



# Teorija mašina i mehanizama



## SADRŽAJ

<b>1. FUNKCIJA, VRSTE I STRUKTURA MEHANIZAMA</b> .....	3
1.1. Funkcija mehanizma .....	3
1.2. Vrste mehanizama .....	5
1.3. Struktura mehanizama .....	6
<b>2. ANALIZA POLUŽNIH MEHANIZAMA</b> .....	12
2.1. Polužni četvorougao .....	12
2.2. Trenutni pol. Inverzno kretanje .....	15
2.3. Grafičke metode pozicione i analize stanja brzina i ubrzanja .....	18
2.3.1. Poziciona analiza. Položaj pokretne tačke .....	18
2.3.2. Dva beskonačno bliska položaja pokretne tačke .....	18
2.3.3. Grafičke metode određivanja brzine .....	19
2.3.4. Prenosna funkcija prvoga reda .....	21
2.3.5. Tri beskonačno bliska položaja pokretne tačke .....	23
2.3.6. Grafičke metode određivanja ubrzanja .....	23
2.4. Analitičke metode pozicione i analize stanja brzina i ubrzanja .....	26
2.4.1. Poziciona analiza .....	26
2.4.2. Analitička metoda određivanja brzina i ubrzanja .....	27
2.5. Korišćenje programskih paketa za kinematsku analizu mehanizama .....	31
2.6. Merni postupak određivanja položaja, brzina i ubrzanja članova realnih mehanizama .....	31
2.7. Kinematika kretanja kroz tri beskonačno bliska položaja .....	33
2.7.1. <i>Bresse</i> -ovi krugovi .....	33
2.7.2. <i>Euler-Savary</i> -jeva jednačina .....	36
2.7.3. Tangenta na rulete i centar krivine .....	38
2.7.4. Raspored tačaka $P-A-A_0-A_w$ .....	39
2.7.5. Prevojni i povratni krug kod četvoročlanih mehanizama .....	40
2.7.6. Ekstremum prenosne funkcije prvoga reda .....	41
2.8. Putanje tačaka spojke. Teorema Roberts-Čebiševa .....	42
<b>3. SINTEZA POLUŽNIH MEHANIZAMA</b> .....	44
3.1. Sinteza mehanizama za vođenje .....	45
3.2. Sinteza mehanizama za prenos .....	49
3.2.1. Sinteza mehanizama sa povratnim kretanjem .....	49
3.2.2. Sinteza mehanizama kao generatora funkcije .....	52
3.2.3. Ugao prenosa .....	56
<b>4. MEHANIZMI S KOTRLJANJEM</b> .....	57
4.1. Zupčasti prenosnici sa nepokretnim osama .....	58
4.2. Planetni prenosnici .....	59
4.2.1. Kinematika planetnih prenosnika .....	60
4.2.2. Putanje tačaka planetnog točka .....	63
4.3. Diferencijalni prenosnici .....	65
4.4.1. Jednostepeni diferencijalni prenosnici .....	66
4.4.2. Dvostepeni diferencijalni prenosnici .....	67
4.4.3. Talasni prenosnik ( <i>Harmonic drive</i> ) .....	70

<b>5. BREGASTI MEHANIZMI</b> .....	74
5.1. Vrste bregastih mehanizama .....	74
5.2. Analiza bregastih mehanizama .....	78
5.3. Sinteza bregastih mehanizama .....	81
5.3.1. Izbor prenosne funkcije .....	81
5.3.2. Poluprečnik osnovnog kruga .....	84
5.3.3. Konstrukcija profila bregaste ploče .....	87
<b>6. MEHANIZMI SA PREKIDNIM KRETANJEM</b> .....	88
6.1. Mehanizam sa malteškim krstom .....	88
6.2. Mehanizam sa zvezdastim točkom .....	96
6.3. Mehanizmi sa skakavicom .....	97
<b>7. DINAMIKA MEHANIZAMA</b> .....	98
7.1. Sile i momenti .....	99
7.1.1. Pogonske sile i momenti .....	99
7.1.2. Tehnološke sile i momenti .....	101
7.1.3. Sile i momenti u zglobovima .....	102
7.2. Kinetostatika .....	104
7.2.1. Grupa druge klase .....	106
7.2.2. Grupa treće klase .....	108
7.2.3. Grupa četvrte klase .....	110
7.2.4. Grupa prve klase .....	110
7.3. Sile i momenti inercije .....	111
7.3.1. Translatorno kretanje .....	111
7.3.2. Rotaciono kretanje .....	111
7.3.3. Napadna tačka rezultujuće sile inercije člana .....	112
7.4. Metod ekvivalentnih masa .....	115
7.4.1. Statička zamena masa .....	115
7.4.2. Dinamička zamena masa .....	116
7.5. Uravnoteženje rotora .....	118
<b>LITERATURA</b> .....	122

## 1. FUNKCIJA, VRSTE I STRUKTURA MEHANIZAMA

### 1.1. Funkcija mehanizma

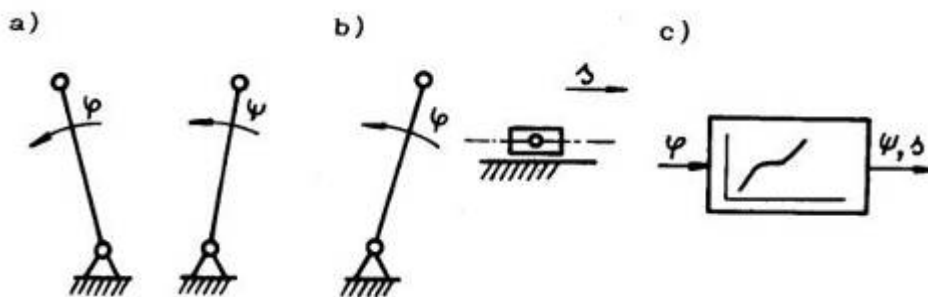
Osnovna funkcija mehanizma je prenos sile i kretanja ili vođenje tačke po zadatoj putanji, odnosno, tela kroz zadate položaje. U zavisnosti od toga koja od ovih funkcija dominira, razlikuju se dve osnovne grupe mehanizama:

- mehanizmi za prenos i
- mehanizmi za vođenje.

**Mehanizmi za prenos** imaju zadatak da silu ili kretanje prenesu od pogona do izvršnog dela mašine ili nekog drugog mehanizma po utvrđenoj prenosnoj funkciji.

**Prenosna funkcija** je zavisnost izlazne koordinate  $\Psi$  za kružno, odnosno  $s$  za pravolinijsko kretanje vodjenog člana, i ulazne koordinate  $\varphi$  pogonskog člana (slika 1.1):

$$\psi = \psi(\varphi) \quad ; \quad s = s(\varphi). \quad (1.1)$$



Sl.1.1.

Prvi izvod prenosne funkcije  $\Psi'$ , odnosno  $s'$ , po ulaznoj koordinati  $\varphi$  predstavlja prenosnu funkciju prvoga reda:

$$\psi' = \frac{d\psi}{d\varphi} \quad ; \quad s' = \frac{ds}{d\varphi}. \quad (1.2)$$

Kako, u opštem slučaju, ulazna koordinata zavisi od vremena  $\varphi = \varphi(t)$ , to se brzina vodjenog člana  $\dot{\psi} = \omega_i$ , odnosno  $\dot{s} = v_i$ , može izraziti pomoću prenosne funkcije prvoga reda:

$$\omega_i = \dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \psi' \cdot \omega_u; \quad (1.3)$$

$$v_i = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = s' \cdot \omega_u,$$

gde je:  $\omega_u$  - pogonska ugaona brzina.

