DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

SADRŽAJ

1. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA
1.1. Diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive
1.2. Homogena diferencijalna jednačina
1.3. Homogena linearna diferencijalna jednačina
1.4. Linearna diferencijalna jednačina
1.5. Bernulijeva diferencijalna jednačina
1.6. Rikatijeva diferencijalna jednačina
1.7. Diferencijalna jednačina totalnog diferencijala
1.8. Integracioni faktor
1.9. Diferencijalna jednačina u izrazu rešena po nepoznatoj funkciji

2. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA
2.1. Diferencijalna jednačina koja ne sadrži funkciju u izrazu
2.2. DJ koja ne sadrži argument u izrazu: $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$
2.3. Homogena diferencijalna jednačina višeg reda
2.4. Homogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima
2.5. Nehomogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima
2.6. Metoda varijacije konstanata
2.7. Metoda partikularnog rešenja
2.8. Ojlerova diferencijalna jednačina

3. SISTEMI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA
3.1. Svođenje na diferencijalnu jednačinu višeg reda
3.2. Prvi integrali
3.3. Linearni sistemi diferencijalnih jednačina sa konstantnim keoficijentima

4. PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE
4.1. Homogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda
4.2. Nehomogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda

1. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

1.1. Diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive
1.2. Homogena diferencijalna jednačina
1.3. Homogena linearna diferencijalna jednačina
1.4. Linearna diferencijalna jednačina
1.5. Bernulijeva diferencijalna jednačina
1.6. Rikatijeva diferencijalna jednačina
1.7. Diferencijalna jednačina totalnog diferencijala
1.8. Upotreba integracionog faktora
1.9. Diferencijalna jednačina u izrazu rešena po nepoznatoj funkciji

2. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA

Vrste ovih jednačina i metode za njihovo rešavanje izložićemo pre svega proučavajaći diferencijalne jednačine drugog reda.

2.1. Diferencijalna jednačina koja ne sadrži funkciju u izrazu

Ovo je diferencijalna jednačina oblika

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (k < n).$$

Njen red snižavamo uvođenjem nove zavisno promenljive $z(x) = y^{(k)}(x)$, tako da dobijamo novu jednačinu

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

2.2. DJ koja ne sadrži argument u izrazu

Ovo je diferencijalna jednačina oblika

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Njen red snižavamo uvođenjem nove zavisno promenljive $p(y) = y'$. Odatle je

$$p = y', \quad y'' = \frac{dy}{dp}p.$$

Zadatak 2.2.1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + 2y(y')^3 = 0$.

Rešenje. Opšte rešenje glasi $y = \arctan(C_1 x + C_2)$.

2.3. Homogena DJ višeg reda

Ovo je diferencijalna jednačina u kojoj funkcija ima osobinu

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Rešava se smenom

$$y = e^{\int z(x)dx}.$$

Zadatak 2.3.1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $xyy'' - x(y')^2 = yy'$.

Rešenje. $y = C_1 e^{C_2 x^2}$.

2.4. Homogena linearna DJ sa konstantnim koeficijentima

Ovo je diferencijalna jednačina oblika

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \qquad (a_k = const).$$

Zadatak 2.4.1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y''' - 13y'' + 12y' = 0.$

Rešenje. $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{12x}.$

Zadatak 2.4.2. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y^{VI} + y''' = 0.$

Rešenje. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-x} + C_5e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_6e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$

2.5. Nehomogena linearna DJ sa konstantnim koeficijentima

Ovo je diferencijalna jednačina oblika

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x) \quad (a_k = const).$$

Zadatak 2.5.1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 8y' + 7y = 14.$

Rešenje. $y = C_1e^x + C_2e^{7x} + 2.$

Zadatak 2.5.2. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 9y = e^{3x}\cos x.$

Rešenje. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{37}(6\sin x - \cos x)e^x.$

Zadatak 2.5.3. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - y = xe^x.$

Rešenje. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{4}x(x-1)e^x.$

Zadatak 2.5.3. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + y' = 2x.$

Rešenje. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x(x-2).$

2.6. Metoda varijacije konstanata

Neka je rešenje diferencijalne jednačine

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \quad (C_k = const)$$

dato izrazom

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x).$$

Lagrange je rešenje jednačine

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f((x)$$

potražio u obliku

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \cdots + C_n(x) y_n(x).$$

Ove funkcije određujemo iz sistema

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + \cdots + C_n' y_n = 0,$$

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + \cdots + C_n' y_n' = 0,$$

$$\cdots$$

$$C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0,$$

$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x).$$

Zadatak 2.6.1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $xy'' - y' = x^2$.

Rešenje. $y = D_1 + D_2 x^2 + \frac{1}{3} x^3$.

