

CPM metoda - primer

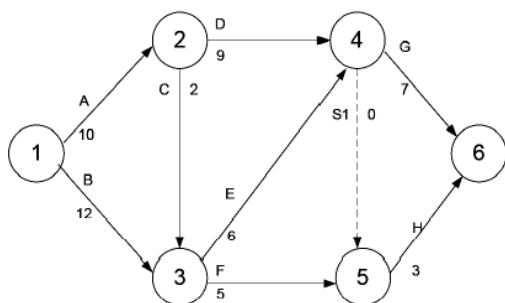
Primer 5.1.2.1. Ukoliko je spisak aktivnosti i njihova međusaobna zavisnost, kao i trajanje, dat u tabeli I-16, konstruisati matricu međuzavisnosti aktivnosti i mrežni dijagram a potom izvršiti analizu vremena projekta po CPM metodi.

Tabela I-16. Lista međuzavisnosti aktivnosti sa njihovim dužinama trajanja

Posmatrana aktivnost	A	B	C	D	E	F	G	H
Predhodna aktivnost	—	—	A	A	B, C	B, C	D, E	D,E,F
Trajanje aktivnosti (dan)	10	12	2	9	6	5	7	3

Tabela I-17. Matrica međuzavisnosti aktivnosti

Posmatrana aktivnost Predhodna aktivnost	A	B	C	D	E	F	G	H
A			X	X				
B					X	X		
C					X	X		
D							X	X
E							X	X
F								X
G								
H								
Trajanje aktivnosti (dan)	10	12	2	9	6	5	7	3



- *Određivanje najranijeg početka aktivnosti*

Koristeći jednačinu (3) moguće je izvršiti sledeći proračun:

$$t_1^0 = 0$$

$$t_2^0 = \max(t_1^0 + t_{12}) = 0 + 10 = 10$$

$$t_3^0 = \max[(t_1^0 + t_{13}); (t_2^0 + t_{23})] = \max[(0 + 12); (10 + 2)] = \max(12, 12) = 12$$

$$t_4^0 = \max[(t_2^0 + t_{24}); (t_3^0 + t_{34})] = \max[(10 + 9); (12 + 6)] = \max(19, 18) = 19$$

$$t_5^0 = \max[(t_4^0 + t_{45}); (t_3^0 + t_{35})] = \max[(19 + 0); (12 + 5)] = \max(19, 17) = 19$$

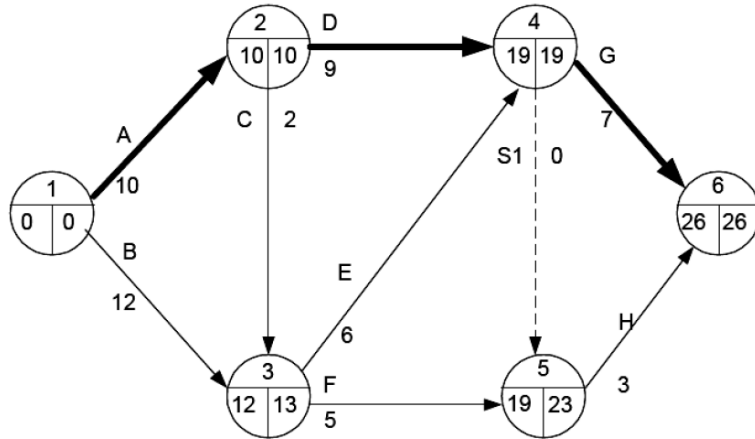
$$t_6^0 = \max[(t_4^0 + t_{46}); (t_5^0 + t_{56})] = \max[(19 + 7); (19 + 3)] = \max(26, 22) = 26$$

Prema tome, vreme najranijeg mogućeg završetka projekta je $t_n^0 = t_6^0 = 26$ dana. Usvajan je to i vreme najkasnije dozvoljenog završetka, odnosno $t_6^0 = t_6^1 = 26$.

