I GLAVA

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Pri razmatranju i rešavanju raznih problema iz mehanike, fizike, hemije, geometrije i drugih naučnih disciplina i njihovih primena, nailazi se na jednačine u kojima pored nepoznatih funkcija, njihovih argumenata i poznatih objekata, postoje i izvodi tih funkcija. Takve jednačine zovu se *diferencijalne jednačine* i to *obične*, ako nepoznate funkcije zavise samo od jednog argumenta i *parcijalne*, ukoliko nepoznate funkcije zavise od više argumenata.

Prva četiri poglavlja ove glave odnose se na obične diferencijalne jednačine, a peto je posvećeno parcijalnim jednačinama.

1. OSNOVNI POJMOVI

1.1. Definicija diferencijalne jednačine, vrste rešenja i geometrijska interpretacija

Neka su dati neprazan skup $Q = \{(x, y, y_1, \dots, y_n)\} \subset E^{n+2}$ i funkcija $F : Q \longrightarrow E^1$.

1.1.1. Definicija. Jednačina oblika

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{1}$$

u kojoj je x nezavisno promenljiva, $y = \varphi(x)$ nepoznata funkcija i

$$y', \dots, y^{(n)}$$

njeni izvodi, naziva se *obična diferencijalna jednačina opšteg oblika*, i to reda n, ili n-tog reda, ako je najveći izvod koji sadrži, reda n.

1.1.2. Primer. Jednačina $xy''+2xy'+y=e^x$ je drugog reda, a jednačina $y'''-3y''+xyy'y''=xy'''$ trećeg reda.

Ukoliko je diferencijalna jednačina data u obliku

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}), \tag{1'}$$

gde je realna funkcija f definisana na nekom skupu $Q\subset E^{n+1}$, onda se za jednačinu (1′) kaže da je *obična diferencijalna jednačina reda n, ili n-tog reda, normalnog oblika.*

1.1.3. Definicija. Kaže se da je funkcija

$$y=\varphi(x),\ x\in A, \tag{2}$$

rešenje diferencijalne jednačine (1), ako je:

1^0 φ diferencijabilna n puta na skupu A,

2^0 $(\forall x\in A)((x,\varphi(x),\varphi'(x),\dots,\varphi^{(n)}(x))\in Q)$,

3^0 $(\forall x\in A)(F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\dots,\varphi^{(n)}(x))=0)$.

Kaže se: Funkcija φ zadovoljava diferencijalnu jednačinu (1), tj. njenom zamenom, jednačina (1) pretvara se u identitet na skupu A. Odgovarajući grafik rešenja φ zove se *integralna linija ili integralna kriva* jednačine (1).

Domen $A\subset E^1$ diferencijabilne funkcije φ je u sebi gust skup, tj. svaka njegova tačka je istovremeno i njegova tačka nagomilavanja. Najvažniji primeri takvih skupova su otvoreni, poluzatvoreni i zatvoreni itervali. Intervale ćemo označiti sa I, i smatraćemo da je funkcija φ diferencijabilna u njihovim krajevima, na primer u levom kraju ako u njemu ima desni izvod.

1.1.4. Primer. Funkcije $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=e^x+3e^{-x}$, $f_3(x)=ch(x)$ su rešenja jednačine $y''=y$.

Kod *eksplicitnog oblika* (2), rešenje φ diferencijalne jednačine (1) može biti odredjeno i u implicitnom obliku

$$\Phi(x,y)=0,\ \text{gde je } (\forall x\in A)(\Phi(x,\varphi(x))=0), \tag{2'}$$

kao i u *parametarskom obliku*

$$\begin{aligned} x&=g(p),\ p\in B,\\ y&=d(p),\ p\in B. \end{aligned} \tag{2''}$$

Relacija (2′) često se naziva *integral* diferencijalne jednačine (1).

Neka je data diferencijalna jednačina prvog reda, oblika

$$y' = f(x), \; x \in I.$$

Ako je funkcija f neprekidna na intervalu I, onda ona, ima beskonačno mnogo primitivnih funkcija

$$y = \int f(x)dx + C_1 \equiv \varphi(x, C_1),$$

gde je C_1 proizvoljan realni parametar koji ne zavisi od x. Drugim rečima, ako posmatrana diferencijalna jednačina ima jedno rešenje, onda će ih imati beskonačno mnogo u zavisnosti od parametra C_1. Uopšte, ako diferencijalna jednačina $n-toga$ reda ima bar jedno rešenje, onda će ona imati beskonačan skup rešenja koja zavise od n medjusobno nezavisnih realnih parametara $C_1, \ldots, C_n$ koji ne zavise od x. Takva rešenja mogu imati sledeće oblike:

1^0 *Eksplicitni* $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$,

2^0 *Implicitni* $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$,

3^0 *Parametarski* $x = g(p, C_1, \ldots, C_n), \; y = d(p, C_1, \ldots, C_n)$.

Pri tome pretpostavljamo da tačka $C = (C_1, \ldots, C_n)$ pripada nekoj oblasti W prostora E^n.

Rešenjima $1^0 - 3^0$ odgovara *klasičan naziv "opšte rešenje"*. Ona predstavljaju jednačine n-parametarske familije integralnih linija diferencijalne jednačine.

U teoriji diferencijalnih jednačina i u njenim mnogostrukim primenama u praksi od posebnog je značaja pitanje nalaženja onih rešenja jednačina, koja zadovoljavaju zadate dopunske uslove: početne, granične, da budu periodične funkcije, ograničene funkcije itd. Ovde najpre izlažemo početne uslove i u vezi sa tim definišemo *Košijev problem.*

Neka je data diferencijalna jednačina

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1'}$$

i neka je $Q \subset E^{n+1}$ domen funkcije f, a tačaka

$$P_0(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in Q$$

proizvoljno, uočena tačka skupa Q. Uvedimo u razmatranje sledeće relacije:

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{1''}$$

Formulacija Košijevog problema: Iz skupa rešenja diferencijalne jednačine $(1')$, izdvojiti ono njeno rešenje $y = \varphi(x)$ koje zadovoljava date uslove $(1'')$. Ako takvo rešenje postoji, ono se zove *Košijevo rešenje.* Relacije $(1'')$ zovu se *početni ili Košijevi uslovi*, a dati brojevi $x_0, y_0, y_0', \ldots, y^{(n-1)}$ *početne vrednosti* Košijevog problema. Kaže se simbolično da reënje φ *prolazi* kroz tačku P_0. Ako u nekoj okolini tače $x = x_0$ postoji samo jedno Košijevo rešenje koje prolazi kroz tačku P_0, tada ćemo reći da je P_0 *tačka jedinstvenosti ili obična tačka* jednačine $(1')$.

A sada da u najkraćim crtama kažemo nešto o rešenjima koja zadovoljavaju odredjene uslove na krajevima nekog segmenta $[a, b]$, takozvane *granične* (*konturne*) *uslove.* Zadatak nalaženja takvih rešenja poznat je kao *granični problem.* Moguće je da granični problem ima jedno ili više rešenja ili da uopšte nema rešenja. Razmotrimo sledeće primere.

1^0 $y" + y = 0,\ y(0) = 1,\ y(3) = 0.$

Opšte rešenje ove jednačine je

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Zamenom opšteg rešenja jednačine u datim graničnim uslovima, dobija se sistem jednačina

$$C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1,$$
$$C_1 \cos 3 + C_2 \sin 3 = 0,$$

čija su rešenja $C_1 = 1$ i $C_2 = -\cot 3$. Dakle, naš granični problem ima *jedinstveno rešenje*

$$y = \cos x - \cot 3 \sin x.$$

2^0 $y" + y = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$

U ovom slučaju granični problem ima *beskonačno mnogo rešenja*

$$y = C_2 \sin x,$$

gde je C_2 proizvoljna realna konstanta.

3^0 $y" + y = 0,\ y(0) = 1,\ y(\pi) = 0.$

Zamenom opšeg rešenja u graničnim uslovima, dobiće se $C_1 = 1$ i $C_1 = 0$. Ovaj granični problem nema *rešenja.*

Jednačina

$$a_0(x)y^{(n)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x),$$

gde su koeficijenti $a_i(x)$ i $F(x)$ neprekidne funkcije na intervalu (a, b), naziva se *linearna diferencijalna jednačina n-tog reda.* Razmatranje ove jednačine daje se u odeljcima 3.4. i 3.5.

Ako je $a_0 \neq 0$, možemo podeliti obe strane jrdnačine tim koeficijentom i dobiti ekvivalentnu jednačinu

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x).$$

Ako je u (a, b) $f(x) \equiv 0$, jednačinu nazivamo homogenom inače je nehomogena.

Kod homogene jednačine uvodimo oznaku (linearni operator L)

$$L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y$$

Neposredno se dokazuje da je

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2],$$
$$L[Cy] CL[y] \ (C = const.)$$

Uopšte, za linearnu jednačinu

$$L[y] = f(x)$$

najopštiji konturni uslovi daju se na sledeći način :

$$\gamma_\mu = \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_\mu^{(i)} y^{(i)}(a) + \beta_\mu^{(i)} y^{(i)}(b)],$$

gde je $\mu \in \{1, \ldots, m\}$, a $\alpha_\mu^{(i)}$, $\beta_\mu^{(i)}$ su konstante.

Ako su svi $\gamma_\mu = 0$, konturni uslovi zovu se homogeni.

U daljem tekstu ovog odeljka posmatraćemo jednačinu

$$y' = f(x, y), \tag{3}$$

gde je realna funkcija f definisana na nekom skupu $Q \subset E^2$. Kao što je već istaknuto, problem nalaženja rešenja jednačine (3) koje zadovoljava uslov

$$y(x_0) = y_0, \tag{3'}$$

zove se Košijev problem, a rešenje, ukoliko postoji, naziva se Košijevo rešenje. Relacija (3′) zove se početni, ili Košijev uslov, a brojevi x_0 i y_0 su početne vrednosti. Moguće je da Košijevo rešenje φ ne postoji, ili da postoji jedno ili više takvih rešenja. U vezi sa tim postavlja se *pitanje egzistencije i jedinstvenosti rešenja* Košijevog problema (3) – (3′).

Može se tražiti rešenje jednačine (3) za koje važi jedna od implikacija

$$x \to x_0 \Rightarrow y \to y_0 \text{ ili } y \to y_0 \Rightarrow x \to x_0,$$

pri ěmu x_0 i y_0 mogu biti fiktivni elementi $\pm\infty$, ili $(x_0, y_0) \notin Q$. Zadatak nalaženja takvog rešenja naziva se *singularan slučaj Košijevog problema.*

Neka je $\overline{Q} = Q \cup Q'$, gde je Q' skup tačaka nagomilavanja za Q.

1.1.5. Definicija. Tačka $M_0(x_0, y_0) \in Q$ kroz koju prolazi samo jedno rešenje diferencijalne jednačine (3), zove se *tačka jedinstvenosti ili obična tačka* jednačine (3). Tačke skupa Q koje nisu obične tačke, i sve tačke skupa $\overline{Q} \setminus Q$ su *singularne tačke* jednačine (3).

1.1.6. Definicija. Rešenje diferencijalne jednačine (3) koje prolazi samo kroz njene obične tačke, zove se *partikularno rešenje.* Rešenje jednačine (3) koje prolazi samo kroz njegove singularne tačke, zove se *singularno rešenje.*

Treba reći da postoje i takva rešenja jednačine koja prolaze kroz obične i kroz singularne tačke. Linija $L \subset Q$ koja se sastoji samo od singularnih tačaka zove se *singularna linija* diferencijalne jednačine (3), pri čemu singularna linija može biti i integralna linija, što se neposredno proverava.