2.7. Ojlerova DJ

Ovo je diferencijalna jednačina oblika

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \qquad (a_k = const).$$

Uvođenjem smene $x = e^t$, dobijaju se relacije

$$y' = \frac{dy}{dt}\, e^{-t}, \quad y'' = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) e^{-2t}, \ldots .$$

Početna jednačina postaje diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima.

Zadatak 2.7.1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $x^2y'' + xy + y = 2\sin(\ln x)$.

Rešenje. $y = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x) - \ln x\cos(\ln x)$.

3. SISTEMI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Definicija. Neka su $F_1,\ldots, F_n$ date funkcije koje preslikavaju neki podskup iz R^{n+1} u R. Sistem jednačina

$$y_k' = F_k(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (k = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

naziva se *eksplicitni sistem* diferencijalnih jednačina prvog reda po nepoznatim funkcijama $y_k: (a, b) \to R \quad (k = 1, \ldots, n)$.

Definicija. *Rešenje* sistema (1) je uređena n-torka funkcija

$$(y_1(x), \ldots\ldots, y_n(x)) \quad (x \in (a, b))$$

takva da kada se uvrste u sistem (1) on postaje identitet.

Sistem diferencijalnih jednačina koji predstavlja izraz rešen po najvišem izvodu je *normalan*. Takav je i sistem (1).

Svaki sistem od n jednačina prvog reda može se svesti na normalni sistem oblika (1).

Svaki normalni sistem od n jednačina prvog reda može se svestri na jednu jednačinu n-tog reda po jednoj od nepoznatih funkcija.

Obrnuto, svaka jednačina n-tog reda po nepoznatoj funkciji y može se svesti na normalni sistem od n jednačina prvog reda.

3.1. Svođenje na diferencijalnu jednačinu višeg reda

Primer. Rešiti sledeći sistem diferencijalnih jednačina

$$y'(t) = y + 5z,$$

$$z'(t) = -y - 3z.$$

Rešenje.

$$y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)\, e^{-x}, \qquad z = \frac{1}{5}((C_2 - 2C_1)\cos x - (C_1 + 2C_2)\sin x)\, e^{-x}.$$

3.2. Prvi integrali

Definicija. *Prvi integral* sistem (1) je svaka relacija

$$\phi(x, y_1, \dots, y_n) = C \quad (C - konstanta)$$

koju zadovoljava svaka *n*-torka $(y_1(x), \dots, y_n(x))$ koja je rešenje sistema (1).

Primer. Rešiti sledeći sistem diferencijalnih jednačina

$$x'(t) = x + 2y + t,$$

$$y'(t) = 2x + y + t.$$

Rešenje. Sabiranjem jednačina ovog sistema dobiće se

$$x'(t) + y'(t) = 3(x + y) + 2t$$

Neka je $u = x+y$. Tada je $u'(t) = x'(t) + y'(t)$, pa je poslednja jednačina oblika

$$u'(t) - 3u = 2t.$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina prvog reda. Njeno rešenje je $u = C_1 e^{3t} - \frac{2}{3}t - \frac{2}{9}$. Dakle,

$$x + y = C_1 e^{3t} - \frac{2}{3}t - \frac{2}{9}$$

je jedan prvi integral sistema (*).

Oduzimanjem druge od prve jednačine sistema (*) dobiće se

$$x'(t) - y'(t) = -(x - y).$$

Smenom v =*x*-*y*, ova jednačina postaje $v' + v = 0$, a njeno rešenje je $v = C_2 e^{-t}$. Vraćanjem na stare promenljive, dobiće se još jedan prvi integral sistema (*) oblika

$$x - y = C_2 e^{-t}.$$

Iz ove dve relacije izračunava se *x* i *y* u obliku

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}, \qquad y = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9},$$

što je rešenje sistema (*).

Definicija. Sistem diferencijalnih jednačina prvog reda po nepoznatim funkcijama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oblika

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \ldots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \ldots, x_n)}$$

(8)

gde su $X_i (i = 1,2, \ldots, n)$ poznate funkcije po $x_1, x_2, \ldots, x_n$ naziva se *simetričnim* sistemom.

Primer. Rešiti sledeći simetrični sistem diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)} \quad (2)$$

Rešenje. Neka je *x*-nezavisno promenljiva, a *y* i *z* funkcija od *x*. Iz (2) sledi

$$\frac{dx + dy + dz}{x(y-z) + y(z-x) + z(x-y)} = \frac{d(x+y+z)}{0}$$

Dakle, $x + y + z = C_1$, a to je jedan prvi integral datog sistema. Zatim, iz

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} \Rightarrow \frac{dx}{x(y - C_1 + x + y)} = \frac{dy}{y(C_1 - x - y - x)},$$

dobijamo

$$x(2y - C_1 + x)dy = y(C_1 - 2x - y)\,dx,$$

tj.

$$y(C_1 - 2x - y)dx - x(2y - C_1 + x)dy = 0.$$

Poslednja jednačina je diferencijalna jednačina totalnog diferencijala čije rešenje je

$$xy(C_1 - x - y) = C_2,$$

što znači da je $xyz = C_2$ takodje prvi integral sistema. Iz ova dva prva integrala dobja se rešenje za y i z, tj. opšti integral sistema (2).