- *Određivanje najkasnijeg početka aktivnosti*

Koristeći jednačinu (5) moguće je izvršiti sledeći proračun:

$$\begin{aligned}
 t_5^1 &= \min [(t_6^1 - t_{56})] = \min [(26 - 3)] = 23 \\
 t_4^1 &= \min [(t_6^1 - t_{46}); (t_5^1 - t_{54})] = \min [(26 - 7); (23 - 0)] = 19 \\
 t_3^1 &= \min [(t_4^1 - t_{34}); (t_5^1 - t_{35})] = \min [(19 - 6); (23 - 5)] = 13 \\
 t_2^1 &= \min [(t_4^1 - t_{24}); (t_3^1 - t_{32})] = \min [(19 - 9); (13 - 2)] = 10 \\
 t_1^1 &= \min [(t_2^1 - t_{12}); (t_3^1 - t_{13})] = \min [(10 - 10); (13 - 12)] = 0
 \end{aligned}$$

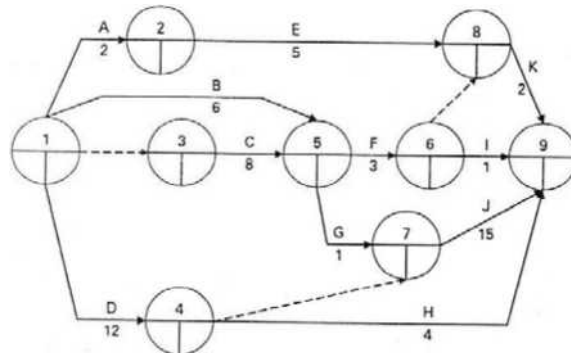


Slika I-55. Konačni MD za primer 5.1.2.1.1.

- ❖ Kritični put je najduži niz aktivnosti koji određuje ukupno trajanje projekta
- ❖ Aktivnosti na kritičnom putu su kritične aktivnosti
- ❖ Kritične aktivnosti nemaju vremensku rezervu
- ❖ Promena u trajanju jedne kritične aktivnosti uzrokuje promenu trajanja celog projekta

Primer 5.I.4.5. U mrežnom dijagramu datom na slici I-63. uraditi sledeće:

- izvršiti proračun vremena napred-nazad i označiti kritične puteve,
- odrediti termine aktivnosti F ,
- izračunati vremenske rezerve aktivnosti C i I .



Slika I-63. Mrežni dijagram za primer proračuna vremena napred-nazad

Rešanje:

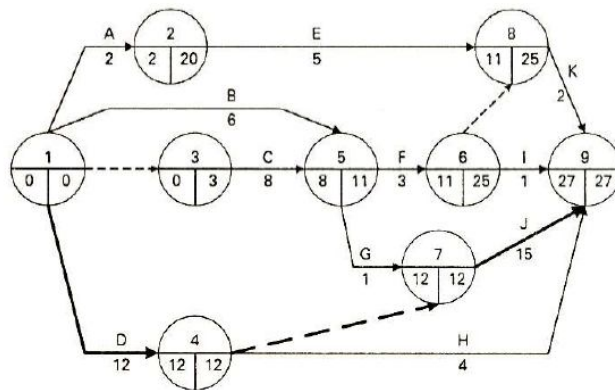
- a) Proračun vremena napred započinje tako što se najranijem vremenu početnog događaja dodeli vrednost 0, a zatim se računa:

$$\begin{aligned}
 t_1^0 &= 0 \\
 t_2^0 &= 0 + 2 = 2 \\
 t_3^0 &= 3 \\
 t_4^0 &= 0 + 12 = 12 \\
 t_5^0 &= \max\{t_1^0 + 6 = 0 + 6; t_3^0 + 8 = 0 + 8\} = 8 \\
 t_6^0 &= t_5^0 + 3 = 8 + 3 = 11 \\
 t_7^0 &= \max\{t_5^0 + 1 = 8 + 1; t_4^0 + 0 = 12 + 0\} = 12 \\
 t_8^0 &= \max\{2 + 5; 11 + 0\} = 11 \\
 t_9^0 &= \max\{12 + 4; 12 + 15; 11 + 1; 11 + 2\} = 27
 \end{aligned}$$

Pri proračunu vremena unazad najpre se najkasnijem vremenu završnog događaja projekta dodeli vrednost $t_9^1 = t_9^0 = 27$, a zatim se računa:

$$\begin{aligned}
 t_9^1 &= t_9^0 = 27 \\
 t_8^1 &= 27 - 2 = 25 \\
 t_7^1 &= 27 - 15 = 12 \\
 t_6^1 &= \min\{25 - 0; 27 - 1\} = 25 \\
 t_5^1 &= \min\{25 - 3; 12 - 1\} = 11 \\
 t_4^1 &= \min\{27 - 4; 12 - 0\} = 12 \\
 t_3^1 &= 11 - 8 = 3 \\
 t_2^1 &= 25 - 5 = 20 \\
 t_1^1 &= \min\{12 - 12; 3 - 0; 11 - 6; 20 - 2\} = 0
 \end{aligned}$$

Vrednosti najranijih i najkasnijih vremena događaja dobijene proračunom vremena napred-nazad date su na slici 1-64. Aktivnosti koje čine kritični put predstavljene su podebljanim linijom.



Slika I-64. Mrežni dijagram sa urađenim proračunom vremena napred-nazad

Aktivnosti, kod kojih je maksimalno dozvoljeno vreme trajanja $t_j^1 - t_i^0$ veće od njihovog vremena trajanja t_{ij} , imaju određenu vremensku rezervu za njihovo izvršenje. To su nekritične aktivnosti. Podatak o vremenskim rezervama aktivnosti ima poseban praktičan značaj u tehnici mrežnog planiranja. On pokazuje za koliko vremenskih jedinica može biti odložen početak pojedinih aktivnosti a da to ne utiče na konačni rok završetka celog projekta. Ovaj podatak je veoma značajan i za planiranje korišćenja kapaciteta ograničenih resursa tokom realizacije projekta. U zavisnosti od položaja posmatrane aktivnosti prema aktivnostima koje joj neposredno prethode i koje neposredno slede, razlikujemo nekoliko vrsta vremenskih rezervi.

- **Ukupna vremenska rezerva** aktivnosti (R_{ij}^U) određuje se tako što od maksimalno dozvoljenog vremena trajanja aktivnosti oduzmemo vreme trajanja te aktivnosti, tj.

$$\Delta u_{ij} = R_{ij}^U = t_j^1 - t_i^0 - t_{ij} \quad (8)$$

Ukupna vremenska rezerva pokazuje za koliko možemo pomeriti vreme najranijeg početka aktivnosti, a da pri tome krajnji rok završetka projekta ne bude pomeran.

- **Slobodna vremenska rezerva** (R_{ij}^S) pokazuje za koliko možemo produžiti trajanje aktivnosti A_{ij} , ili pomeriti njen najraniji početak, pa da sve naredne aktivnosti zadrže najranije vreme početka. Ovu vremensku rezervu mogu imati samo aktivnosti kod kojih završni događaj A_j zavisi od završetka više aktivnosti. Slobodnu vremensku rezervu izračunavamo prema izrazu:

$$\Delta s_{ij} = R_{ij}^S = t_j^0 - t_i^0 - t_{ij} \quad (9)$$

- **Nezavisna vremenska rezerva** (R_{ij}^N) pokazuje za koliko se može pomeriti izvršenje neke aktivnosti i pored toga što je događaj i dostignut u najkasnijem dozvoljenom vremenu, pa da to ne utiče na najraniji početak narednih aktivnosti. Ona se izračunava preko sledećeg izraza:

$$\Delta n_{ij} = R_{ij}^N = t_j^0 - t_i^1 - t_{ij} \quad (10)$$

Pored vremenskih rezervi aktivnosti mogu se utvrditi i vremenske rezerve događaja (R_i i R_j) i vremenske rezerve puteva u mrežnom dijagramu (R_p).

- o **Vremenska rezerva događaja (R_i i R_j)** određuje se kao razlika između najkasnijeg i najranijeg vremena nastupanja datog događaja, pa se pojavljuje:

- **vremenska rezerva početnog događaja**, koja se izračunava kao:

$$R_i = t_i^1 - t_i^0 \quad (11)$$

- **vremenska rezerva završnog događaja**, koja se izračunava kao:

$$R_j = t_j^1 - t_j^0 \quad (12)$$

Napomena: Vremenske rezerve imaju događaji koji pripadaju samo nekritičnim aktivnostima.

- b) Termini aktivnosti F , tj. aktivnosti A_{56} :

$$\begin{aligned} t_5^0 &= 8 & t_6^0 &= t_5^0 + t_{56} = 8 + 3 = 11 \\ t_6^1 &= 25 & t_5^1 &= t_6^1 - t_{56} = 25 - 3 = 22 \end{aligned}$$

- c) Vremenske rezerve aktivnosti C , tj. aktivnosti A_{35} :

- **Ukupna vremenska rezerva:** $\Delta u_{35} = R_{35}^U = t_5^1 - t_3^0 - t_{35} = 11 - 0 - 8 = 3$
- **Slobodna vremenska rezerva:** $\Delta s_{35} = R_{35}^S = t_5^0 - t_3^0 - t_{35} = 8 - 0 - 8 = 0$
- **Nezavisna vremenska rezerva:** $\Delta n_{35} = R_{35}^N = t_5^0 - t_3^1 - t_{35} = 8 - 3 - 8 = -3, \Rightarrow 0$

Vremenske rezerve aktivnosti I , tj. aktivnosti A_{69} :

- **Ukupna vremenska rezerva:** $\Delta u_{69} = R_{69}^U = t_9^1 - t_6^0 - t_{69} = 27 - 11 - 1 = 15$
- **Slobodna vremenska rezerva:** $\Delta s_{69} = R_{69}^S = t_9^0 - t_6^0 - t_{69} = 27 - 11 - 1 = 15$
- **Nezavisna vremenska rezerva:** $\Delta n_{69} = R_{69}^N = t_9^0 - t_6^1 - t_{69} = 27 - 25 - 1 = 1$

PERT metoda primer

Osvajanje novog proizvoda je planirano prema matrici međuzavisnosti Tabela I-32

Tabela I-32. Matrica međuzavisnosti aktivnosti

		Posmatrana aktivnost							
		A	B	C	D	E	F	G	H
Predhodna aktivnost	A			X					
	B			X	X				
	C						X	X	
	D					X			
	E								X
	F							X	
	G								
	H								
Vreme (dan)	Optimističko (a_{ij})	1,5	2	2	1	3	3	2	4
	Modalno (m_{ij})	3	3	2,5	1,5	5	6	2,5	5
	Pesimističko (b_{ij})	3,5	4	3	2,5	7	7	3,5	5

Uraditi:

- ⊙ Odrediti očekivano vreme te_j (dan) i disperziju D_j (dan^2), za svaku aktivnost.
- ⊙ Projektovati mrežni dijagram.
- ⊙ Odrediti očekivano vreme trajanja projekta.

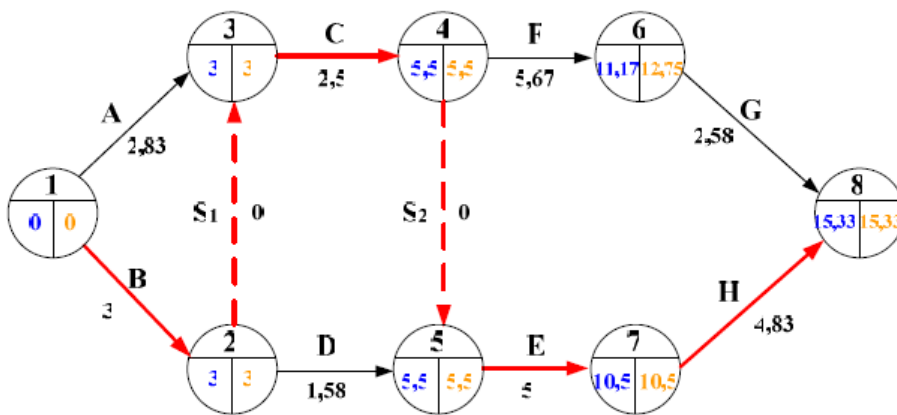
Rešenje. Očekivano vreme realizacije aktivnosti $i-j$ se odvija kao matematičko očekivanje za slučajnu promenljivu koja se pokorava β -raspodeli, a disperzija slučajne veličine kao srednje kvadratno odstupanje, kao:

$$Te_{ij} = M(t) = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6} \quad D_{ij}(t) = \sigma_{ij}^2 = \left(\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right)^2$$

Očekivano vreme trajanja aktivnosti i njihova disperzija prikazani su u tabeli I-33, a na slici I-73 prikazan je mrežni dijagram sa proračunatim vremenima trajanja.

Tabela I-33. Očekivano vreme i disperzija za sve aktivnosti

Aktivnosti	A	B	C	D	E	F	G	H
Te_{ij}	2,83	3	2,5	1,58	5	5,67	2,58	4,83
D_{ij}	0,11	0,11	0,03	0,06	0,44	0,44	0,06	0,03



Slika I-73. Konačni mrežni dijagram sa proračunatim vremenima

Primer 5.2.3.2. U tabeli I-34 data je lista aktivnosti jednog razvojnog projekta, kao i procenjena vremena trajanja njegovih aktivnosti, izražena u danima. Potrebno je konstruisati odgovarajući mrežni dijagram i analizirati vremena, koristeći PERT metodu. Planirano vreme završetka projekta iznosi 39 dana. Odrediti verovatnoću ostvarenja planiranog roka završetka projekta.

Tabela I-34. Lista aktivnosti sa procenjenim vremenima trajanja

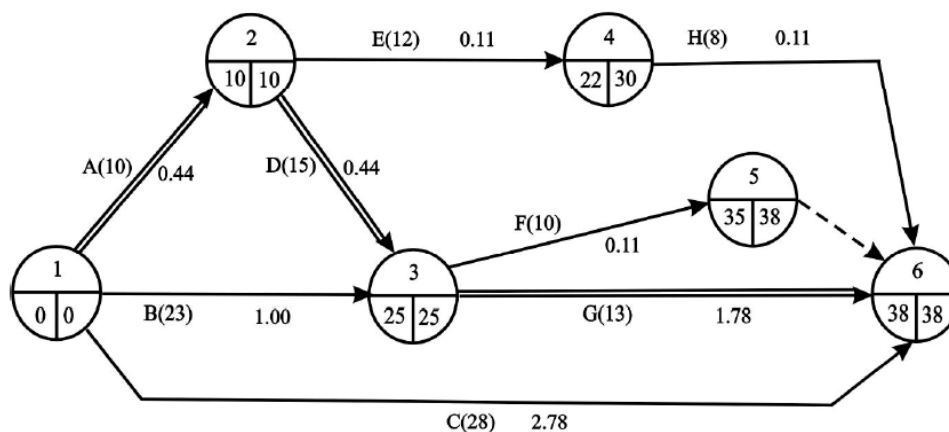
Aktivnost		Vreme		
Naziv	Zavisi od	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}
A	-	8	10	12
B	-	20	23	26
C	-	23	28	33
D	A	13	15	17
E	A	11	12	13
F	B, D	9	10	11
G	B, D	9	13	17
H	E	7	8	9

Na osnovu polaznih podataka, a pomoću relacija (14) i (15), određujemo očekivana vremena $(t_e)_{ij}$ i varijanse $(\sigma^2)_{ij}$ za sve aktivnosti. Ovi podaci su prikazani u tabeli I-35.

Tabela I-35. Proračunata očekivana vremena $(t_e)_{ij}$ i varijanse $(\sigma^2)_{ij}$ za sve aktivnosti

Aktivnost	$(t_e)_{ij}$	$(\sigma^2)_{ij}$
A	10	0,44
B	23	1,00
C	28	2,78
D	15	0,44
E	12	0,11
F	10	0,11
G	13	1,78
H	8	0,11

Određivanje vremena nastupanja događaja T_E i T_L izvršeno je, prema relacijama (16) i (17), na samom mrežnom dijagramu proračunom "napred-nazad", i prikazano na slici I-74.



Slika I-74. Proračun vremena po metodi PERT

Verovatnoća nastupanja završnog događaja projekta (događaj 6), ako je njegovo planirano vreme nastupanja $(T_S)_6 = 39$ dana, bila bi:

Faktor verovatnoće (Z) može se odrediti za svaki događaj mrežnog dijagrama. Međutim, on se izračunava samo za događaje čije vreme odigravanja unapred ugovaramo, za neke kritične događaje koji predstavljaju završetke nekog dela projekta i obavezno za rok završetka celog projekta. Tako, pomoću najranijeg vremena nastupanja završnog događaja projekta $(T_E)_n$ može se izračunati koja je verovatnoća da se ostvari planirani rok izvršenja celog projekta $(T_S)_n$. Prethodno, prema izrazu (21), određujemo faktor verovatnoće za završni događaj projekta, pa važi relacija (22):

$$Z_n = \frac{(T_S)_n - (T_E)_n}{\sqrt{(\sigma^2)_n}} \quad (22)$$

Verovatnoća ispunjenja planiranog roka projekta, u oznaci $P(Z)$, jeste funkcija faktora verovatnoće, a njene vrednosti najčešće se daju u vidu tabličnih vrednosti. Na osnovu vrednosti faktora verovatnoće Z_n iz izraza (22) pronalaze se odgovarajuće tablične vrednosti, koje označavaju traženu verovatnoću ispunjenja planiranog roka. Vrednosti verovatnoće za faktore verovatnoće $Z < -3$ približno su jednake nuli, vrednosti verovatnoće za faktore $Z > 3$ približno su jednake 1, pa se njene vrednosti daju samo za Z koje se kreće u granicama $-3 < Z < 3$. U tabeli I-31 prikazane su tablične vrednosti za funkciju verovatnoće $P(Z)$.

Tabela I-31. Vrednosti verovatnoće $P(Z)$ u zavisnosti od vrednosti promenljive Z

Z	$P(Z)$	Z	$P(Z)$	Z	$P(Z)$	Z	$P(Z)$
-3.0	0.0013	-1.4	0.0808	0.2	0.5793	1.8	0.9641
-2.9	0.0019	-1.3	0.0968	0.3	0.6179	1.9	0.9713
-2.8	0.0026	-1.2	0.1151	0.4	0.6554	2.0	0.9772
-2.7	0.0035	-1.1	0.1357	0.5	0.6915	2.1	0.9821
-2.6	0.0047	-1.0	0.1587	0.6	0.7257	2.2	0.9861
-2.5	0.0062	-0.9	0.1841	0.7	0.7580	2.3	0.9893
-2.4	0.0082	-0.8	0.2119	0.8	0.7881	2.4	0.9918
-2.3	0.0107	-0.7	0.2420	0.9	0.8159	2.5	0.9938
-2.2	0.0139	-0.6	0.2743	1.0	0.8413	2.6	0.9953
-2.1	0.0179	-0.5	0.3085	1.1	0.8643	2.7	0.9965
-2.0	0.0228	-0.4	0.3446	1.2	0.8849	2.8	0.9974
-1.9	0.0287	-0.3	0.3821	1.3	0.9032	2.9	0.9981
-1.8	0.0359	-0.2	0.4207	1.4	0.9192	3.0	0.9987
-1.7	0.0446	-0.1	0.4602	1.5	0.9332		
-1.6	0.0548	-0.0	0.5000	1.6	0.9452		
-1.5	0.0668	0.1	0.5398	1.7	0.9554		

- a) Prema relaciji (22) faktor verovatnoće je

$$Z_6 = \frac{(T_S)_6 - (T_E)_6}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{36}^2}} = \frac{39 - 38}{\sqrt{0,44 + 0,44 + 1,78}} = \frac{1}{1,63} = 0,61$$

- b) Na osnovu tabličnih vrednosti iz table I-31, za $Z=0,61$, pronalazi se verovatnoća $P(Z)=0,73$ (ili 73%), što predstavlja veliku verovatnoću postizanja planiranog roka.

Napomena: Prema izvornoj literaturi mogu se naći sledeća tumačenja u vezi sa verovatnoćom nastupanja pojedinih događaja:

- vrednost verovatnoće do 25% označava veliki rizik u pogledu ostvarenja planiranog roka;
- vrednost verovatnoće između 25% i 60% označava normalan rizik i dobro korišćenje kapaciteta;
- verovatnoća preko 60% označava mali rizik, ali i nedovoljno iskorišćenje kapaciteta.