Geometrijska interpretacija: Neka je $K : y = \varphi(x), x \in I$, bilo koje rešenje diferencijalne jednačine

$$y' = f(x, y), \tag{3}$$

koja je definisana na skupu Q. Pošto je funkcija φ diferencijabilna, u svakoj tački $M(x, \varphi(x)) \in K$ postoji tangenta t čiji je ugaoni koeficijent pravca broj $\varphi'(x)$. S druge strane, funkcija φ je rešenje diferencijalne jednačine (3), dakle

$$(\forall \in I)(\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Prema tome, u svakoj tački M integralne krive K, ugaoni koeficijent pravca odgovarajuće tangente t jednak je vrednosti funkcije f u toj tački.

Ako kroz svaku tačku $M \in Q$ konstruišemo odsečak prave čiji je koeficijent pravca broj $f(M)$, tada se kaže da je na skupu Q odredjeno *polje pravaca* diferencijalne jednačine (3). Koristeći polje pravaca, reašenje diferencijalne jednačine (3) može biti formulisano na sledeći način: Diferencijabilna funkcija φ je rešenje diferencijalne jednačine (3) ako i samo ako njen grafik K pripada domenu Q ($K \subset Q$) i ako tangenta u svakoj tački grafika K ima pravac polja jednačine (3) u toj tački.

Skup tačaka iz Q, koje imaju paralelne pravce polja jednačine (3), zove se *izoklina* te jednačine. Familija izoklina odredjena je jednačinom

$$L : f(x, y) = a,$$

gde je a realan parametar koji ne zavisi od x i y. Sve integralne linije koje seku odredjenu izoklinu, u tačkama preseka imaju paralelne tangente. Na toj činjenici zasniva se *metod grafičke integracije* diferencijalne jednačie.

1.2. Primeri formiranja diferencijalnih jednačina

Diferencijalne jednačine prvog reda (kao i viših redova) javljaju se u velikom broju slučajeva u najvećem delu nauka koje primenjuju matematiku (fizika, mehanika, hemija, meteorologija i dr.). Na njih se svode najraznovrsniji problemi ovih nauka. Nećemo se zadržavati na ovim izvorima diferencijalnih jednačina iako su oni najvažniji, kako zbog prdvidjenog obima ove knjige, tako izbog činjenice da će čitalac izučavajući fiziku, mehaniku i dr. biti dobro upoznat sa primenama. U ovom odeljku oganičićemo se na tri primera matematičkog karaktera.

1.2.1. Primer. Napisati diferencijalnu jednačinu svih kružnica u ravni.

Rešnje. Jednačina

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

predstavlja kružnice u ravni. Ovde figurišu tri parametra α, β, r. Diferencirajmo gornju jednačinu tri puta po x. Dobijamo:

$$\begin{aligned}
&(x-\alpha)+(y-\beta)y'=0,\\
&1+(y')^2+(y-\beta)y''=0,\\
&2y'y''+y'y''(y-\beta)y'''=0.
\end{aligned}$$

Eliminacijom parametara α i β iz ove tri jednačine dobija se:

$$[1+(y')^2]y'''-3y'(y'')^2=0,$$

što predstavlja jednu diferencijalnu jednačinu trećeg reda. ♦

1.2.2. Primer. Naći krivu liniju čija je dužina normale u svakoj tački konstantna.

Rešnje. Odmah se dobija diferencijalna jednačina

$$y\sqrt{1+(y')^2}=a \ (a-const).$$

Rešavanjem po y' dobijamo:

$$y'=\pm\sqrt{\frac{a^2-y^2}{y^2}},$$

odnosno :

$$\frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}}=\pm dx.$$

Posle indegracije dobija se opšti integral u implicitnom obliku

$$(x - C)^2 + y^2 = a^2.$$

To su kružnice čiji su centri na osi x, poluprečnika a.♦

1.2.3. Primer. Naći krivu liniju kod koje je poluprečnik krivine u svakoj tački jednak dužini normale sa negativnim znakom.

Rešnje. Očigledno se dobija diferencijalna jednačina drugog reda:

$$\frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''} = -y\sqrt{1 + (y')^2}$$

odnosno

$$1 + (y')^2 + yy'' = 0.$$

Posle uvodjenja smene $yy' = z$ imamo da je $(y')^2 + yy'' = z''$, pa se data diferencijalna jednačina svodi na jednačinu

$$\frac{dz}{x} = -1,$$

tj.

$$z = -x + C$$

ili

$$yy' = -x + C,$$

tj.

$$ydy = (c - x)dx.$$

Posle integacije leve i desne strane poslednje jednakosti dobijamo:

$$x^2 + y^2 - 2Cx = 2c_1 - C^2,$$

što je opet familija kružnica. ♦

2. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

Dokazano je, pod izvesnim uslovima koji su dosta opšti i koji su skoro uvek ispunjeni, da opšte rešenje ima svaka diferencijalna jednačina i obrnuto, da svaka familija krivih linija ima njoj odgovarajuću diferencijalnu jednačinu.

Za rešavanje diferencijalnih jednačina ne postiji opšta metoda, pa se teorija diferencijalnih jednačina pored rešavanja nekih opštih zadataka, bavi i sistematskim izlaganjem nekih tipova jednačina koje se mogu rešiti.

2.1. Diferencijalne jednačine koje razdvajaju promenljive

To su diferencijalne jednačine oblika:

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0$$

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx = -f_2(x)\varphi_2(y)dy$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy$$

Integracijom leve i desne strane ove jednačine dobiće se

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + C_1 = -\int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy + C_2.$$

Kako je razlika dve konstante ponovo konstanta to je

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C$$

opšte rešenje diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive.

2.1.1. Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$\frac{x}{y} + y' = 0.$$

Rešenje: Posle smene $y' = \frac{du}{dx}$ dobiće se

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow ydy = -xdx$$

$$\int ydy = -\int xdx + C$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = C_1.\blacklozenge$$

Vežbe. Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:
1.$xy' - a = 0$. $(y = a \ln Cx)$
2.$y' = a^{x+y}$. $(a^x + a^{-y} = C)$
3.$a^{x+y}dx + b^{x-y}dy = 0$. $((\frac{a}{b})^x \ln ab - (ab)^{-y}\ ln\frac{a}{b} = C)$
4.$dy + y \tan x dx = 0$. $(y = C \cos x)$
5. $xe^{-y}dx - \sqrt{x^2+1}\,dy = 0$. $(y = \ln(C + \sqrt{x^2+1},)$

2.2 Homogena diferencijalna jednačina

Diferencijalna jednačina oblika

$$y' = f(\frac{y}{x}) \tag{4}$$

naziva se homogena diferencijalna jednačina.

Jednačina (4) rešava se na sledeći način. Uvodi se smena $y = u(x)x$ gde je $u = u(x)$ nova nepoznata funkcija po x. Dobiće se $y' = u'x + u$, pa jednačina (4) postaje jednačina sa razdvojenim promenljivim

$$u'x + u = f(u) \Leftrightarrow xdu = (f(u) - u)dx,$$

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{f(u)-u} = lnCx.$$

Iz poslednje relacije odredjuje se nova nepoznata u, a iz smene $y = ux$ nepoznata y.

2.2.1. Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$xy' - y = x \sin\frac{y}{x}.$$

Rešenje. Deljenjem leve i desne strane sa x dobiće se

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x},$$

a posle smene $y = ux$,tj. $y' = u'x + u$

$$u'x = \sin u \Leftrightarrow \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}.$$

Integracijom leve i desne strane poslednje jednakisti dobiće se

$$\ln \tan \frac{u}{2} = \int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x} = \ln Cx.$$

Prema tome iz $\ln \tan \frac{u}{2} = \ln Cx$ sledi da je

$$\tan \frac{u}{2} = Cx \Leftrightarrow \frac{u}{2} = \arctan Cx \Leftrightarrow \frac{y}{x} = 2 \arctan Cx. \blacklozenge$$

Napomena. Jednačina oblika $F(x, \quad y, \quad y') = 0$ homogena po x i y sa stepenom homogenosti $k \quad (F(tx, ty, y') = t^k F(x, y, y'))$ uzimanjem da je $t = \frac{1}{x}$ posle deljenja leve i desna strane sa x^k svodi se na jednačinu $F(1, \frac{y}{x}, y') = 0$ koja je ekvivalentna sa jednačinom (4).

Napomena. Diferencijalna jednačina oblika

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right) \tag{5}$$

gde su a, b, c, A, B, C konstante, možese svesti na oblik (4). Zaista smenom $y = u + \alpha, \quad x = v + \beta$, gde su α i β konstante jednačina (5) postaje

$$\frac{du}{dv} = f\left(\frac{av + bu + a\beta + b\alpha + c}{Av + Bu + A\beta + B\alpha + C}\right) \tag{6}$$

1^0 Neka je $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$, tada sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} a\beta + b\alpha + c = 0, \\ A\beta + B\alpha + C = 0 \end{aligned}$$

ima jedinstveno rešenje po α i β pa je jednačina (6) oblika

$$\frac{du}{dv} = f\left(\frac{av + bu}{Av + Bu}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{u}{v}}{A + B\frac{u}{v}}\right)$$

a to je jednačina oblika (4)

2^0 Neka je $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow aB - Ab = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{A} = \frac{b}{B} (= k)$ tj.

$$A = ka, \quad B = kb,$$

gde je k konstanta. Uvodjenjem smene $ax+by=u$, gde je u nova nepoznata funkcija od x. Jednačina (5) dobija oblik

$$u' = a + bf\left(\frac{u+c}{ku+C}\right),$$

a to je diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive.

2.2.2. Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y' = \frac{4x-y+7}{2x+y-1}.$$

Rešenje. Ako se uvedu nove promenljive ξ i η, takve da je

$$x = \xi + \alpha \quad y = \eta + \beta,$$

gde su α i β zasad neodredjene konstante, imaćemo

$$dx = d\xi, \quad dy = d\eta.$$

Unesemo li to u zadatu diferencijalnu jednačinu, dobićemo

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{4\xi - \eta + 4\alpha - \beta + 7}{2\xi + \eta + 2\alpha + \beta - 1}. \tag{$*$}$$

Ako se α i β odrede tako da budu rešenja sistema linearnih jednačina

$$\begin{aligned} 4\alpha - \beta + 7 &= 0 \\ 2\alpha + \beta - 1 &= 0, \end{aligned}$$

tj. $\alpha = -1$ i $\beta = 3$ diferencijalna jednačina $(*)$ postaje homogena, tj.

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{4\xi - \eta}{2\xi + \eta}. \tag{$**$}$$

Neka je sada $u = \frac{\eta}{\xi}$. Odavde je $\eta = u\xi$ i $\eta' = u' + u$. Ako se to zameni u diferencijalnu jednačinu $(**)$, dobiće se

$$u + \frac{du}{d\xi} \cdot \xi = \frac{4-u}{2+u},$$

ili razdvajanjem promenljivih

$$\frac{(u+2)du}{u^2+3u-4} = -\frac{d\xi}{\xi}.$$

Kako je

$$\frac{u+2}{u^2+3u-4} = \frac{3}{5(u-1)} + \frac{2}{5(u+4)},$$

to posje integracije dobijamo

$$3\ln|u-1| + 2\ln|u+4| + 5\ln|\xi| = C,$$

ili

$$(u-1)^3(u+4)^2 \cdot \xi^5 = C_1.$$

Pošto je $u = \frac{\eta}{\xi}$, a $x = \xi - 1$ i $y = \eta + 3$ to je opšti integral zadate diferencijalne jednačine oblika:

$$(y-x-4)^3(y+4x+1)^2 = C.\blacklozenge$$

2.2.3. Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y' = \left(\frac{x-y-1}{2x-2y+1}\right)^2.$$

Rešenje. Uvodimo novu funkciju $u = x - y$, pa je

$$u' = 1 - y'.$$

Diferencijalna jednačina će imati oblik

$$1 - u' = \left(\frac{u-1}{2u+1}\right)^2$$

odnosno

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{(u-1)^2}{(2u+1)^2}.$$

Ako se promenljive razdvoje dobiće se

$$\frac{4u^2+4u+1}{3u(u+2)}du = dx.$$

Odavde je posle integracije

$$\frac{1}{3}\left(4u + \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{9}{2}\ln|u+2|\right) = x + C,$$

ili posle vraćanja na promenljive x i y,

$$2x - 8y + \ln|x-y| - 9\ln|x-y+2| = C$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.♦

Vežbe. Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

1. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$. $\quad (y = -x\ln(C - \ln x))$
2. $x^3 y' = y(x^2 + y^2)$. $\quad (x = Ce^{-\frac{x^2}{2y^2}})$
3. $(xy' - y)e^{\frac{y}{x}} = x\sin(e^{\frac{y}{x}})$. $\quad (y = x\ln(2\arctan Cx))$
4. $(xy' + y)^2 = y^2 y'$. $\quad (y(C - x) = C^2, \quad y = 4x)$
5. $x^2(y')^2 - 3xyy' + 2y^2 = 0$. $\quad (y = Cx, \quad y = Cx^2)$

2.3. Linearna diferencijalna jednačina

Jednačina oblika

$$y' + yp(x) = q(x) \tag{7}$$

gde je y nepoznata funkcija, a p i q su date funkcije od x naziva se *linearna diferencijalna jednačina.*

Opšte rešenje ove jednačine dato je formulom

$$y = e^{-\int p dx}(C + \int q e^{\int p dx} dx),$$

a ovde dajemo jedan postupak dobijanja date formule.

Nepoznatu funkciju y možemo zameniti sa dve druge nepoznate funkcije $u(x)$ i $v(x)$ relacijom

$$y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$$

Jednačina (7) dobija sledeći oblik

$$u'v + v'u + uvp = q \Leftrightarrow v(u' + up) + v'u = q.$$

Nepoznata funkcija u može se odrediti iz uslova $u' + up = 0$, pa sa tako odredjenom funkcijom u može se odrediti i funkcija v iz uslova $v'u = q$.

$$u' + up = 0 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} + up = 0 \Leftrightarrow \frac{du}{u} = -pdx$$

Posle integracije

$$\ln u = -\int pdx \Leftrightarrow u = e^{-\int pdx}.$$

Zamenom u i $v' = \dfrac{dv}{dx}$ u jednačini $v'u = q$ dobiće se

$$\int dv = \int qe^{\int pdx} dx \Leftrightarrow v = \int qe^{\int pdx} dx + C$$

pa je

$$y = e^{-\int pdx}(C + \int qe^{\int pdx} dx) \tag{8}$$

Zadatke rešavamo ili pomoću formule (8), ili primenom izloženog postupka.

2.3.1. Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$xy' + y = \cos x.$$

Rešenje: Posle deljenja sa x data jednačina postaje

$$y' + y\frac{1}{x} = \frac{\cos x}{x}, \quad p = \frac{1}{x}, \quad q = \frac{\cos x}{x}.$$

Prema formuli (8)

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}}(C + \int \frac{\cos x}{x} e^{\int \frac{dx}{x}} dx)$$

tj.

$$y = \frac{1}{x}(C + \sin x).\blacklozenge$$

Vežbe. Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

1. $(1 + x^2)y' + xy = \frac{1}{x}$. $\quad (y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(C + \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}))$
2. $(y \sin x - 1)dx + \cos x dy = 0$. $\quad (y = \sin x + C \cos x)$

3. $x + (x^2 - \cos y)y' = 0.$ $\quad (x^2 = Ce^{-2y} + \frac{2}{5}(\ siny + 2\cos y))$
4. $y' \cos y + \sin y = x + 1.$ $\quad (\sin y = x + Ce^{-x} - x + 1)$
5. $y' + \sin y + x \cos y + x = 0.$ $\quad (\tan \frac{y}{2} = Ce^{-x} + 1)$

2.4. Bernulijeva diferencijalna jednačina

Diferencijalna jednačina oblika

$$y' + yp(x) = q(x)y^n \quad (n \in R) \tag{9}$$

poznata je kao *Bernulijeva* diferencijalna jednačina.

Ako je $n = 0$ ili $n = 1$ jednačina (9) je linearna.

Za slučaj $n \notin \{0, 1\}$ može se uvesti smena $y = z^k$, gde je z nova nepoznata funkcija i k konstanta. Pošto je, posle ove smene $y' = kz^{k-1}z'$ jednačina (9) postaje

$$kz^{k-1}z' + z^k p(x) = z^{kn}q(x).$$

Posle deljenja sa kz^{k-1} dobija se

$$z' + \frac{1}{k}p(x)z = \frac{1}{k}q(x)z^{kn-k+1}. \tag{10}$$

Konstanta k se može izabrati tako da je $kn - k + 1 = 0$, tj. $k = \frac{1}{1-n}$. Tada (10) glasi

$$z' + \frac{1}{1-n}p(x)z = \frac{1}{1-n}q(x), \tag{11}$$

a to je linearna diferencijalna jednačina. Kao što je poznato jednačina (11) ima opšte rešenje oblika

$$z = C\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

gde je C proizvoljna konstanta, a $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ potpuno odredjene funkcije od x. Prema tome, opšte rešenje jednačine (9) je oblika

$$y = (C\varphi_1(x) + \varphi_2(x))^{\frac{1}{1-n}}.$$

2.4.1. Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$2xy' + y + 3x^2y^2 = 0.$$

Rešenje:

$$2xy' + y = -3x^2y^2 / : 2xy^2$$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{2xy} = -\frac{3}{2}x.$$

Smenom $z = \frac{1}{y}$; ; $\quad z' = \frac{-y'}{y^2}$ jednačina se svodi na

$$-z' + z\frac{1}{2x} = -\frac{3}{2}x,$$

a to je linearna diferencijalna jednačina pa je

$$z = e^{\int \frac{dx}{2x}}(C + \frac{3}{2}\int xe^{-\int \frac{dx}{2x}}dx),$$

$$= e^{\frac{1}{2}\ln x}(C + \frac{3}{2}\int xe^{-\frac{1}{x}}dx),$$

$$= \sqrt{x}(C + x\sqrt{x}).$$

Dakle

$$\frac{1}{y} = \sqrt{x}(C + x\sqrt{x}) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x^2 + C\sqrt{x}}.\blacklozenge$$

Vežbe. Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

1. $y' + y\tan x = y^2$. $\quad ((C - \sin x)y = \cos x)$
2. $2yy' + y^2\cos x = (1 - \sin x)\cos x$. $\quad (y^2 = \sin x + Ce^{-\sin x})$
3. $y^n - nxy^{n-1}y' = (n-1)x^n$. $\quad (x^n + y^n = Cx)$
4. $(2xy + x^4)y' = 3x^2$. $\quad (y^2 + x^3y = Cx^3)$
5. $\cos y + x^2y'\cos^2 y - xy'\sin y = 0$. $\quad ((y + C)\cos y = \frac{1}{x})$

2.5. Rikatijeva diferencijalna jednačina

Diferencijalna jednačina oblika

$$y' + yp(x) + y^2q(x) + r(x) = 0 \tag{12}$$

gde je y nepoznata funkcija, a $p(x)$, $q(x)$ i $r(x)$ date funkcije poznata je kao *Rikatijeva* diferencijalna jednačina.

Dokazano je da se jednačina (12) u opštem slučaju ne može rešiti pomoću kvadratura. Medjutim, ako je poznato jedno partikularno rešenje jednačine (12), može se dobiti opšte rešenje na jedan od sledeća dva načina:

(a) Ako je $y_1(x)$ partikularno rešenje jednačine (12) smenom $y = y_1(x) + z(x)$ gde je $z(x)$ nova nepoznata funkcija jednačina (12) dobija oblik

$$z' + (p(x) + 2q(x)y_1(x))z + q(x)z^2 = 0,$$

a to je Bernulijeva diferencijalna jednačina.

(b) Neka je $y_1(x)$ partikularno rešenje jednačine (12). Smenom $y = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$ gde je $z(x)$ nova nepoznata funkcija jednačina (12) postaje

$$z' - (2y_1 p + q)z - q = 0, \tag{13}$$

a to je linearna diferencijalna jednačina.

Opšte rešenje jednačine (13) ima oblik

$$z = C\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

gde je C proizvoljna konstanta, a $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ odredjene funkcije. Prema tome Rikatijeva jednačina ima opšte rešenje u obliku

$$y = y_1(x) + \frac{1}{C\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}.$$

2.5.1. Primer. Odrediti a tako da prava $y = ax$ bude partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$(1 - x^2)y' + y^2 - 1 = 0,$$

a zatim naći njeno opšte rešenje.

Rešenje: $y = ax; \quad y' = a,$

$$(1 - x^2)y' + y^2 - 1 = 0,$$
$$(1 - x^2)a + a^2x^2 - 1 = 0,$$
$$x^2(a^2 - a) + (a - 1) = 0.$$

Poslednji polinom je nula ako je istovremeno $a^2 - a = 0$ i $a - 1 = 0$. Zajedničko rešenje je $a = 1$. Zamenom ove vrednosti u jednačini$y = ax$ dobijamo traženo partikularno rešenje:

$$y = x.$$

Zaista, zamenom $y = x$ odnosno $y' = 1$ u jednačini

$$(1 - x^2)y' + y^2 - 1 = 0,$$

imamo identitet

$$(1 - x^2) \cdot 1 + x^2 - 1 = 0.$$

Pomoću ovog partikularnog rešenja, na osnovu izloženog postupka za nalaže -nje opšteg rešenja datog pod (a), imamo smenu

$$y = x + z$$

kojom rešavamo datu rednačinu.

$$\begin{aligned} y = x + z; y' &= 1 + z', \\ (1 - x^2)(1 + z') + (x + z)^2 - 1 &= 0, \\ z'(1 - x^2) + 2zx = -z^2 / &: (1 - x^2)z^2, \\ \frac{z'}{z^2} + \frac{2x}{(1 - x^2)z} &= \frac{1}{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

Posle smene $u = \dfrac{1}{z}$ i $u' = -\dfrac{z'}{z^2}$ dobiće se

$$-u' + \frac{2x}{1 - x^2}u = \frac{1}{x^2 - 1} \Leftrightarrow u' + \frac{2x}{x^2 - 1}u = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Ovo je linearna jednačina (7) koju rešavamo po formuli (8), pa je

$$\begin{aligned} u &= e^{-\int \frac{2x dx}{x^2 - 1}}(C + \int \frac{1}{1 - x^2} e^{\int \frac{2x dx}{x^2 - 1}} dx) \\ &= e^{-\ln(x^2 - 1)}(C + \int \frac{e^{\ln(x^2 - 1)} dx}{1 - x^2}) \\ &= \frac{C - x}{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

Vraćanjem na smenu $u = \frac{1}{z}$, imamo da je

$$z = \frac{1}{u} = \frac{x^2 - 1}{C - x}$$

odnosno
$$y = x + z = x + \frac{x^2 - 1}{C - x}.$$
Za razne vrednosti parametra C, uključujući tu i $C = 0$ i $C \to \infty$, dobićemo partikularna rešenja date diferencijalne jednačine. Specijalno, ako $C \to \infty$, imamo partikularno rešnje
$$y = x.\blacklozenge$$

2.6. Jednačine sa totalnim diferencijalom. Integracioni faktor

Neka je data diferencijalna jednačina
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{14}$$
gde funkcije P i Q imaju neprekidne parcijalne izvode po x i y. Ako egzistira funkcija $U(x,y)$ takva da je
$$dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{15}$$
tada se za jednačinu (14) kaže da je *jednačina sa totalnim diferencijalom.*

U tom slučaju opšte rešenje $y(x)$ jednačine (14) definisano je relacijom
$$U(x,y) = C,$$
gde je C proizvoljna konstanta.

Uporedjujući jednakost
$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$
sa (15) dobiće se da je
$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \wedge \frac{\partial U}{\partial x} = Q(x,y). \tag{16}$$

Šta više
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} \wedge \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Kako je $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ (pretpostavljeno je da su parcijalni izvodi po x i y neprekidni, a oni su u tom slučaju jednaki) razume se, da je $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ potreban uslov da jednačina (14) bude jednačina sa totalnim diferencijalom.

Obrnuto, neka je ispunjen uslov $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Iz prve jednačine sistema (16) je

$$U = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + f(y) \tag{17}$$

gde je $f(y)$ proizvoljna funkcija promenljive y. Kako su funkcije P i $\frac{\partial P}{\partial y}$ neprekidne, ispunjeni su uslovi za diferenciranje pod znakom integrala. Iz (17) je

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx + f'(y),$$

i pošto je $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, toje

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx + f'(y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + f'(y),$$

tj.

$$Q(x,y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + f'(y),$$

pa je $f'(y) = Q(x_0,y)$ što znači da je $f(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + K$ gde je K proizvoljna konstanta.

Dakle, dobija se da je

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + K$$

pa je opšte rešenje jednačine (14) dato sa

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$$

gde je C proizvoljna konstanta.

2.6.1. Primer. Naći opťe rešenje diferencijalne jednačine

$$\left(\frac{y}{x+y}\right)^2 dx + \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 dy = 0.$$

Rešenje. Ovde je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{y}{x+y}\right)^2\right] = \frac{2xy}{(x+y)^3}$$

odnosno

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{x}{x+y}\right)^2\right] = \frac{2xy}{(x+y)^3},$$

pa imamo identitet

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

što znači da je leva strana jednačine totalni diferencijal neke funkcije $U9x,y)$, pod prdpostavkom da je $x+y \neq 0$. Kako je

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{y}{x+y}\right)^2$$

to je

$$U(x,y) = \int \left(\frac{y}{x+y}\right)^2 dx + \varphi(y)$$

gde je $\varphi(y)$ neka funkcija od y i zamenjuje integracionu konstantu. Ako se izvrši integracija po x dobija se

$$U(x,y) = \frac{-y^2}{x+y} + \varphi(y). \qquad (*)$$

Kako je

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{x}{x+y}\right)^2,$$

to diferenciranjem po y jednačine $(*)$ dobijamo

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 = \frac{-2xy-y^2}{(x+y)^2} + \varphi'(y).$$

Odavde je
$$\varphi'(y) = 1 \text{ odnosno } \varphi(y) = y.$$
Zamenom ove vrednosti za $\varphi(y)$ u jednačini $(*)$ dobijamo traženu funkciju $U(x,y)$ tj.
$$U(x,y) = \frac{-y^2}{x+y} + y = \frac{xy}{x+y},$$
te je opšti integral date diferencijalne jednačine
$$\frac{xy}{x+y} = C.\blacklozenge$$

Ako (14) nije jednačina sa totalnim diferencijalom, postavlja se pitanje egzistencije neprekidne funkcije $\lambda(x,y)$ zajedno sa svojim izvodima koja ima svojsto da jednačina
$$\lambda(x,y)P(x,y)dx + \lambda(x,y)Q(x,y)dy = 0$$
bude totalni diferencijal. Ovakva funkcija naziva se *integracioni faktor*. Ona se nalazi iz jednačine
$$\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x},$$
tj. ako je $\lambda(x,y)$ rešenje parcijalne jednačine
$$Q(x,y)\frac{\partial\lambda}{\partial x} - P(x,y)\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \lambda(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}). \tag{18}$$

Ako je poznato da je λ funkcija jedne promenljive i to $\lambda = \lambda(\omega(x,y))$, gde je ω data funkcija, tada jednačina (18) dobija sledeći oblik
$$Q(x,y)\frac{d\lambda}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x} - P(x,y)\frac{d\lambda}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y} = \lambda(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}).$$
Iz ove jednačine dobija se da je
$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial\omega}{\partial x} - P\frac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega. \tag{19}$$
Dakle, ako se razlomak na desnoj strani u (19) može izraziti kao funkcija promenljive ω, onda je (19) diferencijalna jednačina u kojoj su promenljive razdvojene.

2.6.2. Primer. Data je diferencijalna jednačina

$$(x - y^2)dx + 2xydy = 0.$$

naći njen opšti integral.

Rešenje. Ovde je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2y \wedge \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$$

odnosno

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Kako je

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-2y - 2y}{2xy} = -\frac{2}{x},$$

to se može naći integracioni faktor $\lambda(x)$, jer je

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{2}{x}dx \text{ odnosno } \lambda = \frac{1}{x^2}.$$

Jednačina

$$\frac{1}{x^2}[(x - y^2)dx + 2xydy] = 0,$$

je totalni diferencijal neke funkcije $U(x, y) = C$. U ovom slučaju je

$$U(x, y) = \int \frac{2y}{x}dy + \psi(x)$$

odnosno

$$U(x, y) = \frac{y^2}{x} + \psi(x),$$

gde je $\psi(x)$ neka funkcija od x. Kako je

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x - y^2}{x^2},$$

to je

$$\frac{x - y^2}{x^2} = -\frac{y^2}{x^2} + \psi'(x).$$

Odavde je

$$\psi'(x) = \frac{1}{x} \text{ odnosno } \psi(x) = \ln|x|.$$

Opšti integral zadate diferencijalne jednačine je

$$\frac{y^2}{x} + \ln|x| = C.\blacklozenge$$

2.6.3. Primer. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(5x^2 + 2xy + 3y^3)dx + 3(x^2 + xy^2 + 2y^3)dy = 0.$$

Rešenje. Ovde je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 9y^2 \wedge \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x + 3y^2$$

pa je

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Kako je

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P - Q} = \frac{6y^2 - 4x}{2x^2 + 2xy - 3xy^2 - 3y^3} = \frac{2}{x + y},$$

to postoji integracioni faktor $\lambda(x + y)$, tj.

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{2}{x + y} d(x + y),$$

pa je

$$\lambda = (x + y)^2.$$

Diferencijalna jednačina

$$(x + y)^2[(5x^2 + 2xy + 3y^3)dx + 3(x^2 + xy^2 + 2y^3)dy] = 0$$

je totalni diferencijal funkcije

$$U(x, y) = (x^2 + y^3)(x + y)^3$$

pa je opšte rešenje zadate diferencijalne jednačine

$$(x^2 + y^3)(x + y)^3 = C.\blacklozenge$$

Vežbe. Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

1. $(\frac{1}{y} + ye^{xy})dx - (\frac{x}{y^2} - xe^{xy})dy = 0.$ $(e^{xy} + \frac{x}{y} = C)$
2. $y' = \frac{2e^y}{3y^2 - 2xe^y}.$ $(y^3 - 2xe^y = C)$
3. $y' = -\frac{\sin y + 2e^{2x}}{x \cos y + 3}.$ $(x \sin y + e^{2x} + 3y = C)$

2.7. Egzistencija i jedinstvenost rešenja. Obvojnica ravnih linija

U teoriji diferencijalnih jednačina postoji niz stavova o egzistenciji, odnosno o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja diferencijalnih jednačina. U ovom odeljku navodimo, bez dokaza, dve osnovne teoreme, Peanovu i Pikarovu teoremu koje se odnose na egzistenciju rešenja diferencijalne jednačine

$$y' = f(x, y), \tag{3}$$

a koja je razmatrana u prvom odeljku ove glave. Razume se, ovde je f realna funkcija definisana na nekoj oblasti $Q \subset E^2$.

2.7.1. Teorema. *Ako je funkcija f neprekidna u okolini tačke*

$$M_0(x_0, y_0) \in Q,$$

tada postoji rešenje φ diferencijalne jednačine (3), koje zadovoljave početni uslov $y(x_0) = y_0$.

Ovom Peanovom teoremom obezbedjena je egzistencija rešenja, čija linija prolazi kroz tačku M_0, ali ne i jedinstvenost rešenja. U narednoj Pikarovoj teoremi obezbedjuje se jedinstvenost rešenja primenom *Lipšicovog uslova* koji se uvodi sledećom definicijom.

2.7.2. Definicija. Neka je realna funkcija $z = f(x, y)$ definisana na skupu B. Kaže se da funkcija f zadovoljava *Lipšicov uslov* po y, ako postoji broj L, tako da važi

$$(\forall (x, y),\ (x, y^*) \in B)(|(x, y) - f(x, y^*)| \leq L|y - y^*|),$$

pri čemu se broj L zove *Lipšicova konstanta.*

2.7.3. Teorema. *Neka je data diferencijalna jednačina*

$$y' = f(x, y) \tag{3}$$

sa početnim uslovom

$$y(x_0) = y_0. \tag{$*$}$$

Ako je na pravougaoniku

$$P = \{(x,y) : |x-x_0| \le a \wedge |y-y_0| \wedge b\}, a, b > 0,$$

funkcija f neprekidna, i ako na P zadovoljava Lipšicov uslov po y

$$|f(x,y) - f(x,y^*)| \le L|y-y^*|,$$

tada jednačina (3) *ima jedno i samo jedno rešenje*

$$y = \varphi(x),\ x \in I = [x_0-h, x_0+h],$$

koje zadovoljava početni uslov $(*)$, *gde je*

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\} \wedge M = \max\{|f(x,y)| : (x,y) \in P\}.$$

Dokazaćemo jednu teoremu koja daje dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja diferencijalne jednačine opšteg oblika

$$F(x,y,y') = 0. \tag{3*}$$

2.7.4. Teorema. *Ako je funkcija* F :

1^0 *Neprekidna i ima neprekidne izvode po svim svojim argumentima u nekoj zatvorenoj okolini tačke* $P_0(x_0,y_0,y_0')$, *pri čemu je* $y_0' = y'$ *rešenje jednačine,* $F(x_0,y_0,y') = 0$.

2^0 *Parcijalni izvod* $\frac{\partial F}{\partial y'} \ne 0$ *u tački* P_0.

Tada jednačina (3^*) *ima jedinstveno rešenje* $y = \varphi(x), x \in (x_0-h, x_0+h)$, *tako da je* $\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi'(x_0) = y_0'$.

Dokaz. Pošto funkcija F zadovoljava uslove teoreme o egzistenciji implicitne funkcije po y', postoji okolina $\overline{U}_0$ tačke $M(x_0,y_0)$ u kojoj jednačina (3^*) odredjuje jednoznačnu funkciju

$$y' = f(x,y), \tag{3}$$

gde su f, f_x' i f_y' neprekidne funkcije i pri čemu je

$$y_0' = f(x_0,y_0).$$

U otvorenoj okolini U_0 tačke M_0 može biti upisan pravougaonik P $(P \subset U_0)$ sa središtem u M_0 na kome funkcija f zadovoljava uslove prethodne Pikarive teoreme. Prema ovoj teoremi, jednačina (3) ima jedinstveno rešenje

$$y = \varphi(x),\ x \subset I = (x_0-h, x_0+h),$$

gde je h "dovoljno mali" broj, tako da je

$$\varphi(x_0) = y_0.$$

Kako je dalje

$$(\forall x \in I)(\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))),$$

onda za $x = x_0$, prema relacijama

$$y_0' = f(x_0, y_0)$$

i

$$\varphi(x_0) = y_0,$$

imamo

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0) = y_0'.\blacksquare$$

2.7.5. Posledica. *Ako jednačina $F(x_0, y_0, y') = 0$ ima m realnih i različitih rešenja y', dakle*

$$F(x_0, y_0, y_k') = 0,\ k \in \{1, 2, \dots, m\},$$

i ako za svak y_k' važe uslovi teoreme, tada kroz tačku $M_0(x_0, y_0)$ prolazi tačno m integralnih linija. Prema definiciji, M_0 je obična tačka jednačine (3*).

Pokazaćemo sada kako se odredjuju singularna rešenja jednačine (3*) primenom prethodne teoreme. Obrazujmo sistem jednačina

$$\begin{aligned} &F(x, y, p) = 0,\ y' = p \\ &F_p(x, y, p) = 0, \end{aligned} \tag{3**}$$

i neka je eliminacijom parametra p dobijena jednačina

$$\psi(x, y = 0. \tag{3***}$$

Geometrijsko mesto tačaka odredjeno jednačinom (3***), zove se *diskriminantna kriva jednačine* (3*).

Neka je $y = \varphi(x),\ x \in I$ bilo koje singularno rešenje jednačine (3*). Ako se pretpostavi da funkcija F zadovoljava uslov 1^0 u svim tačkama singularnog rešenja φ, tada mora biti narušen uslov 2^0 u tim tačkama, tj. biće

$$(\forall x \in I)\ F_p(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0.$$

Ako se uzme u obzir da je φ rešenje jednačine (3^*), tj. da je

$$(\forall x \in I)\ F_p(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$$

i činjenica da e relacija ($3^* **$) posledica sistema (3^**), nalazimo da je

$$(\forall x \in I)\ \psi(x, \varphi(x)) = 0.$$

Prema tome, singularno rešenje φ jednačine (3^*) je i rešenje jednačine (3^***). Obrnuto, svako rešenje φ jednačine ($3^* **$) u opštem slučaju nije i singularno rešenje diferencijalne jednačine ($3*$), ono čak i ne mora biti rešenje jednačine.

Na osnovu prethodne analize formulisaćemo postupak odredjivanja singularnih rešenja diferencijalne jednačine ($3*$). On se sastoji iz tri dela, i to:

1^0 Naći diskriminantnu krivu,

2^0 Proveriti da li je ona integralna linija,

3^0 Proveriti da li su sve njene tačke singularne tačke jednačine.

Ukoliko je jednačinom ($3 * **$) odredjeno više linija, tada svaku od njih treba ponaosob ispitati.

2.7.6. Primeri.

(a) Neka je $(y')^2 - 4y = 0$. Eliminacijom parametra p iz sistema jednačina

$$\begin{aligned} &F \equiv p^2 - 4y = 0, \\ &F_p = 2p = 0, \end{aligned}$$

dobija se diskriminantna linija: $y = 0$. Pošto jr $y = 0$ rešenje jednačine i kako kroz svaku tačku $M_0(x_0, 0)$ prolaze dve integralne linije $y = 0$ i $y = (x - x_0)^2$, u kojoj postoji samo jedan pravac: $y' = 0$, to je $y = 0$ singularno rešenje jednačine.♦

(b) Diskriminantna kriva jednačine $(y')^2 - 4x^2 = 0$ je prava $x = 0$, i ona nije integralna linija. Ona je u stvari skup dodirnih tačaka familije integralnih linija

$$y = x^2 + C_1,\ C_1 \in R \wedge y = -x^2 + C_2,\ C_2 \in R. \blacklozenge$$

(c) Rešenja diferencijalne jednačine $(y')^2 - y^3 = 0$ su $y = 0$ i

$$y = \frac{4}{(x - C)^2},\ x \neq C,\ C \in R. \blacklozenge$$

Ovim primerima pokazali smo da diskriminantna kriva može predstavljati singularno rešenje, zatim partukularno rešenje veoma retko i konačno, moguće je da ne bude integralna linija.

Pored navedenog postupka odredjivanja singularnih rešenja diferencijalnih jednačina, izložimo još jedan način, zasnovan na primeni obvojnice jednoparametarske familije ravnih linija.

Neka je data familija

$$K : \Phi(x, y, C) = 0, \ C \in W \subset R. \tag{$\mathfrak{F}$}$$

2.7.7. Definicija. Linija $\mathfrak{E}$, koja u svakoj svojoj tački dodiruje samo jednu liniju familije $\mathfrak{F}$, pri čemu u različitim tačkama dodiruje različite linije, zove se *obvojnica* linija $\mathfrak{F}$.

2.7.8. Primer. Familija kružnica

$$K : (x - C)^2 + y^2 - a^2 = 0, \ C \in R,$$

ima očigledno dve obvojnice $y = -a$ i $y = a$.♦

Izložićemo sada način dobijanja jednačine obvojnice $\mathfrak{E}$. Pretpostavimo da je Φ neprekidna funkcija i da ima parcijalne izvode, pri čemu je u svakoj tački familije K bar jedan od Φ_x i Φ_y različit od nule. Neka je D proizvoljna kriva, data jednačinom

$$D : \psi(x, y) = 0. \tag{$\mathfrak{F}_1$}$$

Prethodna jednačina može biti zamenjena jednačinom

$$D : \Phi(x, y, u) = 0, \tag{$\mathfrak{F}_2$}$$

gde je u rešenje jednačine $\psi(x, y) = \Phi(x, y, u)$. Iz ($\mathfrak{F}$) i ($\mathfrak{F}_2$), diferenciranjem sledi

$$\Phi_x(x, y, C)dx + \Phi_y(x, y, C)dy = 0, \tag{$\mathfrak{F}_3$}$$

$$\begin{aligned} &\Phi_x(x, y, C)dx + \Phi_y(x, y, C)dy + \Phi_u(x, y, u)du = 0, \\ &du \neq 0. \end{aligned} \tag{$\mathfrak{F}_4$}$$

Neka je $\mathfrak{D}$ obvojnica ($\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$). U tom slučaju u svakoj tački dodira $M(x, y) \in \mathfrak{E}$ mora biti $u = C$, pa iz ($\mathfrak{F}_3$), s obzirom na ($\mathfrak{F}_4$), neposredno sledi $\Phi_C(x, y, C) = 0$. Drugim rečima, koordinate tačaka obvojnice zadovoljavaju sistem jednačina

$$\begin{aligned} &\Phi(x, y, C) = 0, \\ &\Phi_C(x, y, C) = 0. \end{aligned} \tag{$\mathfrak{F}_5$}$$

Obrnuto, neka je linija $\mathfrak{D}$ dobijena eliminacijom parametra C iz sistema jednačina $(\mathfrak{F}_5)$. Ako se pretpostavi da je u svakoj tači $M \in \mathfrak{D}$ bar jedan od izvoda Φ_x i Φ_y različit od nule, tada se jednačina $(\mathfrak{F}_4)$ poklapa sa jednačinom $(\mathfrak{F}_3)$, sobzirom na drugi uslov u relacijama $(\mathfrak{F}_5)$, a jednačinom $(\mathfrak{F}_3)$ odredjen je jednoznačno zajednički koeficijent pravca linije $\mathfrak{D}$ i krive iz familije $(\mathfrak{F})$ koja prolazi kroz tačku M. Prema 2.7.7 Definiciji, linija $\mathfrak{D}$ je obvojnica familike K.

Linija $\mathfrak{D}$, dobijena eliminacijom parametra C iz sistema jednačina $(\mathfrak{F}_5)$, zove se *diskriminantna kriva* familije $(\mathfrak{F})$.

Na osnovu svega što je napred rečeno može se formulisati sledeće pravilo za odredjivajne obvojnica familije linija $(\mathfrak{F})$:

1^0 Naći diskiminantnu liniju $\mathfrak{D}$,

2^0 Linija $\mathfrak{D}$, ili njen deo, u čijim je tačkama bar jedan od izvoda Φ_x i Φ_y različit od nule, je obvojnica familije $(\mathfrak{F})$.

2.7.9. Primer. $\Phi(x, y, C) \equiv y - (x - C)^2 = 0,\ C \in R$. Eliminacijom parametra C iz sistema jednačina

$$\begin{aligned} &\Phi \equiv y - (x - C)^2 = 0, \\ &\Phi_C \equiv 2(x_C) = 0, \end{aligned}$$

sledi da je $\mathfrak{D} : y = 0$.. Pošto je, na primer, $\Phi_y = 1$, to je x-osa obvojnica date familije parabola.⧫

Neka je $\Phi(x, y, C)$ =) familija integralnih linija fiferencijalne jednačine $F(x, y, y') = 0$. *Obvojnica familije integralnih linija je singularno rešenje diferencijalne jednačine* jer, ona u svakoj tački dodiruje odredjenu integralnu liniju, što znači da njena tangenta ima pravac polja u toj tački, i kroz nju prolaze dve integralne linije (obvojnica i odgovarajuća integralna linija date familije).

2.7.10. Primer. $(y')^3 - 27y^2 = 0$. Familija integralnih linija odredjena je jednačinom

$$y = (x - C)^3,\ C \in R.$$

Obvojnica familije integralnih linija je $\mathfrak{D} : y = 0$, a to je i singularno rešenje diferencijalne jednačine.⧫

Primetimo na kraju da je problem nalaženja singularnih rešenja diferencijalnih jednačina moguće rešavati na sledeće načine :

1^0 neposredno integracijom same jednačine,

2^0 preko diskriminantne krive jednačine

3^0 pomoću obvojnice integralnih linija.

2.8. Kleroova i Lagranževa diferencijalna jednačina

Jednačina po nepoznatoj funkciju y oblika

$$y = xy' + f(y'), \tag{20}$$

gde je f data diferencijabilna funkcija naziva se *Kleroova diferencijalna jednačina*. Razume se da ova jednačina nije ekplicitno rešena po y. Stavljajući $y' = p$ u (20), dobiće se

$$y = xp + f(p), \tag{21}$$

odakle, diferenciranjem po x, izlazi

$$(x + f'(p))p' = 0$$

Ako je $p' = 0$, biće $p = C$ (C je proizvoljna konstanta) i prema (21) dobiće se opšte rešenje jednačine (20) u obliku

$$y = Cx + f(C).$$

Ako je $x + f'(p) = 0$, tada se eliminacijom p iz jednačina

$$x + f'(p) = 0 \wedge y = xp + f(p),$$

prema prethodnom odeljku, dobija obvojnica familije pravih

$$\mathfrak{P} : y = Cx + f(C),$$

koja je sigularno rešenje Kleroove jednačine

2.8.1. Primer. Rešiti Kleroovu diferencijalnu jednačinu

$$y = xy' + \frac{a}{y'}. \tag{$*$}$$

Rešenje.

Ako se uvede parametar $y' = p$ i jednačina $(*)$ diferencira po x, dobiće se:

$$p = p + [x - \frac{a}{p^2}]p', \tag{$**$}$$

odavde je

$$[x - \frac{a}{p^2}]p' = 0.$$

Jednačina (2) biće zadovoljena ako je:

1^o. $p' = 0$, odakle je $p = C$. Zamenom vrednosti $p = C$ u jednačinu $(*)$ dobiće se opšti integral jednačine $(*)$:

$$y = Cx + \frac{a}{C}.$$

2^o. $x - \frac{a}{p^2} = 0$, odavde je $p = \pm\sqrt{\frac{a}{x}}$, odnosno posle zamene u jednačinu $(**)$ $y^2 = 4ax$, i to pretstavlja singularno rešenje jednačine $(*)$. Do istog rezultata se dolazi eliminisanjem konstante C iz jednačina

$$y - Cx - \frac{a}{C} = 0$$
$$-x + \frac{a}{C^2} = 0$$

što znači da je singularni integral $y^2 = 4ax$ obvojnica pravih linija predstavljenih opštim integralom.♦

Vežbe. Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

1. $y = xy' + (y' - 1)^2$. $\quad (y = x - \frac{x^2}{4}; \quad y = Cx + (C-1)^2)$
2. $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$. $\quad (y = \sqrt{1 - x^2}; y = Cx + \sqrt{1 + C^2})$
3. $y = xy' - 2\sqrt{y'}$. $\quad (y = -\frac{1}{x}; \quad y = Cx - 2\sqrt{C})$

Jednačina oblika

$$y = xf(y') + g(y'), \tag{22}$$

gde su f i g date diferencijabilne funkcije, naziva se *Lagranževa* diferencijalna jednačina.