3.3. Linearni sistemi diferencijalnih jednačina sa konstantnim keoficijentima

Ovde se razmatra sistem oblika:

$$x' + a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$

$$y' + a_2x + b_2y + c_2z = 0,$$

$$z' + a_3x + b_3y + c_3z = 0,$$

gde su a_k, b_k, c_k $(k = 1,2,3)$ date konstante.

Rešenje sistema se može tražiti u obliku:

$$x = \lambda e^{rt}, \quad y = \mu e^{rt}, \quad z = \nu e^{rt}.$$

gde su $\lambda,\ \mu,\ \nu$ i r konstante koje se odredjuju sledećim postupkom:

Kako je

$$x' = r\lambda e^{rt}, \quad y' = r\mu e^{rt}, \quad z' = r\nu e^{rt},$$

zamenom u sistem diferencijalnih jednačina dobiće se sledeći sistem linearnih algebarskih jednačina

$$(r + a_1)\lambda + b_1\mu + c_1\nu = 0,$$

$$a_2\lambda + (r + b_2)\mu + c_2\nu = 0,$$

$$a_3\lambda + b_3\mu + (r + c_3)\nu = 0.$$

Homogeni sistem ima netrivijalna rešenja po $\lambda,\ \mu,\ \nu$ ako je

$$\begin{vmatrix} r+a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & r+b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & r+c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Neka su koreni jednačine različiti i neka su označeni sa r_1, r_2, r_3. Svakom korenu r_k odgovara netrivijalno rešenje $(\lambda_\mathrm{k}, \mu_\mathrm{k}, \nu_\mathrm{k})$ sistema gde je k = 1,2,3. Tada opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina ima oblik:

$$x = A_1\lambda_1 e^{r1t} + A_2\lambda_{21} e^{r2t} + A_3\lambda_3 e^{r3t},$$

$$y = A_1\mu_1 e^{r1t} + A_2\mu_2 e^{r2t} + A_3\mu_3 e^{r3t},$$

$$z = A_1\nu_1 e^{r1t} + A_2\nu_2 e^{r2t} + A_3\nu_3 e^{r3t},$$

gde su A_1, A_2, A_3 proizvoljne konstante.

Primer. Dat je sistem:

$$\frac{dx}{dt} + y + z = 0, \qquad \frac{dy}{dt} + x + z = 0, \qquad \frac{dz}{dt} - x + y - 2z = 0.$$

Rešenje sistema tražimo u obliku: $x = \lambda e^{rt},\ y = \mu e^{rt},\ z = \nu e^{rt},$ gde su $\lambda,\ \mu,\ \nu$ i r konstante. Dobijamo sistem

$$r\lambda + \mu + \nu = 0,$$

$$\lambda + r\mu + \nu = 0,$$

$$-\lambda + \mu + (r-2)\nu = 0.$$

Homogeni sistem ima netrivijalna rešenja po $\lambda,\ \mu,\ \nu$ ako je

$$\begin{vmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 \\ -1 & 1 & r-2 \end{vmatrix} = 0.$$

Odatle dobijamo karakterističnu jednačinu

$$\begin{vmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 \\ -1 & 1 & r-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r+1 & 1 & 1 \\ r+1 & r & 1 \\ 0 & 1 & r-2 \end{vmatrix} = (r+1)(r-1)(r-2) = 0.$$

Njena rešenja su $r_1 = -1,\ r_2 = 1,\ r_3 = 2.$

Za $r_1 = -1,$ linearni algebarski sistem postaje

$$-\lambda + \mu + \nu = 0,\ \ \lambda - \mu + \nu = 0,\ -\lambda + \mu - 3\nu = 0.$$

Jedno netrivijalno rešenje je $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = (1,1,0)$. Odatle dobijamo partikularna rešenja

$$x_1 = e^{-t}, \qquad y_1 = e^{-t}, \qquad z_1 = 0.$$

Analogno, za $r_2 = 1$, dobijamo $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2) = (1,0,-1)$, odakle

$$x_2 = e^{t}, \qquad y_2 = 0, \qquad z_2 = -e^{t}.$$

Za $r_3 = 2$, dobijamo $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2) = (1,1,-3)$ i

$$x_3 = e^{2t}, \qquad y_3 = e^{2t}, \qquad z_3 = -3e^{2t}.$$

Opšte rešenje sistema je

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} + C_3 e^{2t},$$

$$y = C_1 e^{-t} + C_3 e^{2t},$$

$$z = -C_2 e^{t} - 3C_3 e^{2t}.$$

4. PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

4.1.Homogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda

4.2.Nehomogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda