговарајућих одступања од којих он зависи, а то су пре свега одступање дебљине зубаца  $A_s$  односно мере преко већег броја зубаца  $A_{sn}$  и одступања осног растојања спрегнутих зупчаника  $A_a$  (сл. 32.34). Ако су ове величине познате онда кружни бочни зазор  $j_t$  може да се одреди према

$$j_t = \frac{2 \cdot A_a \cdot \tan \alpha_n - (A_{sn1} + A_{sn2})}{\cos \beta} \quad (32.59)$$

а нормални бочни зазор према (32.58). Бочни зазор је највећи уколико је одступање мере преко зубаца једнако доњој граничној вредности ( $A_{snd}$ ) и одступање осног растојања позитивно ( $A_{ag}$ ), а најмањи уколико је одступање мере преко зубаца једнако горњој граничној вредности ( $A_{sng}$ ) и одступање осног растојања негативно ( $A_{ad}$ ).

Мерење бочног зазора врши се код неоптерећеног зупчастог пара и због одступања озубљења, кућишта и лежаја најчешће је мањи од теоријског. Радни бочни зазор зависи и од загревања и деформације елемената преносника у току рада, што треба имати у виду при прописивању његове вредности.



Сл. 32.34. Одступања дебљине зубаца и осног растојања и бочни зазор

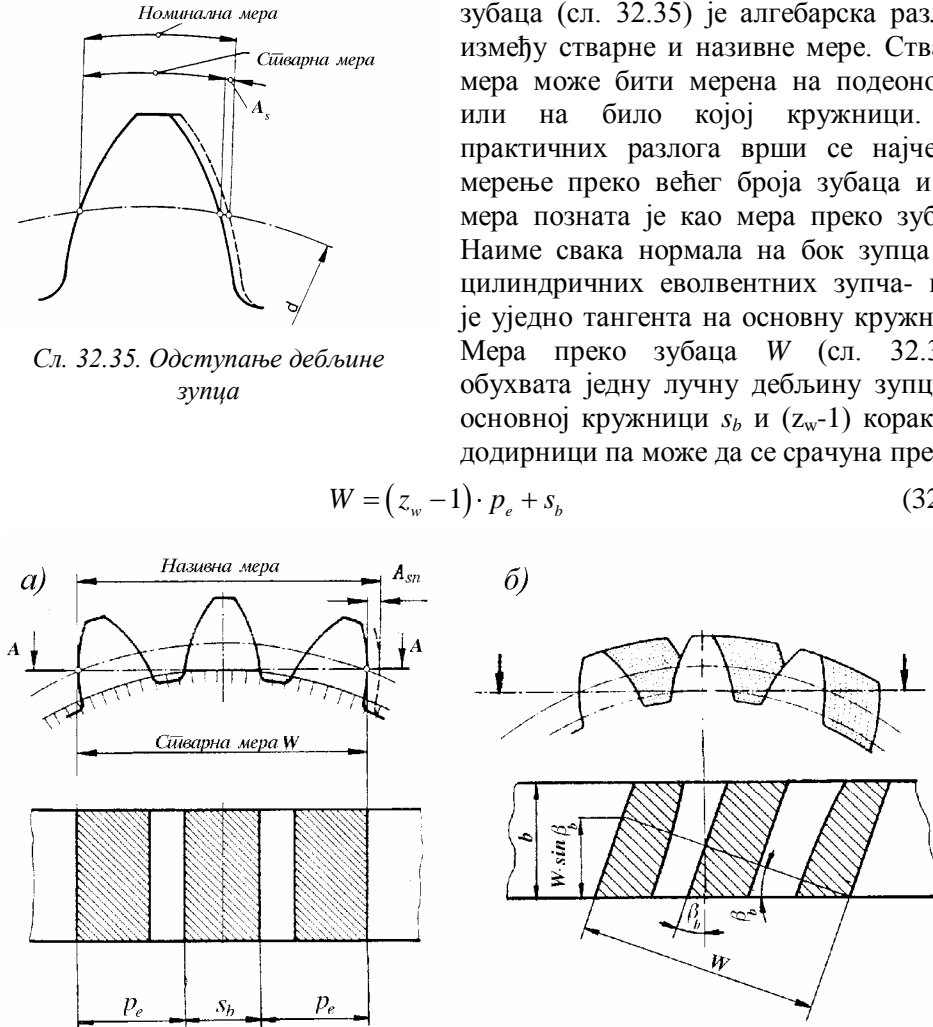
Кружни бочни зазор креће се у границама:

m mm	0,8...1,75	2...3	3,25...5	6...10	12...25
j <sub>t</sub> μm	50...100	80...130	100...230	180...400	250...1000

### 3.2.5.2. Мера преко зубаца

Као што је већ речено толеранција дебљине зубаца утиче на величину бочног зазора. Одступање дебљине зубаца (сл. 32.35) је алгебарска разлика између стварне и називне мере. Стварна мера може бити мерена на подеоној  $A_s$  или на било којој кружници. Из практичних разлога врши се најчешће мерење преко већег броја зубаца и ова мера позната је као мера преко зубаца. Наиме свака нормала на бок зупца код цилиндричних еволвентних зупчаника је уједно тангента на основну кружницу. Мера преко зубаца  $W$  (сл. 32.36,а) обухвата једну лучну дебљину зупца на основној кружници  $s_b$  и  $(z_w-1)$  корака на додирници па може да се срачуна према:

$$W = (z_w - 1) \cdot p_e + s_b \quad (32.60)$$



Сл. 32.36. Мера преко зуба код зупчаника са правим (а) и косим (б) зупцима.

Узимајући у обзир изразе (32.4) и (32.13) односно (32.11) мера преко зубаца код цилиндричних еволвентних зупчаника са правим зупцима може да се одреди према:

$$W = m \cdot \cos \alpha \cdot [\pi \cdot (z_w - 0.5) + z \cdot \operatorname{inv} \alpha] + 2x \cdot m \cdot \sin \alpha \quad (32.61)$$

Код зупчаника са косим зупцима мера преко зубаца изводи се само у нормалној равни и износи:

$$W = m_n \cdot \cos \alpha_n \cdot [\pi \cdot (z_w - 0.5) + z \cdot \operatorname{inv} \alpha_t] + 2x \cdot m_n \cdot \sin \alpha_n \quad (32.62)$$

Зависно од померања профила  $x$  (код зупчаника са косим зупцима  $x$  се увек односи на нормални пресек) и броја зубаца  $z$  ( $z_n$ ) мерни број зубаца  $z_w$  може се одредити према дијаграму у прилогу П32-4.

Код зупчаника са косим зупцима мерење преко већег броја зубаца могуће је само уколико ширина зупчаника испуњава услов (сл. 32.36,б):

$$b > W \cdot \sin \beta_b \quad (32.63)$$

Мерни број зубаца  $z_w$  заокружује се на целобројну вредност при чему је  $z_w \geq 2$