Ova jednačina rešava se istom metodom kao i Kleroova jednačina. Uzimajući da je $y' = p$ i posle diferenciranja dobija se

$$(f(p) - p)\frac{dx}{dp} + f'(p)x = -g'(p). \tag{23}$$

Ako je $f(p) = p$, jednačina (22) je Kleroova jednačina. Ako se pretpostavi da $f(p) \neq p$ jednačina (23) dobija oblik

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x = -\frac{g'(p)}{f(p) - p}, \tag{24}$$

a to je linearna diferencijalna jednačina.

Dakle, opšte rešenje Lagranževe jednačine dobija se u parametarskom obliku

$$x = C\varphi_1(p) + \varphi_2(p), \quad y = xf(p) + g(p). \tag{25}$$

Ukoliko je moguće iz sistema (25) eliminisati parametar p rešenje Lagranževe jednačine imalo bi oblik $F(x, y, C) = 0$.

2.8.2. Primer. Rešiti Lagrange-ovu diferencijalnu jednačinu

$$y = 2xy' + {y'}^2. \tag{$*$}$$

Rešenje.

Ako stavimo $y' = p$ dobićemo jednačinu

$$y = 2xp + p^2. \tag{$**$}$$

Diferenciranjem jednačine (2) po x dobijamo

$$p = 2p + 2(x + p)p',$$

odnosno ako se x posmatra kao funkcija od p

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - 2 \tag{$***$}$$

i to je linearna jednačina po x. Njeno opšte rešenje dobijamo smenom $x = uv$, gde su u i v funkcije od p.

Zamenom $x = uv$ i $x'_p = u'v + uv'$ u jednačinu dobijamo

$$u'v + u\big(v' + \frac{2v}{p}\big) = -2.$$

Kako je za $v = \frac{1}{p^2}$, faktor uz u jednak nuli, to je

$$u'\frac{1}{p^2} = -2,$$

odavde je $u = -\frac{2}{3}p^3 + C$, pa je opšte rešenje linearne jednačine $(***)$

$$x = uv = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}, \tag{$****$}$$

ako se $(****)$ unese u jednačinu $(**)$ dobija se

$$y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}.$$

Opšte rešenje jednačine $(*)$ u parametarskom obliku

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}$$
$$y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}.$$

($y = 0$ je takodje rešenje diferencijalne jednačine.)⧫

Vežbe. Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

1. $y + xy' + a = 0$. $\quad (y = a - \frac{C}{x})$
2. $y - 2xy' + ay' = 0$. $\quad (y^2 = C(2x - a))$
3. ${y'}^2 + 2xy'2y = 0$. $\quad (y = -Cp^{\frac{1}{2}} - \frac{p^2}{6}; \quad x = p^{-\frac{1}{2}} - \frac{p}{3})$

3. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA

3.1. Diferencijalne jednačine koje ne sadrže y

Najpre razmatramo jednačine oblika

$$F(x, y', y'') = 0. \tag{25}$$

Uvodjenjem nove nepoznate funkcije z smenom $y' = z$ i $z' = y''$ diferencijalna jednačina (25) dobija oblik

$$F(x, z, z') = 0, \tag{26}$$

a to je diferencijalna jednačina prvog reda. Ako je opšte rešenje jednačine (26)

$$z = f(x, C_1),$$

prema uvedenoj smeni biće

$$y' = f(x, C_1). \tag{27}$$

Integracijom jednačine (27) dobiće se opšte rešenje jednačine (25)

$$y = \int f(x, C_1)dx + C_2.$$

3.1.1. Primer. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$xy'' + y' = 4x.$$

Rešenje:

$$xy'' + y' = 4x / : x$$
$$y'' + \frac{1}{x}y' = 4.$$

Posle smene $y' = z$, odnosno $y'' = z'$ dobiće se linearna jednačina $z' + \frac{1}{x}z = 4$ pa je

$$z = e^{-\int \frac{dx}{x}}(C_1 + 4\int e^{\int \frac{dx}{x}}dx)$$
$$= \frac{C_1}{x} + 2x.$$

Dakle,

$$y = \int (\frac{C_1}{x} + 2x)dx + C_2$$
$$= C_1 \ln x + x^2 + C_2.$$

♦

Napomena.
(a) Jednačini oblika

$$F(x, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

moguće je sniziti red za jedan smenom $y' = z$, tj. $y'' = z', y''' = z'', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-1)}$ pa se dobija diferencijalna jednačina oblika

$$F(x, z, z', \ldots z^{(n-1)}) = 0.$$

(b) Diferencijalna jednačina n-tog reda oblika

$$F(x, y^{(n-1)}, y(n)) = 0$$

smenom $y^{(n-1)} = z$, tj. $y^{(n)} = z'$ svodi se na jednačinu prvog reda oblika

$$F(x, z, z') = 0.$$

Ako je $z = f(x, C_1)$ tj. $y^{(n-1)} = f(x, C_1)$ tada se y dobija integracijom poslednje jednačine $(n-1)$ puta uzstopno.

3.2. Diferencijalne jednačine koje ne sadrže x

Kao i u prethodnom odeljku najpre razmatrmo jednačine oblika

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{28}$$

Može se uvesti smena $y' = z$. Tada je

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$$

pa jednačina (28) postaje diferencijalna jednačina prvog reda

$$F(y, z, z\frac{dz}{dy}) = 0. \tag{29}$$

Neka je $z = f(y.C_1)$ opšte rešenje jednačine (29). Tada je $y' = f(y, C_1)$ tj. $\frac{dy}{dx} = f(y, C_1)$, a ovo je jednačina što razdvaja promenljive.

$$\frac{dy}{f(y, C_1)} = dx.$$

Integracijom poslednje jednačine dobiće se

$$x + C_2 = \int \frac{dy}{f(y, C_1)},$$

a to je opšte rešenje jednačine (28).

3.2.1. Primer. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$2yy' = y''.$$

Rešenje: Smenom $y' = z, \quad y'' = z\frac{dz}{dy}$ data jednačina postaje

$$\begin{aligned} 2yz &= z\frac{dz}{dy} / : z \\ dz &= 2ydy. \end{aligned}$$

Posle intergracije

$$\begin{aligned} z &= y^2 + C_1^2 \\ y' &= y^2 + C_1^2 \\ \frac{dy}{dx} &= y^2 + C_1^2 \\ dx &= \frac{dy}{y^2 + C_1^2}. \end{aligned}$$

Integracijom poslednje jednačine dobiće se

$$x + C_2 = \int \frac{dy}{y^2 + C_1^2} = \frac{1}{C_1} \arctan \frac{y}{C_1}.$$

Ili kraće
$$\frac{y}{C_1} = \tan(C_1 x + C_1 C_2)\blacklozenge$$

3.3. Jednačine homogene po $y, y', \ldots, y^{(n)}$

Neka je u jednačini $F(x, y, y', y'') = 0$ funkcija F homogena po y, y', y'' stepena homogeniteta k tj. za funkciju F važi

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^k F(x, y, y', y'').$$

Ako je $t = \frac{1}{y}$ dobiće se jednačina oblika

$$F(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}) = 0$$

Uvodjenjem nove nepoznate funkcije $z = z(x)$ smenom $y = e^z, \quad y' = e^z z', \quad y'' = e^z[(z')^2 + z'']$ dobiće se jednačina

$$F[x, 1, z', (z')^2 + z''] = 0.$$

Novom smenom $z' = u, \quad z'' = u'$ poslednja jednačina postaje diferencijalna jednačina prvog reda.

$$F(x, 1, u, u^2 + u') = 0.$$

Napomena.

Smene $y = e^z$ i $z' = u$ mogu se spojiti u jednu sledećom relacijom

$$y = e^z = e^{\int u dx}.$$

Dakle, smenom $y = e^{\int u dx}$ homogenoj jednačini $F(x, y, y', y'') = 0$ može se sniziti red za jedinicu.

Potpuno ista situacija je i sa jednačinom oblika

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

gde je $F(x, y, y' \ldots, y^{(n)})$ homogena po y, $y' \ldots, y^{(n)}$.

3.3.1. Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$xyy'' + xy'^2 = yy'.$$

Rešenje: Ako se uvede smena $x = e^z$, tada je

$$y' = \frac{dy}{dz}e^{-z} \wedge y'' = \left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)e^{-2z}.$$

Zamenom y', y'' u zadatoj jednačini dobiće se

$$y\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{dy}{z}\right)^2 = 2y\frac{dy}{dz}.$$

Ova jednačina ne sadrži novu nezavisno promenljivu z pa se može rešiti na uobičajeni način smenom:

$$z' = u, \wedge z'' = u\frac{du}{dy}.$$

Medjutim ova jednačina se može rešiti i na drugi način. Kako su obe strane date jednačine izvodi po z, tj.

$$\frac{d}{dz}\left(y\frac{dy}{dz}\right) = \frac{d}{dz}(y^2)$$

pa je

$$y\frac{d}{dz} = y^2 + C_1,$$

a ovo je jednačina koja razdvaja promenljive i njeno rešenje je

$$y^2 + C_1 = C_2e^{2z}$$

i posle vraćanja na smenu $x = e^z$

$$y^2 + C_1 = C_2x^2. \blacklozenge$$

Ovu jednačinu rešiti smenom $y = e^{\int u(x)dx}$. **Vežbe.** Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

1. $y'' \cos x + y' \sin x + 1 = 0.$ $\quad (y = C_1 \sin x + \cos x + C_2)$
2. $y' + \frac{1}{4}y'' = xy''.$ $\quad (y = C_1x(2x-1) + C_2)$
3. $xy''' - y'' = 0.$ $\quad (y = C_1x^3 + C_2x + C_3)$
4. $yy'' = (y')^2.$ $\quad (y = C_2e^{C_1x})$
5. $2(y')^2 = (y-1)y''.$ $\quad (y = \frac{x+C_1}{x+C_2})$

6. $y'' \cos y - (y')^2 \sin y = 0$. $(C_1 x + C_2 = \sin y)$
7. $yy' \sin x + [(y')^2 + yy''] \cos x = 0$. $(y^2 = C_1 + C_2 \sin x)$
8. $y'y''' - 2(y'')^2 = 0$. $(y = -\frac{1}{C_1} \ln(C_1 x + C_2) + C_3)$
9. $y'y''' - (y'')^2 = 0$. $(y = C_2 e^{C_1 x} + C_3)$

3.4. Linearna diferencijalna jednačina reda n

3.4.1. Definicija.

(a) Diferencijalna jednačina oblika

$$y^{(n)} + f_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x) y = F(x), \tag{30}$$

gde su $f_i(x)$, $\quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i $F(x)$ date funkcije promenljive x, naziva se *linearna diferencijalna jednačina n-tog reda.*

(b) Ako je $F(x) \equiv 0$, jednačina (30) je *homogena* ; ako je $F(x) \neq 0$, jednačina (30) je *nehomogena* .

(c) Ako su funkcije $f_1, \ldots, f_n$ konstante, jednačina (30) naziva se *linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima* .

3.4.2. Definicija. Neka su $y_1, \ldots, y_n$ neprekidne funkcije na $[a, b]$

(a) Ako iz jednakosti

$$k_1 y_1 + \ldots + k_n y_n = 0 \quad (x \in [a, b]; k_1, \ldots, k_n \in R)$$

sleduje da je $k_1 = \ldots = k_n = 0$, kaže se da su funkcije $y_1, \ldots, y_n$ *linearno nezavisne* na $[a, b]$.

(b) Ako egzistiraju realni brojevi $k_1, \ldots, k_n$ takvi da je

$$k_1^2 + \ldots + k_n^2 > 0$$

i da je

$$k_1 y_1 + \ldots + k_n y_n = 0 \quad (x \in [a, b]),$$

za funkcije $y_1, \ldots, y_n$ kaže se da su *linearno zavisne* na [a,b].

(c) Determinanta oblika

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

zove se *Vronskijevom determinantom* ili *Vronskijanom* i označava sa

$$W(y_1, \dots, y_n).$$

3.4.3. Teorema. *Neka su* $y_1, \dots, y_n$ *rešenja homogene jednačine*

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \dots + f_n(x)y = 0, \quad (x \in [a, b])$$

i neka je

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Tada je

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f_1(\xi)d\xi}, \quad x_0 \in [a, b].$$

Dokaz. Diferenciranjem funkcije $W(x)$ dobiće se da je

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

jer sve ostale determinante koje se dobijaju diferenciranjem determinante $W(x)$ imaju po dve jednake vrste, te su jednake nuli. Množenjem elemenata $n-1$ vrste determinante $W'(x)$ respektivno koeficijentima

$$f_n(x), f_{n-1}(x), \dots, f_2(x)$$

i dodavanjem odgovarajućih rezultata množenja elementima poslednje vrste, zbog činjenice da su $y_1, \dots, y_n$ rešenja homogene jednačine, tj. zbog identiteta

$$y_i^{(n)} + f_1 y_i^{(n-1)} + \dots + f_n y_i = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

biće

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ -f_1(x)y_1^{(n-1)} & -f_1(x)y_2^{(n-1)} & \dots & -f_1(x)y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

ili $W'(x) = -f_1(x)W(x)$. Integracijom poslednje jednakosti dobiće se da je

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f_1(\xi)d\xi}, \quad x_0 \in [a,b].\blacksquare$$

Dobijena formula poznata je kao *Liuvilova* formula.

Polazeći od činjenice da je eksponencijalna funkcija e^u pozitivna za svako $u \in R$ Liuvilova formula ima za posledicu sledeće tvrdjenje.

3.4.4.Teorema. *Neka je $W(x) = W(y_1, \ldots, y_n)$ Vronskijan za n rešenja linearne homogene diferencijalne jednačine. Tada:*

(a) Ako je $W(x_0) = 0$ za neko $x_0 \in [a,b]$, onda je $W(x) = 0$ za svako $x \in [a,b]$.

(b) Ako je $W(x_0) \neq 0$ za neko $x_0 \in [a,b]$, onda je $W(x) \neq 0$ za svako $x \in [a,b]$.

3.4.5.Teoema. *Neka su $y_1, \ldots, y_n$ rešenja diferencijalne jednačine $y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)y = 0 \quad x \in [a,b]$. Funkcije $y_1, \ldots, y_n$ su linearno nezavisne na $[a,b]$ ako i samo ako je $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$.*

Dokaz. Neka su $y_1, \ldots, y_n$ linearno zavisne na $[a,b]$. To znači da egzistiraju brojevi $k_1, \ldots, k_n$ koji nisu svi jednaki nuli, takvi da je $k_1y_1 + \ldots + k_ny_n = 0$. Neka je $k_i \neq 0$. Tada je

$$y_i = -\frac{1}{k_i}(k_1y_1 + \ldots + k_{i-1}y_{i-1} + k_{i+1}y_{i+1} + \ldots + k_ny_n).$$

To znači da je i-ta kolona determinante $W(y_1, \ldots, y_n)$ linearna kombinacija ostalih pa je $W(y_1, \ldots, y_n) = 0$.

Obrnuto, neka je $W(y_1, \ldots, y_n) = 0$ i neka je W kvadratna matrica reda n takva da je $det(W) = W(y_1, \ldots, y_n)$. Pošto je $det(W) = 0$ to je $rang(W) \leq n-1$. Prema stavu o baznom minoru (Linearna algebra u okviru kursa Matematika I) bar jedna kolona matrice W je linearna kombinacija ostalih, a to znači da su funkcije $y_1, \ldots, y_n$ linearno zavisne.$\blacksquare$

3.4.6.Teorema. *Neka su $y_1, \ldots, y_n$ linearno nezavisna rešenja diferencijalne jednačine $y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)y = 0 \quad x \in [a,b]$. Tada je $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$ gde su $C_1, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante, opšte rešenje date jednačine.*

Dokaz. Neposredno se proverava da je $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$ rešenje jednačine $y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)y = 0$. Pošto je $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$, prema prdhodnoj teoremi funkcije $y_1, \ldots, y_n$ su linearno nezavisne pa se nijedna od njih ne može izraziti kao linearna kombinacija ostalih. To znači da se broj konstanti u rešenju $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$ neće smanjiti, tj. ostaće n pa je shodno Definiciji 1.1.5, $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$, opšte rešenje homogene jednačine $y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)y = 0$.■

3.4.7.Teorema. *Neka su $y_1, \ldots, y_n$ linearno nezavisna rešenja homogene jednačine*

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)y = 0$$

i neka je v rešenje nehomogene jednačine

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)y = F(x).$$

Tada je $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n + v$, gde su $C_1, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante, opšte rešenje nehomogene jednačine.

Ova teorema dokazuje se na potpuno isti način kao i predhodna.

3.4.8.Teorema.*Neka je poznato opšte rešenje homogene jednačine*

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)y = 0. \tag{31}$$

Tada se može odrediti opšte rešenje nehomogene jednačine

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)y = F(x). \tag{32}$$

Dokaz. Neka je $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$ opšte rešenje jednačine (31). Može se pretpostaviti da su $C_1, \ldots, C_n$ diferencijabilne funkcije od x. Tada je

$$y' = \sum_{i=1}^{n} C_iy_i' + \sum_{i=1}^{n} C_i'y_i. \tag{33}$$

Može se zahtevati da je druga suma u (33) jednaka nuli. Tada je

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} C_iy_i'' + \sum_{i=1}^{n} C_i'y_i'.$$

Ponovo se može zahtevati da druga suma zadnje jednakosti bude jednaka nuli. Ovaj postupak se nastavlja do

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_iy_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} C_i'y_i^{(n-1)}.$$

Dakle, imamo redom

$$y=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i, \quad y'=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i' \ldots, y^{(n)}=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n)}+\sum_{i=1}^{n} C_i' y_i^{(n-1)}$$

uz jednakosti

$$\begin{aligned} &C_1' y_1+\ldots+C_n' y_n=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &C_1' y^{(n-2)}+\ldots+C_n' y^{(n-2)}=0. \end{aligned} \tag{34}$$

Zamenom $y, y', \ldots, y^{(n)}$ u jednačini (32) i vodeći računa da su $y_1, y_2, \ldots y_n$ rešenja jednačine (31) dobiće se da je

$$C_1' y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n' y_n^{(n-1)}=F(x). \tag{35}$$

Jednakosti (34) i (35) daju jedan kvadratni sistem po nepoznatim funkcijama $C_1', \ldots, C_n'$. Pošto je determinanta ovog sistema $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$, egzistira jedinstveno rešenje ovg sistema koje se može dati u obliku

$$C_k'=(-1)^{(n+k)} \frac{W_k(y_1 \ldots, y_n)}{W(y_1, \ldots, y_n)} F(x), \quad (k \in\{1, \ldots, n\})$$

a $W_k(y_1, \ldots, y_n)$ je determinanta $n-1$ reda dobijena iz determinante $W(y_1, \ldots, y_n)$ izostavljanjem k-te kolone i poslednje vrste.

Integracijom poslednje jednakosti dobiće se da je

$$C_k(x)=\varphi_k(x)+D_k, \quad (k \in\{1, \ldots, n\})$$

gde su D_k proizvoljne konstante. Tada je

$$y=C_1(x) y_1+\ldots+C_n(x) y_n$$

opšte rešenje jednačine (32).■

Postupak kojim je dokazana ova teorema poznat je kao *Lagranžev metod varijacije konstanata*, a u nekim udžbenicima se sama teorema naziva *medod varijacije konstanata.*

3.5. Linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima

To je jednačina oblika

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = \begin{cases} 0 \\ F(x) \end{cases} \tag{36}$$

gde su $a_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}$ realne konstante. Najpre razmatramo homogenu jednačinu:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{37}$$

Smenom $y = e^{kx}, \quad y' = ke^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^n e^{kx}$ jednačina (37) transformiše se u

$$e^{kx}(a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n) = 0,$$

pa se zadatak svodi na rešavanje algebarske jednačine po k oblika

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{38}$$

Jednačina (38) poznata je kao *karakteristična jednačina* jednačine (37). Neposredno se proverava da je e^{kx} rešenje jednačine (37) u slučaju kada je k koren karakteristične jednačine.

Razlikuju se sledeći slučajevi:

1^0 **Koreni karakteristične jednačine su realni irazličiti.** Neka su ti koreni $k_1, \quad k_2, \ldots, k_n$. U tom slučaju je

$$W(e^{k_1 x}, \ldots, e^{k_n x}) = e^{(k_1 + \ldots + k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ . & . & \ldots & . \\ k_1^{(n-1)} & k_2^{(n-1)} & \ldots & k_n^{(n-1)}. \end{vmatrix}$$

Dakle,

$$W(e^{k_1 x}, \ldots, e^{k_n x}) = e^{(k_1 + \ldots + k_n)x} \prod_{1 \le j < i \le n} (k_i - k_j) \neq 0,$$

pa je opšte rešenje jednačine (37) oblika

$$y = C_1 e^{k_1 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}$$

gde su $C_1, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante.

2^0 **Koreni karakteristične jednačine su kompleksni i različiti.** Tada svakom paru kompleksnih korena $\alpha \pm i\beta$ odgovara par linearno nezavisnih rešenja

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \sin \beta x$$

jednačine (37). Jer je

$$e^{(\alpha\pm i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x \pm e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Neposredno se utvrdjuje da su funkcije

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \wedge e^{\alpha x}\sin\beta x$$

linearno nezavisne i rešenja jednačine (37). Dakle, korenima $k = \alpha + i\beta$ i $\overline{k} = \alpha - i\beta$ odgovaraju rešenja e^{kx} i $e^{\overline{k}x}$ koja treba zameniti linearno nezavisnim rešenjima $e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

3^0 **Karakteristična jednačina ima višestruke korene.** Neka je r realan koren reda l. Tada je r koren svih jednačina

$$\frac{d^k}{dr^k}(a_0r^n + a_1r^{(n-1)} + \ldots + a_n) = 0 \quad (k \in \{0, \ldots, l-1\})$$

pa je $x^ke^{rx} \quad (k \in \{0, \ldots, l-1\})$ rešenje jednačine (37). Neposredno, istim postupkom kao u slučaju 1^0, može se utvrditi da su ova rešenja linearno nezavisna.

Ako je $r = \alpha + i\beta \quad (\alpha, \beta \in R)$ koren karakteristične jednačine reda l, tada je $\overline{r} = \alpha - i\beta$ takodje koren reda l ove jednačine. Tom paru višestrukih korena odgovara sledećih $2l$ linearno nezavisnih rešenja

$$x^ke^{\alpha x}\cos\beta x, \quad x^ke^{\alpha x}\sin\beta x \ (k \in \{0, \ldots, l-1\}).$$

3.5.1. Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine.

$$y^{(6)} - 6y^{(5)} + 18y^{(4)} - 6y^{(3)} - 75y'' + 120y' - 52y = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina za datu diferencijalnu jednačinu je sledeći polinom po k

$$k^6 - 6k^5 + 18k^4 - 6k^3 - 75k^2 + 120k - 52 = 0$$

koji se faktoriše u obliku

$$(k-1)^2(k^2-4)(k^2-4k+13) = 0.$$

Dakle, koreni karakteristične jednačine su respektivno

$$k_1 = -2, k_2 = 2, k_3 = k_4 = 1, k_5 = 2+3i, k_6 = 2-3i$$

pa su linearno nezavisna rešenja $y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^x, y_4 = xe^x, y_5 = e^{2x}\cos 3x, y_6 = e^{2x}\sin 3x$. Prema tome, opšte rešenje je

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + C_3e^x + C_4xe^x + C_5e^{2x}\cos 3x + C_6e^{2x}\sin 3x.\blacklozenge$$

3.5.2. Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine.

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}.$$

Rešenje. Odgovarajuća homogena diferencijalna jednačina je

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Karakteristična jednačina ove diferencijalne jednačine je

$$k^2 + 3k + 2 = 0$$

i njeni koreni su

$$k_1 = -2, \quad k_2 = -1.$$

Opšte rešenje homogenog dela date diferencijalne jednačine je

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}.$$

Prema opisanoj metodi u Teoremi o varijaciji konstanata, smatraće se da su C_1 i C_2 funkcije od x i formirati sledeći sistem:

$$\begin{aligned} &C_1'e^{-2x} + C_2'e^{-x} = 0, \\ &-2C_1'e^{-2x} - C_2'e^{-x} = \frac{1}{1+e^x}, \end{aligned}$$

pa je

$$C_1' = -\frac{e^{2x}}{1+e^x} \wedge C_2' = \frac{e^x}{1+e^x}$$

te je posle integracije

$$\begin{aligned} &C_1 = \ln(e^x+1) - e^x + D_1, \\ &C_2 = \ln(e^x+1) + D_2. \end{aligned}$$

Dakle, opšte rešenje polazne jednačine je oblika

$$y = [\ln(e^x+1) - e^x + D_1]e^{-2x} + [\ln(e^x+1) + D_2]e^{-x}.\blacklozenge$$

Rešavanje linearnih jednačina višeg reda metodom varijacije konstanata, koja je ilustrovana na prethodnom primeru, može biti otežano zbog velikog broja običnih linearnih jednačina po nepoznatim funkcijama C_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$. U tom smislu, u narednom odeljku, dajemo jednu šemu za nalaženje partikularnog rešnja nehomogene jednačine n-tog reda kod koje je homogeni deo linearna diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima, a desna strana je jedna od sledećih funkcija ili neka njihova linearna kombinacija:

(a) polinom n-tog stepena $P_n(x)$,

(b) eksponencijalna funkcija $e^{\alpha x}$,

(c) trigonometriske funkcije $\sin \beta x$ i $\cos \beta x$.

Napominjemo da nije teško utvrditi da je ěma koju dajemo u narednom odelju posledica rezultata sadržnih u 3.4.7 i 3.4.8.

3.6. Partikularna rešenja za nehomogenu jednačinu

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = F(x).$$

Desna strana diferencijalne jed.	Koreni karakteristične jed.	Oblik part. rešenja
$F(x) = P_m(x)$ gde je $P_m(x)$-polinom stepena m	a) broj 0 nije koren karakteristične jednačine	$Q_m(x)$, gde je polinom stepena ne višeg od m
	b) broj 0 je koren karakteristične jednačine reda l	$x^lQ_m(x)$
$F(x) = e^{\alpha x}P_m(x)$ gde je α-realan broj	a) broj α nije koren karakteristične jednačine	$Q_m(x)e^{\alpha x}$ polinom stepena ne višeg od m
	b) broj α je koren karakteristične jednačine reda l	$x^lQ_m(x)e^{\alpha x}$
$F(x) =$ $P_m(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x$, gde su $P_m(x)$ i $Q_m(x)$-polinomi stepena ne višeg od m i jedan od njih ima stepen m	a) broj $i\beta$ nije koren karakteristične jednačine	$u_m(x)\cos\beta x$ $+v_m(x)\sin\beta x$, gde su $u_m(x)$ i $v_m(x)$-polinomi stepena ne višeg od m
	b) broj $i\beta$ je koren karakteristične jednačine reda l	$x^l[u_m(x)\cos\beta x$ $+v_m(x)\sin\beta x]$
$F(x) =$ $e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x$ $+Q_m(x)\sin\beta x]$,	a) broj $\alpha + i\beta$ nije koren karakteristične jednačine	$e^{\alpha x}[u_m(x)\cos\beta x$ $+v_m(x)\sin\beta x]$
	b) broj $\alpha + i\beta$ je koren karakteristične jednačine reda l	$x^le^{\alpha x}$ $[u_m(x)\cos\beta x$ $+v_m(x)\sin\beta x]$

3.6.1. Primer. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}.$$

Rešenje. Karateristična jednačina date jednačine je

$$k^2 - 3k + 2 = 0.$$

Njeni koreni su $k_1 = 1, \quad k_2 = 2$.

Opšte rešenje homogene jednačine (homogenog dela) date jednačine

$$y_h = C_1 e^x + C2e^{2x}.$$

Prema izloženoj šemi partikularno rešenje y_p biće oblika

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}.$$

Zamenom y_p, y_p', y_p'' u polaznoj jednačini i posle skraćivanja sa e^3x dobiće se sledeći identitet

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) \equiv x^2 + x.$$

Pa je

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -1, \quad C = 1.$$

Prema tome,

$$y_p = (\frac{1}{2}x^2 - x + 1)e^{3x}.$$

Dakle, opšte rešenje date nehomogene jednačine je oblika

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (\frac{1}{2}x^2 - x + 1)e^{3x}. \blacklozenge$$

3.7. Ojlerova diferencijalna jednačina

Linearna jednačina oblika

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = F(x)$$

gde su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstante naziva se *Ojlerova* diferencijalna jednačina. Uvodjenjem nove nezavisno promenljive smenom $x = e^t$ dobiće se

$$y' = \frac{\dot{y}}{e^t}, \quad y'' = \frac{\ddot{y} - \dot{y}}{e^{2t}}, \quad y''' = \frac{\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}}{e^{3t}}, \ldots$$

gde je

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}, \ \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots, x^k = e^{kt}, \ k \in \{1, \ldots, n\}$$

data jednačina svodi se na linearnu diferencijalnu jednačinu n-tog reda sa konstantnim koeficijentima.

Na isti način rešava se i jednačina oblika:

$$A_0(ax+b)^n y^{(n)} + A_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}(ax+b)y' + A_n y = F(x).$$

Naime smenom $ax+b=e^t$ i ova jednačina svodi se na linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

3.7.1. Primer Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 1 + x^2.$$

Rešenje. Posle smene $x = e^t$, $t = \ln x$, $x^2 = e^{2t}$, $y' = \frac{\dot{y}}{e^t}$, $y'' = \frac{\ddot{y}-\dot{y}}{e^{2t}}$ dobija se linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 1 + e^{2t}$$

Opšte rešenje ove diferencijalne jednačine je

$$y = C_1e^t + C_2e^{-2t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2t}.$$

Vraćanjem na smenu $t = \ln x$ dobija se opšte rešnje date jednačine

$$y = C_1x + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2.\blacklozenge$$

Vežbe. Rešiti sledeće diferencijalne jednačine.

1. $y'' - y' - 2y = 4x$. $(y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - 2x + 1)$
2. $y'' - 6y' + 9y = 18x - 3$. $(y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + 2x + 1)$
3. $y'' + 2y' + 2y = 2x^3 - 2$. $(y = e^{-x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + (x-1)^2)$
4. $y'' - 8y' + 16y = e^x(7\sin x + \cos x)$. $(y = (C_1 + C_2x)e^{4x} + \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x))$
5. $y'' - 6y' + 10y = \frac{e^{4x}}{2}(\sin x + 2\cos x)$. $(y = e^{3x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + \frac{e^{4x}}{2}\sin x)$
6. $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 + 2x + 4e^x$. $(y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + 2e^x + x^2 + 2x + \frac{4}{3})$
7. $x^3y''' + 4x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$. $(y = C_1x + \frac{1}{x}(C_2 \sin \ln x + C_3 \cos \ln x))$

8. $x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x$. $(y = x(C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x + \ln x)$

9. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$. $(y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3)$

10. $(x+1)^2y'' - (x+1)y' + y = \sqrt{x+1}$. $(y = (x+1)[C_1 + C_2\ln(x+1)] + 4\sqrt{x+1})$

3.8. Linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa promenljivim koeficijentima

To je jednačina oblika

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x). \tag{39}$$

gde su P, Q i F funkcije od x. Ako je $F(x) = 0$ ova jednačina je homogena i njen oblik je

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{40}$$

Nije teško primetiti da za jednačine (39) i (40) važe sve one teoreme koje su ranije date za linearne jednačine.

1^0 Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dva linearno nezavisna rešenja jednačine (40) onda se opšte rešenje jednačine (39) može odrediti Lagranževom metodom varijacije komstanata.

2^0 Ako je funkcija $\varphi(x)$ partikularno rešenje jednačine (39) smenom $y = u(x) + \varphi(x)$ jednačina (39) svodi se na jednačinu (40) po nepoznatoj funkciji $u(x)$.

3.8.1.Teorema. Ako je $y_0(x)$ partikularno rešenje homogene jednačine (40) smenom $y = y_0(x)z(x)$ nehomogena jednačina (39) svodi se na linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda.

Dokaz. Iz $y = y_0(x)z(x)$ sledi da je

$$y' = y_0'z + y_0z', \quad y'' = y_0z'' + 2y_0'z' + y_0''z.$$

Zamenom y, y', y'' u (39) dobiće se

$$y_0z'' + (2y_0' + Py_0)z' + (y_o'' + Py_0' + Qy_0)z = F. \tag{41}$$

Kako je $y_o'' + Py_0' + Qy_0 = 0$ (y_0 je partikularno rešenje) jednačina (41) postaje

$$y_0z'' + (2y_0' + Py_0)z' = F. \tag{42}$$

Smenom $z' = u, \quad z'' = u'$ jednačina (42) postaje

$$y_0 u' + (2y_0' + Py_0)u = F, \tag{43}$$

a to je linearna diferencijalna jednačina prvog reda po nepoznatoj funkciji u.■

Napomena. Smene izložene u ovom dokazu mogu se spojiti u jednu sledećom relacijom:

$$y = y_0(x) \int u(x)dx,$$

pa se jednačina (39) u prvom koraku svodi na jednačinu (43).

3.8.2.Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 0$$

ako je $y_1 = e^x$ jedno njeno partikularno rešenje.

Rešenje. Posle smene $y = e^x z$ data diferencijalna jednačina postaje

$$e^x z'' + e^x \left(2 + \frac{x}{1-x}\right) z' = 0.$$

Stavljajući $z' = u, \quad z'' = u'$ dobiće se

$$u' + \left(2 + \frac{x}{1-x}\right) u = 0$$

odakle je integracijom

$$u = C_1(x-1)e^{-x}.$$

Pošto je $u = z'$, ponovnom integracijom, dobiće se

$$z = \int C_1(x-1)e^{-x}dx + C_2$$

pa je opšte rešenje zadate jednačine

$$y = y_1 z = C_1 x + C_2 e^x.\blacklozenge$$

Vežbe. Naći opšte rešenje date diferencijalne jednačine ako se zna da njena homogena jednačina ima partikularno rešenje oblika $y = e^{mx}$.

1. $(x+2)y'' + (x+1)y' - y = 1. \quad (y = C_1(x+1) + C_2e^{-x} - 1)$
2. $(x-1)y'' - xy' + y = 2xe^{-x}. \quad (y = C_1x + C_2e^x + e^{-x})$
3. $(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2. \quad (y = C_1x + C_2e^x + x^2)$
4. $(x^2+2x)y''+(x^2-2)y'-(2x+2)y = x^2+2x+2. \quad (y = C_1x^2+C_2e^{-x}-x)$
5. $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 2(2x+1)^3e^{-x}. \quad (y = C_1(4x^2+1) + C_2e^{-2x} - (8x^2-8x+10)e^{-x})$