Drugi izvod prenosne funkcije po ulaznoj koordinati predstavlja prenosnu funkciju drugoga reda:

$$\psi'' = \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} \quad ; \quad s'' = \frac{d^2s}{d\varphi^2}. \quad (1.4)$$

U opštem slučaju, ubrzanje vodjenog člana  $\varepsilon_i = \dot{\omega}_i = \ddot{\psi}_i$ , odnosno  $a_i = \dot{v}_i = \dot{s}_i$ , može se formulirati izrazima:

$$\ddot{\psi}_i = \varepsilon_i = \frac{d(\psi'_i \cdot \omega_u)}{dt} = \frac{d\psi'_i}{dt} \cdot \omega_u + \psi'_i \cdot \frac{d\omega_u}{dt} = \psi''_i \cdot \omega_u^2 + \psi'_i \cdot \dot{\omega}_u$$

i

$$\dot{s}_i = a_i = s''_i \cdot \omega_u^2 + s'_i \cdot \dot{\omega}_u$$

odakle se, za konstantnu ugaonu brzinu  $\omega_u = \text{const.}$ , dobija:

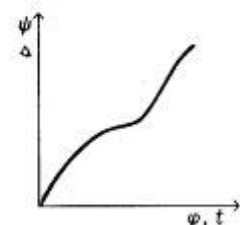

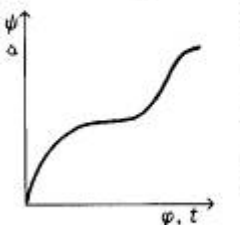



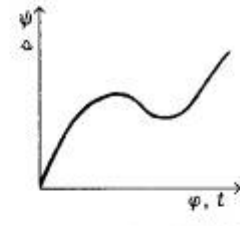

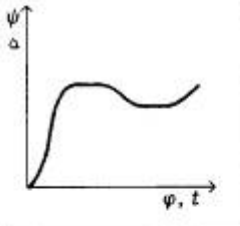



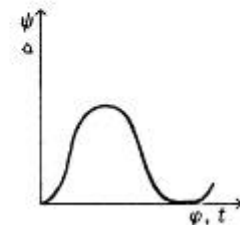

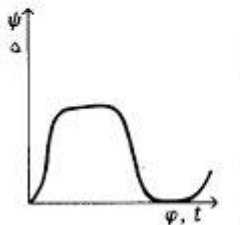



$$\ddot{\psi}_i = \psi''_i \cdot \omega_u^2 ; \quad \dot{s}_i = s''_i \cdot \omega_u^2 .$$

Može se uočiti da su prenosna funkcija prvoga reda i funkcija brzine slične funkcije, sa faktorom sličnosti  $\omega_u$  (pogonska ugaona brzina), kao i da su za  $\omega_u = \text{const.}$  prenosna funkcija drugoga reda i funkcija ubrzanja slične funkcije, sa faktorom sličnosti  $\omega_u^2$ .

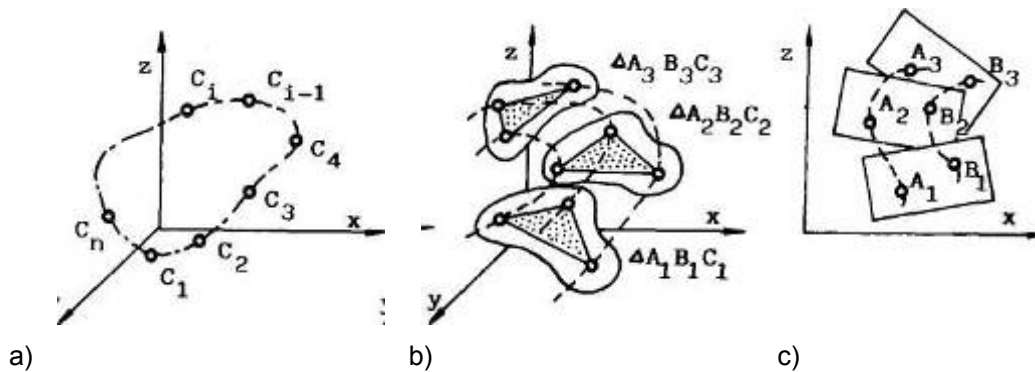
Jednačine (1.1) do (1.6) važe za kružnu ulaznu koordinatu, odnosno za klasične pogonske motore sa rotacionim kretanjem. Na sličan način mogu se izvesti i odgovarajuće jednačine za slučaj kada je ulazna koordinata linijska, odnosno kada je pogon linearni motor.

Prenosne funkcije mehanizama su u opštem slučaju nelinearne i mogu biti progresivne, progresivne sa regresivnim delom ili povratne funkcije. Sve ove funkcije mogu biti i sa periodima mirovanja (**tabela 1.1**).

**Tabela 1.1.**

Vrsta kretanja	Bez perioda mirovanja	simbol	Sa periodom mirovanja	simbol
Progresivno		Pravolinijsko 		Pravolinijsko 
		Kružno 		Kružno 
Progresivno sa regresivnim delom		Pravolinijsko 		Pravolinijsko 
		Kružno 		Kružno 
Povratno		Pravolinijsko 		Pravolinijsko 
		Kružno 		Kružno 

**Mehanizmi za vođenje** imaju zadatak da provedu tačku, odnosno telo, kroz zadate položaje. U koordinatnom sistemu - xyz (slika 1.2a) zadati su položaji tačke  $C_i$  kroz koje je potrebno provesti tačku mehanizma u zadanom smeru.



Sl.1.2.

Položaj tela u prostoru definisan je položajem njegovih triju nekolinearnih tačaka (ne leže na istoj pravoj). Zadatak mehanizma za vođenje tela **u prostoru** svodi se stoga na vođenje tačaka **A**, **B** i **C** kroz zadate položaje  $A_i$ ,  $B_i$  i  $C_i$ , odnosno vođenje trougla  $\Delta ABC$  kroz zadate položaje  $\Delta A_i B_i C_i$  (slika 1.2b).

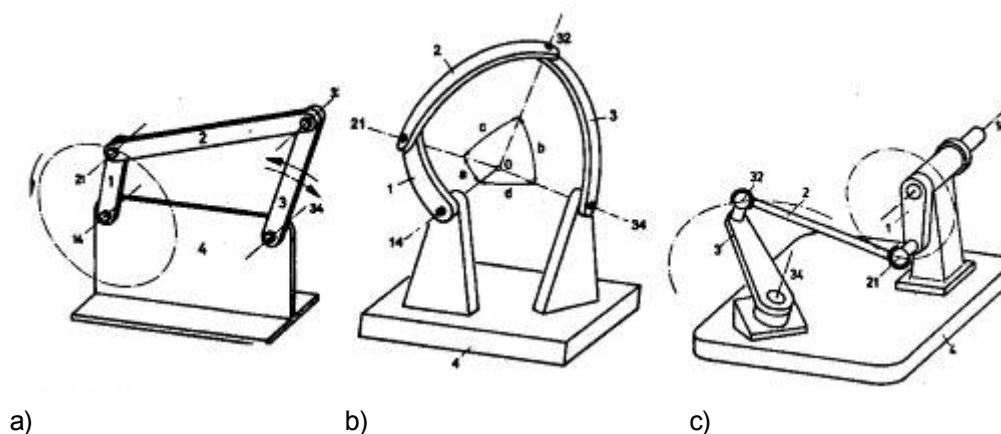
Položaj pokretne ravni u odnosu na nepokretnu pri **ravanskom** kretanju definisan je položajem dveju tačaka **A** i **B**, odnosno položajem duži  $\overline{AB}$ , pa se vođenje ravni svodi na vođenje duži  $\overline{AB}$  kroz zadate položaje (slika 1.2c).

## 1.2. Vrste mehanizama

Govoreći o funkciji mehanizama izvršili smo njihovu podelu na mehanizme za prenos i mehanizme za vođenje. U zavisnosti od pravaca osa obrtanja članova, mehanizmi mogu biti:

- **ravni**; ose obrtanja su paralelne, članovi mehanizma kreću se u medjusobno paralelnim ravnima,
- **sferni**; sve ose obrtanja seku se u jednoj tački, a kretanje članova mehanizma vrši se u koncentričnim kalotama, i
- **prostorni**; ose obrtanja se mimoilaze, a članovi mehanizma realizuju prostorno kretanje.

Na **slici 1.3** prikazani su primeri ravnog (a), sfernog (b) i prostornog (c) polužnog mehanizma.

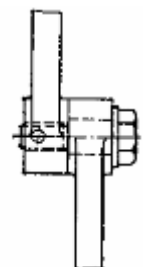


Sl. 1.3.

Dva susedna člana mehanizma, međusobno povezana zglibom, čine **kinematski par** (slika 1.4). Kod ravnih mehanizama mogu se sresti četiri tipa kinematskih parova:

- rotacioni par (slika 1.4),
- prizmatični par (slika 1.7c),
- kotrljajni par (slika 1.7b) i
- bregasti par (slika 1.7a).

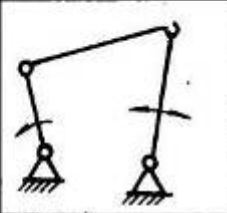

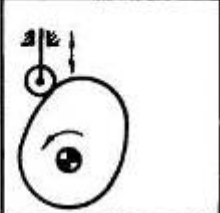
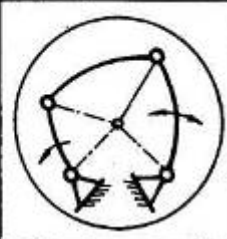
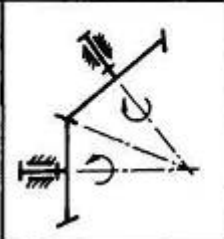

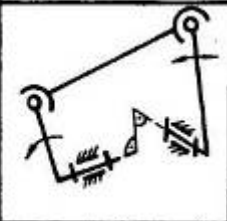


Sl. 1.4.



Prema vrsti kinematičkih parova koje sadrže, mehanizmi mogu biti:

- polužni, sastavljeni od rotacionih i prizmatičnih parova,
- kotrljajni (zupčasti) i
- bregasti.

Na **slici 1.5.** prikazani su primeri ravnih, sfernih i prostornih polužnih, zupčastih i bregastih mehanizama.

Vrsta mehanizama	Polužni	Kotrljajni (zupčasti)	Bregasti
Ravni mehanizmi			
Sferni mehanizmi			
Prostorni mehanizmi			

Sl.1.5.

U narednim poglavljima biće obradjena analiza i sinteza ravnih polužnih, zupčastih i bregastih mehanizama. U okviru zupčastih mehanizama neće biti obrađivani klasični zupčasti prenosnici, koji se izučavaju u *Mašinskim elementima*, već samo mehanizmi sa nelinearnom prenosnom funkcijom, kao i planetni i diferencijalni prenosnici.

### 1.3. Struktura mehanizama

**Elementi** mehanizama su članovi, zglobovi i organi. Broj, vrsta i raspored elemenata definišu **strukturu** mehanizma.

Zglobnom vezom se obezbedjuje da članovi kinematskog para sve vreme relativnog kretanja budu u međusobnom kontaktu. Dva člana mehanizma mogu biti međusobno vezana samo jednim zglobom. Član mehanizma može imati dva zgloba (binarni član), tri zgloba (ternerni član) ili više zglobova (**slika 1.6**).



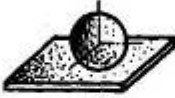











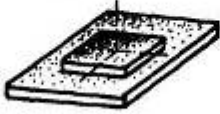














Sl.1.6.

Od oblika zgloba zavisi vrsta mogućeg relativnog kretanja između članova (rotacija, translacija ili rotacija i translacija). Broj mogućih relativnih kretanja u zglobu definiše se **brojem stepeni slobode kretanja zgloba (f)**. Razlika broja stepeni slobode kretanja slobodnog tela (**b**) i broja stepeni slobode kretanja u zglobu (**f**) definiše broj **ograničenja** kretanja uvedenih zglobovom vezom (**u**):

$$u = b - f. \quad (1.7)$$

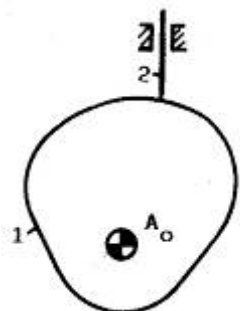
Broj stepeni slobode kretanja slobodnog tela u prostoru je **b=6** (tri moguće translacije i tri rotacije), a pri kretanju u ravni **b=3** (dve moguće translacije i jedna rotacija). U **tabeli 1.2.** dat je pregled najčešće korišćenih zglobova, sa brojem stepeni slobode kretanja u zglobu, vrstama mogućih relativnih kretanja i simbolima za njihovo prikazivanje u kinematskim shemama.

Tabela 1.2.

Broj ograničenja	Broj stepeni slobod	ŠEMA ZGLOBA		simbol
1	5			
2	4			
2	4			
3	3			
3	3			
4	2			
5	1			
5	1			
5	1			

Medjusobna veza članova u zglobovima kinematskih parova ostvaruje se:

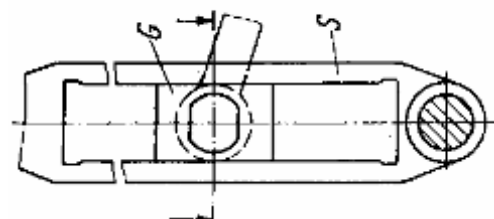
- po površini (niži kinematski parovi - rotacioni (**slika 1.4**) i prizmatični par (**slika 1.7c**)),
- po liniji (viši kinematski par - kotrljajni par (**slika 1.7b**)), ili
- u tački (viši kinematski par - bregasti par (**slika 1.7a**)).



a)



b)



c)

Sl. 1.7.

Tabela 1.3.

Vrsta dodira	po površini	po liniji	u tački
Rotacioni par $u=2$			
Prizmatični par $u=2$			

Rotacioni i prizmatični par, koji po definiciji imaju dodir po površini, mogu konstruktivno biti izvedeni tako da se dodir između članova ostvaruje u tačkama ili po linijama, kako je to prikazano u **tabeli 1.3**.

Prizmatični par sa pokretnom vodjicom (**slika 1.7c**) naziva se kulisni par. Manji, kompaktniji član takvog para naziva se **kulisni kamen**, a vodjica **kulisom**.

Klizač u prizmatičnom paru sa nepokretnom vođicom (klizač 3 na **slici 1.9**) naziva se **klip**.

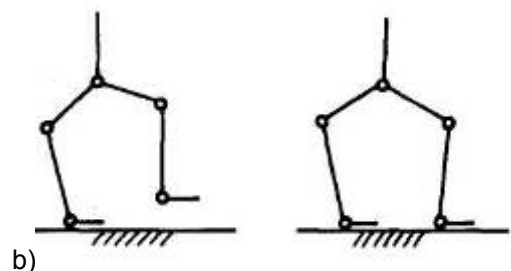
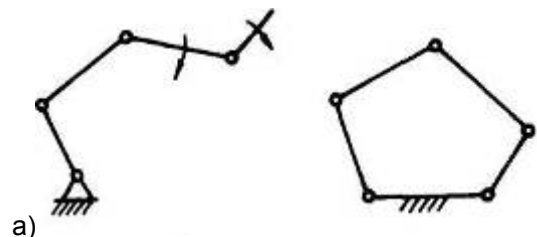
**Krivaja** je član mehanizma koji se može okrenuti za pun krug ( $2\pi$ ) oko nepokretne ležišne tačke.

**Balansijer** ili šetalica je član mehanizma koji se može ograničeno kretati oko nepokretne ležišne tačke za ugao  $\theta_i < 2\pi$ .

**Spojka** je opšte pokretni član mehanizma, zglobovno vezan za dva pokretna člana mehanizma.

**Postolje** je član mehanizma koji se može smatrati nepokretnim.

Više članova, međusobno povezanih zglobovima, čine **kinematski lanac**. Kinematski lanac je **otvoren** ako je poslednji član vezan samo jednim članom mehanizma (**slika 1.8a**, levo). Ukoliko je poslednji član vezan za dva ili više članova mehanizma kinematski lanac je **zatvoren** (**slika 1.8a**, desno). **Mehanizam** se često definiše kao zatvoreni kinematski lanac sa jednim članom koji se može smatrati nepokretnim (**slika 1.8a**, desno).



Sl.1.8.

**Organi** vrše pomoćnu funkciju, a dodaju se mehanizmu kako bi poboljšali njegovu osnovnu funkciju. U organe spadaju: opruge, amortizeri, graničnici i sl. Svoju osnovnu funkciju mehanizam može ostvariti i bez organa, mada se bez njih ukupni zadatak mehanizma ne ispunjava optimalno.

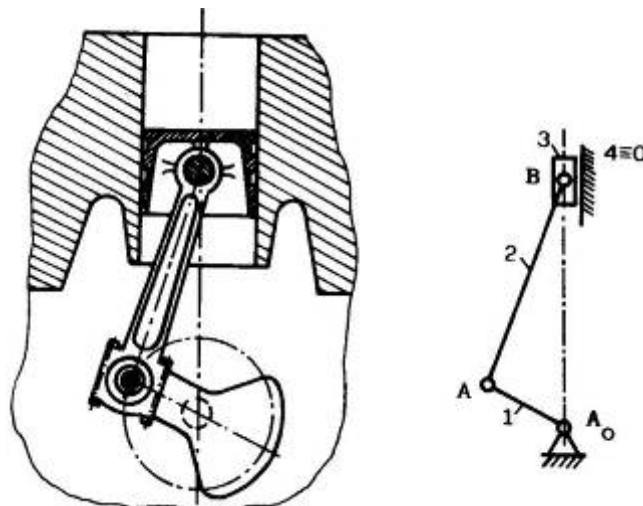
Konstrukcioni crteži mehanizama su veoma složeni. Konstrukcija, izrada i oblik zavise od brojnih uslova. Za kinematsku analizu i sintezu potrebne su jednostavne sheme. U tabelama i na dosad prikazanim slikama već su korišćeni pojedini **simboli** za prikazivanje kretanja, zglobova i strukture mehanizama. U **tabeli 1.4**. dat je pregled simbola, koji će u narednim poglavljima biti korišćeni za prikazivanje strukturnih i kinematskih shema mehanizama.



Tabela 1.4.

Zglob	Pokretan	Nepokretan
Jedno- struki		
Više- struki		
Rotacioni par		
Prizmatični par	Kulisni	
	Klipni	
Bregasti par		
Kotrijajni par		

Pokretni zglobovi biće označavani velikim slovima: **A, B, C...**, nepokretni zglobovi još i sa indeksom (<sub>0</sub>) nepokretnog člana (postolja): **A<sub>0</sub>, B<sub>0</sub>...** Na **slici 1.9.** prikazan je konstrukcioni crtež klipnog mehanizma i njegova strukturna i kinematska shema.



Sl.1.9.

Članovi mehanizama obeležavaju se arapskim brojevima ili malim slovima ( $a, b, c, \dots$ ), njihove dužine malim slovima, a uglovi kojima se definiše njihov položaj pisanim grčkim slovima ( $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi, \dots$ ). Kod složenih mehanizama kao i kod primene numeričkih metoda članovi mehanizma biće obeležavani sa  $l_i$  (nepokretni član - postolje sa  $l_0$ ), delovi članova između pojedinih tačaka nosiće u indeksu oznake ovih tačaka (npr. deo između tačaka **A** i **C** -  $l_{AC}$ ). U tom slučaju položaj članova biće definisan uglovima  $\theta_i$ , merenim od pravca pozitivnog smera x-ose, gde je indeks  $i$  - redni broj člana u mehanizmu. Relativni položaj dva člana biće obeležen uglovima  $\theta_{ik}$  (indeksi  $i, k$  su redni brojevi članova), merenim u pozitivnom matematičkom smeru.

Definicije, termini i simboli koji se koriste u literaturi iz oblasti *Teorije mašina i mehanizama* usaglašavaju se i utvrđuju u Komisiji za terminologiju **IFTOMM-a** (Internacionalna federacija za teoriju mašina i mehanizama).

**Broj stepeni slobode kretanja** mehanizma predstavlja broj potrebnih koordinata da bi njegov položaj bio jednoznačno određen. Imajući u vidu da mehanizmi imaju jedan nepokretni član, broj stepeni slobode kretanja može se formulisati izrazom:

$$F = b \cdot (n - 1) - \sum_{z=1}^i u \quad (1.8)$$

gde je  $n$  - broj članova,  $i$  - broj zglobova, a  $u$  - broj njihovih ograničenja.

Za **prostorne** mehanizme (svaki član ima 6 stepena slobode kretanja) se ova relacija u razvijenom obliku može predstaviti izrazom:

$$F = 6 \cdot (n - 1) - 5 \cdot z_5 - 4 \cdot z_4 - 3 \cdot z_3 - 2 \cdot z_2 - z_1 \quad (1.9)$$

gde je:  $z_1$  - broj kinematskih parova (zglobova) 1. klase (sa  $f=5$ ),  
 $z_2$  - broj kinematskih parova (zglobova) 2. klase (sa  $f=4$ ),  
 $z_3$  - broj kinematskih parova (zglobova) 3. klase (sa  $f=3$ ),  
 $z_4$  - broj kinematskih parova (zglobova) 4. klase (sa  $f=2$ ),  
 $z_5$  - broj kinematskih parova (zglobova) 5. klase (sa  $f=1$ ),

Prelazom sa prostornih na ravne mehanizme, svaki član i svaki kinematski par gube po 3 stepena slobode kretanja odakle sledi da svaki član ravnog mehanizma ima 3 stepena slobode kretanja i obrazuje sa susednim članovima kinematske parove pete (oduzimaju 2 stepena slobode kretanja) ili četvrte klase (oduzimaju 1 stepen slobode kretanja). Stoga se **strukturna formula** za određivanje broja stepeni slobode **ravnih** mehanizama može predstaviti izrazom:

$$F = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot z_5 - z_4 \quad (1.10)$$

**Mehanizam će izvoditi jednoznačno definisano kretanje ako je broj pogonskih elemenata jednak broju stepeni slobode kretanja.**

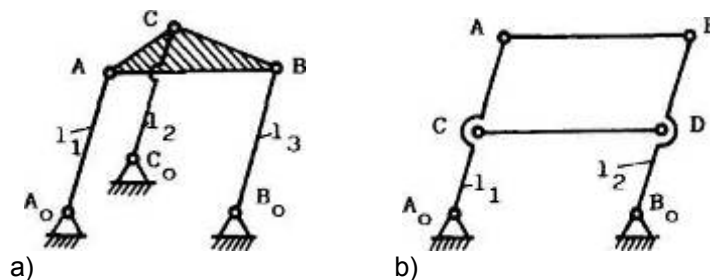
U praksi se, međutim, javljaju i mehanizmi kod kojih je broj stepeni slobode kretanja jednak nuli ili čak manji od nule, a koji se ipak kreću. Njihova pokretljivost je uslovljena specifičnim dimenzijama članova mehanizma.

Na **sl. 1.10.** prikazani su primeri mehanizama koji imaju broj stepeni slobode kretanja jednak nuli, ali se mogu kretati ako je ispunjen uslov (**slika 1.10a**):

$$l_1 = l_2 = l_3 \quad \text{ i } \quad l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \quad (1.11)$$

odnosno za drugi mehanizam (**slika 1.10b**):

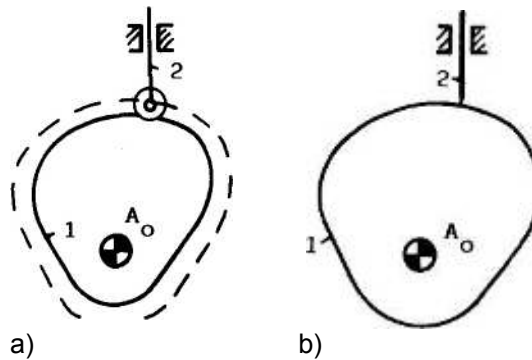
$$l_1 = l_2 ; l_1 \parallel l_2 ; l_{AC} = l_{BD} \quad (1.12)$$



Sl.1.10.

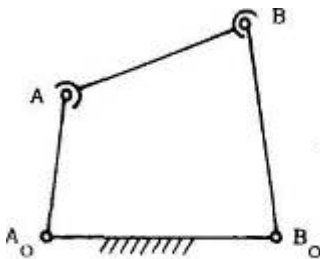
Pošto dužine članova predstavljaju uslov pokretljivosti, to ovi mehanizmi moraju biti veoma tačno izradjeni.

Uočimo još, da bi mehanizam na **slici 1.10.a.** mogao da funkcioniše i bez jedne krivaje, odnosno mehanizam na **slici 1.10.b.** i bez jedne spojke, što znači da mehanizam vrši definisano kretanje i bez ovih članova. Ovakvi članovi mehanizma su sa aspekta funkcije mehanizma suvišni, a njihove veze pasivne. Mehanizam prikazan na **slici 1.11.a.** može da funkcioniše i bez točkića ako član **2** klizi po ekvidistanti krive brega, na odstojanju jednakom poluprečniku točkića (**slika 1.11.b**). Točkić je u ovom slučaju suvišan član i ne treba ga uzimati u obzir pri izračunavanju broja stepeni slobode kretanja i drugih kinematskih veličina. U ovom slučaju, točkić se može smatrati organom, jer ima pomoćnu funkciju pretvaranja trenja klizanja u trenje kotrljanja.

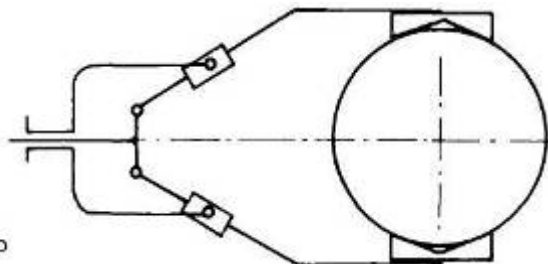


Sl.1.11.

Ukoliko se kod ravnih mehanizama, kod kojih je primenom obrasca za ravne mehanizme dobijeno  $F=1$ , primeni obrazac za prostorne mehanizme, dobija se negativan broj stepeni slobode kretanja. Ova razlika je posledica uslova za izvođenje ravnih mehanizama, koja proizilazi iz definicije ravanskog kretanja (paralelnost osa obrtanja), a koju obrazac za prostorne mehanizme ne podrazumeva; ovakav mehanizam se ne može kretati ukoliko nije obezbedjena paralelnost osa obrtanja. Često se, zbog teškoća dovoljno tačnog realizovanja ove paralelnosti, zglobovi **A** i **B** izvode kao sferni, a ne kao što je uobičajeno kod ravnih mehanizama kao cilindrični (**slika 1.12**).



Sl.1.12.



Sl.1.13.

U robotici se češće primenjuju otvoreni kinematski lanci, sa više stepeni slobode kretanja. Zbog moguće promene strukture ovih mehanizama u toku rada, menja se i broj stepeni slobode kretanja. Broj stepeni slobode kretanja hvatača na **slici 1.13.** kada je bez objekta je  $F=1$ , a kada uhvati objekat  $F=0$ .

## 2. ANALIZA POLUŽNIH MECHANIZAMA

Kinematski lanac sastavljen od rotacionih i prizmatičnih parova naziva se **polužni mehanizam**.

Najjednostavniji ravanski polužni mehanizam je otvoreni kinematski lanac, koji sadrži samo jedan kinematski par i u kome je jedan od članova nepokretan. Ovakav kinematski par, koji može biti rotacioni ili prizmatični, predstavlja prema klasifikaciji ruskog naučnika *Assur*-a grupu prve klase (**slika 2.1**).

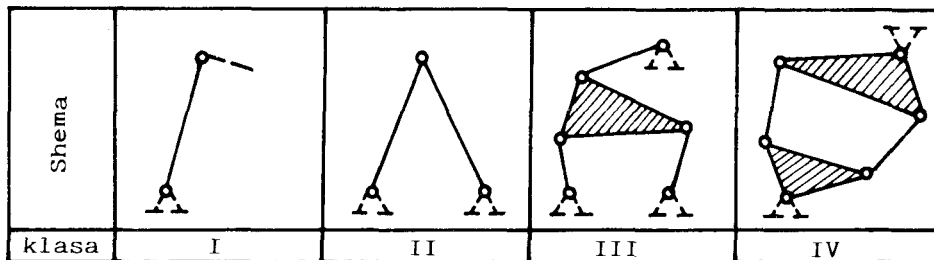
Prema *Assur*-u, svaki polužni mehanizam sa  $F=1$  obrazuje se tako što se pogonskom i nepokretnom članu dodaju kinematski lanci koji zadovoljavaju uslov da im je stepen slobode kretanja jednak nuli:

$$F = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot z_1 - z_2 = 3n_p - 2 \cdot z_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = \frac{3n_p}{2}$$

odakle sledi i određeni broj kombinacija broja pokretnih članova ( $n_p$ ) i zglobova, koje zadovoljavaju ovaj uslov:

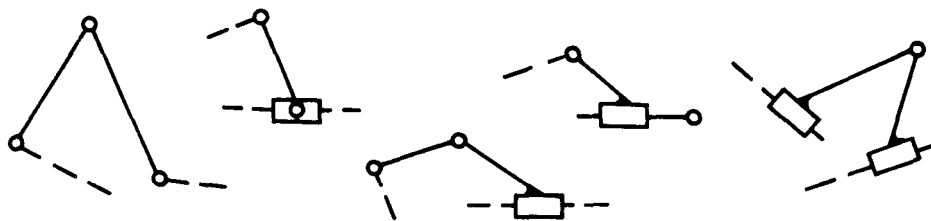
$n_p$	2	4	6	...
$z_1$	3	6	9	...

Po istoj klasifikaciji, grupa druge klase je kinematski par sa dva pokretna člana (dijada), grupa treće klase je četvoročlani kinematski lanac bez zatvorene strukture, a grupa četvrte klase četvoročlani kinematski lanac, koji može imati i zatvorenu strukturu (**slika 2.1**).



Sl. 2.1.

Grupe druge, treće i četvrte klase, u zavisnosti od zastupljenosti rotacionih i prizmatičnih parova, mogu biti različitih modifikacija. Na **slici 2.2** prikazane su modifikacije grupe druge klase. Grupa prve klase ima jedan stepen slobode kretanja, dok grupe druge, treće i četvrte klase, uz pretpostavku da su slobodni zglobovi stalni (nepokretni), imaju broj stepeni slobode kretanja jednak nuli.



Sl. 2.2.

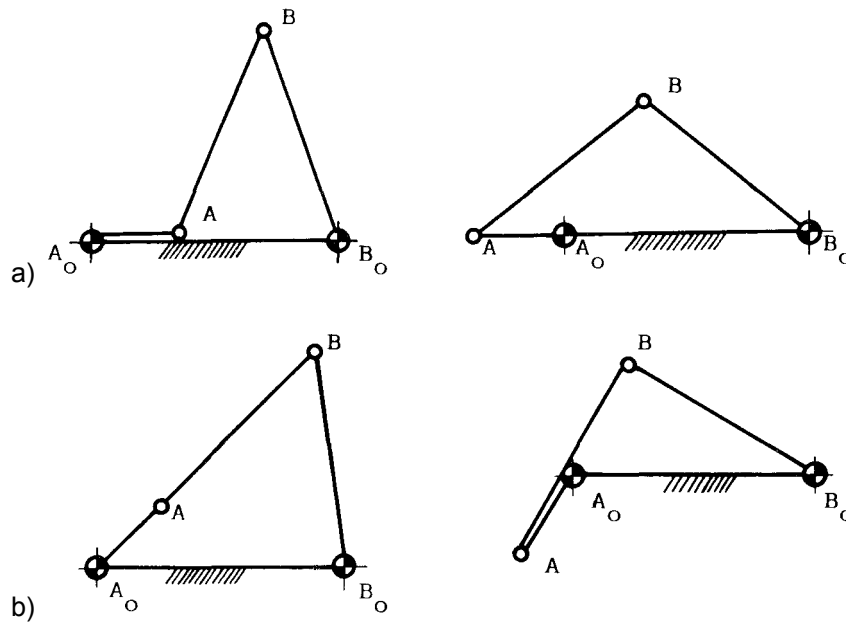
Polužni mehanizmi formiraju se dodavanjem grupa viših klasa grupi prve klase i postolju. Broj stepeni slobode kretanja polužnog mehanizma jednak je broju grupa prve klase u mehanizmu.

### 2.1. Polužni četvorougao

Osnovni polužni mehanizam, polužni četvorougao (**slika 1.3a**), sastoji se od jedne grupe prve i jedne grupe druge klase. Polužni četvorougao ima četiri člana, od kojih je jedan nepokretan, kao i četiri rotaciona zglobova.

Položaj članova mehanizma definisan je uglovima  $\varphi$ ,  $\gamma$  i  $\psi$  (**slika 2.11**). Polužni četvorougao ima jedan stepen slobode kretanja pa je za jednoznačno definisanje položaja svih članova mehanizma potrebno i dovoljno poznavati jednu od koordinata ( $\varphi$ ,  $\gamma$  ili  $\psi$ ), odnosno mehanizam treba da ima jedan pogonski član. Iz prethodnog zaključka je proistekao i zahtev da bi mehanizam trebalo da ima najmanje jedan član koji može da se okrene za pun krug ( $2\pi$ ).

Karakteristični položaji poluznog četvorougla su unutrašnji i spoljašnji postoljni položaj (**slika 2.3a**), kao i spoljašnji i unutrašnji mrtvi položaj (**slika 2.3b**).



Sl. 2.3.

Na osnovu ovih karakterističnih položaja, kao i uslova zatvorenosti kinematskog lanca, izveden je **kriterijum Grashof-a** koji glasi:

Da bi najmanje jedan član mehanizma mogao da se okrene za pun krug ( $2\pi$ ), zbir dužina najkraćeg i najdužeg člana mora biti manji od zbira dužina preostala dva člana:

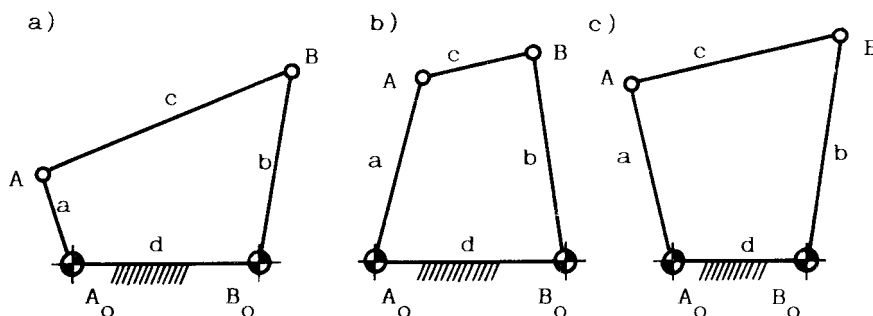
$$2(l_{\max} + l_{\min}) \leq \sum_{i=1}^4 l_i \quad (2.1)$$

gde su  $l_i$  - dužine članova mehanizma.

Mehanizmi koji ne zadovoljavaju *Grashof*-ov kriterijum su dvobalansijeri.

U zavisnosti od toga koji je član mehanizma najkraći, razlikujemo tri osnovna tipa poluznih četvorouglova (**slika 2.4**):

- jednokrivajni mehanizam (slika 2.4a)**; najkraći član **a** je zglibom vezan za postolje **d** i može se okrenuti za pun krug (krivaja), dok je kretanje člana **b** ograničeno (balansijer);
- dvobalansijerni mehanizam (slika 2.4b)**; najkraći član mehanizma, spojka **c**, može se okrenuti za pun krug, dok je kretanje članova **a** i **b** ograničeno (balansijeri).
- dvokrivajni mehanizam (slika 2.4c)**; najkraći član mehanizma je postolje **d**, a članovi **a** i **b** se mogu okretati za pun krug (krivaje).

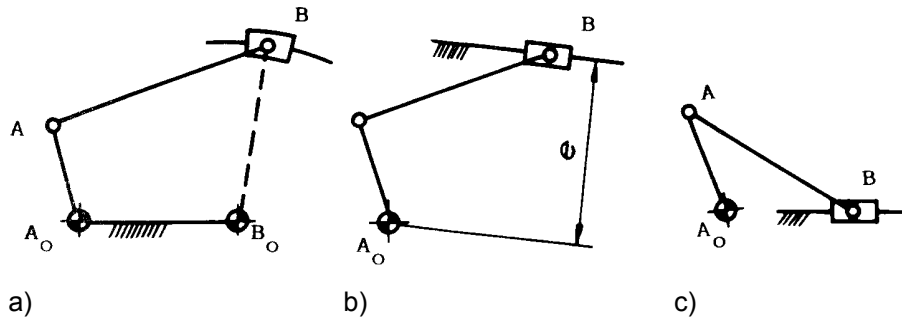


Sl. 2.4.

Iz osnovnih tipova polužnog četvorougla mogu se modifikacijom rotacionog u prizmatični par dobiti dva modifikovana polužna mehanizma - klipni i kulisni mehanizam.

### Klipni mehanizam

Kružno vođenje tačke **B** može biti realizovano i pomoću klizača i kružne vođice čiji bi centar krivine bila tačka **B<sub>0</sub>** (slika 2.5a).

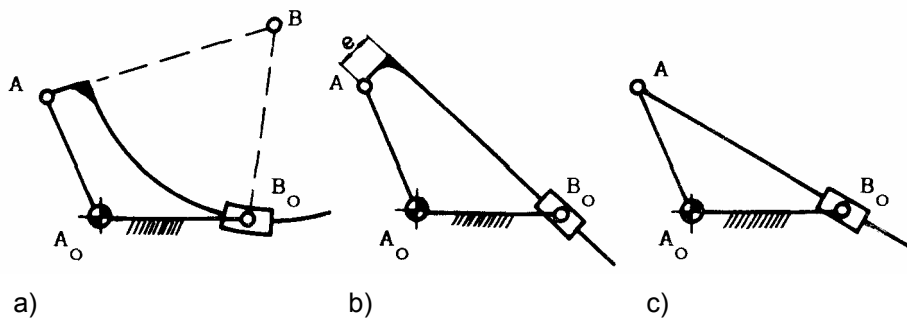


Sl.2.5.

Ako rastojanje  $\overline{B_0B} \rightarrow \infty$ , kružna putanja tačke **B** postaje pravolinijska (slika 2.5b), a dobijeni mehanizam predstavlja **ekscentrični** klipni mehanizam, gde je ekscentricnost (**e**) rastojanje tačke **A<sub>0</sub>** od pravca kretanja klizača. Za **e=0** (slika 2.5c) dobija se **centričan** klipni mehanizam.

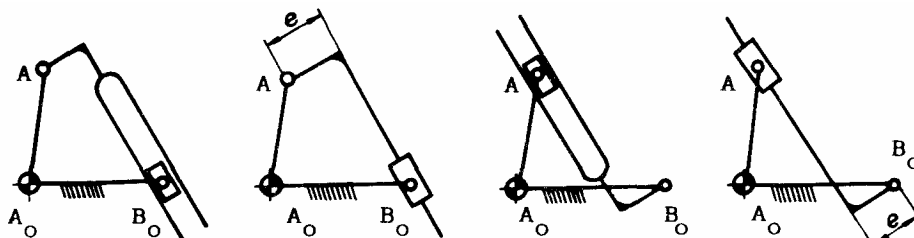
### Kulisni mehanizam

Kružno vođenje tačke **B** može se realizovati i ako je deo spojke kružnog oblika (poluprečnika  $\overline{BB_0}$ ), koji prolazi kroz kulisni kamen vezan za tačku **B<sub>0</sub>** (slika 2.6a). Tačka **B**, vezana za kulisni kamen, uvek je centar kružnice, dakle, kreće se po prvobitnoj kružnoj putanji.



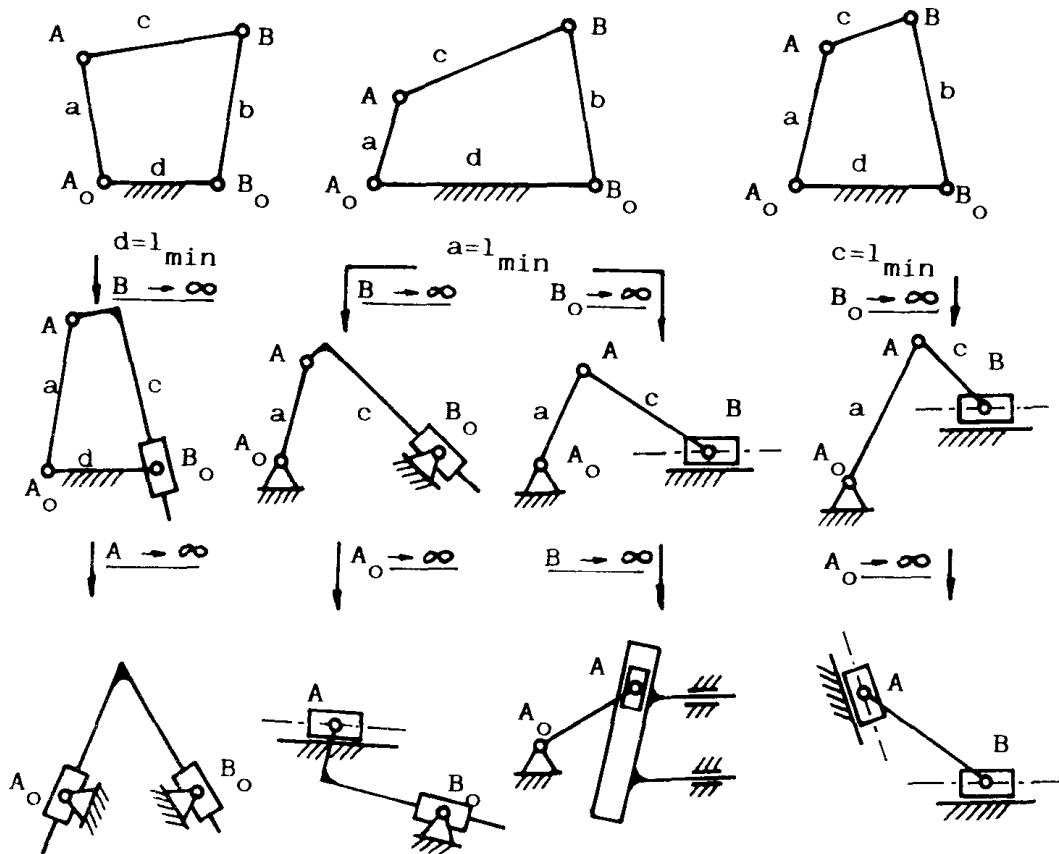
Sl.2.6.

Ako rastojanje  $\overline{BB_0} \rightarrow \infty$ , kružnica postaje prava (slika 2.6b), a dobijeni mehanizam je **ekscentrični** kulisni mehanizam, gde je ekscentricitet (**e**) rastojanje tačke **A** od pravca kulise. Za **e=0** (slika 2.6c) dobija se **centričan** kulisni mehanizam. Mogući oblici kulisnog mehanizma prikazani su na slici 2.7.



Sl.2.7.

Na sličan način može se od osnovnih tipova polužnog četvorougla dobiti veći broj modifikovanih polužnih četvorouglova (slika 2.8).



Sl.2.8.

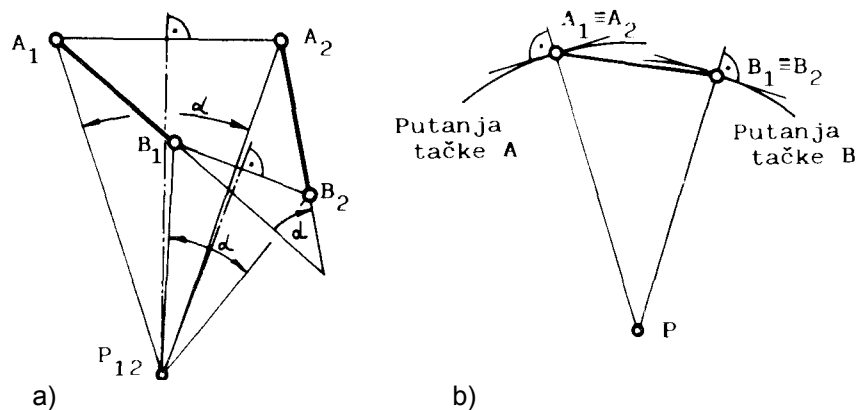
## 2.2. Trenutni pol. Inverzno kretanje

Promena položaja jednog tela u odnosu na drugo telo naziva se **kretanje**. Kretanje pokretnog tela u odnosu na nepokretno naziva se **apsolutno**, a u odnosu na takođe pokretno telo **relativno** kretanje.

Položaj tela pri ravanskom kretanju definisan je položajem dveju tačaka, pa se problem ravanskog kretanja krutog tela svodi na proučavanje ravanskog kretanja štapa.

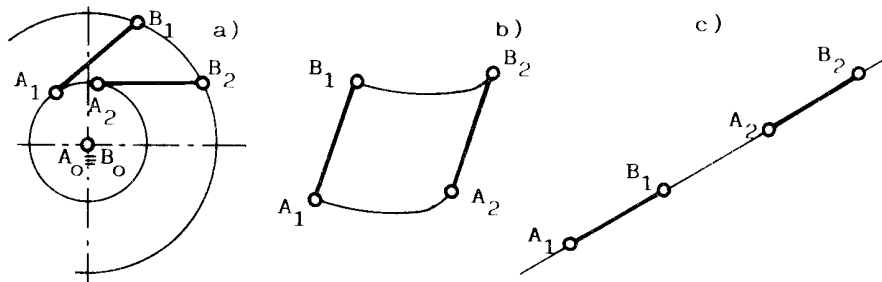
Štap  $\overline{AB}$  može se iz jednog proizvoljnog položaja  $\overline{A_1B_1}$  prevesti u drugi položaj  $\overline{A_2B_2}$  obrtanjem oko tačke preseka simetrala duži  $\overline{A_1A_2}$  i  $\overline{B_1B_2}$  za ugao  $\alpha$  koji grade pravci ova dva položaja štapa (**slika 2.9a**).

Ako umesto konačnih rastojanja  $\overline{A_1A_2}$  i  $\overline{B_1B_2}$  posmatramo beskonačno bliske položaje, tj. ako se tačke  $A_1$  i  $A_2$  odnosno  $B_1$  i  $B_2$  poklapaju (**slika 2.9b**), onda se simetrale duži  $\overline{A_1A_2}$  i  $\overline{B_1B_2}$  poklapaju s normalama putanja tačaka  $A$  i  $B$ , a presečna tačka normala s trenutnim polom  $P$ . Ovakvo opšte-ravansko kretanje može se stoga predstaviti obrtanjem štapa oko trenutnog pola  $P$ .



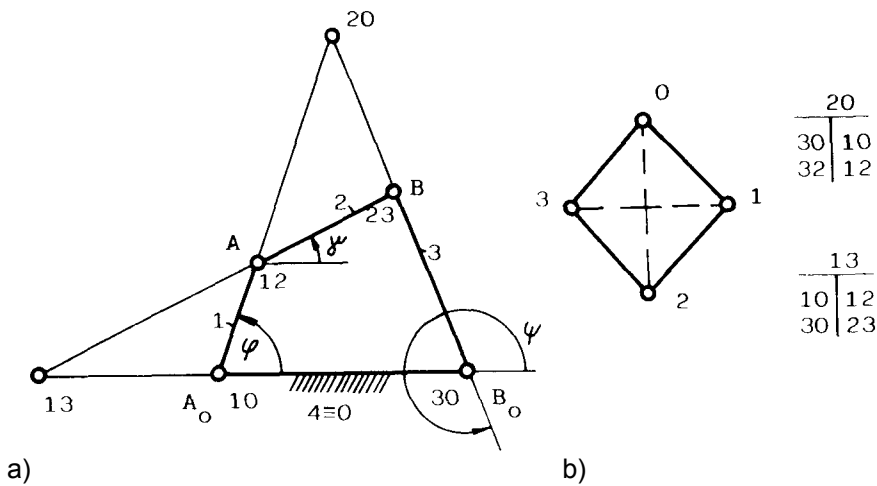
Sl.2.9.

Ako je trenutni pol nepokretna tačka, štap vrši rotaciono kretanje, a putanje tačaka su kružni lukovi (**slika 2.10.a**). Ukoliko je trenutni pol u beskonačnosti, štap se kreće translatorsno; pri translatorsnom kretanju štap  $\overline{AB}$  ostaje sve vreme kretanja paralelan samom sebi (**slika 2.10.b**). Specijalan slučaj translatorsnog kretanja štapa duž sopstvenog pravca naziva se klizanje (**slika 2.10.c**).



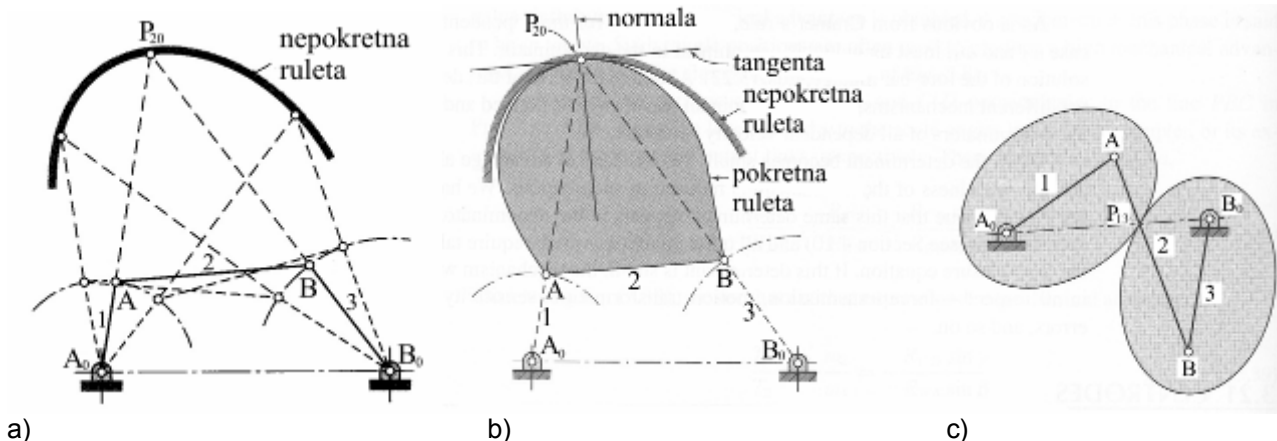
SI.2.10.

Zglobovi su, po definiciji, trenutni polovi relativnog kretanja susednih članova, koji nose oznake članova na koje se odnose (**slika 2.11a**), pri čemu redosled indeksa nije od značaja (npr.  $P_{12} \equiv P_{21}$ ). Prema **Kennedy-jevoj teoremi**, tri pola apsolutnog i relativnog kretanja dvaju članova (dva apsolutna i njihov relativni pol) leže na istom pravcu pa se stoga apsolutni trenutni pol **20** člana 2 (spojka) u odnosu na član 4 tj. 0 (postolja) nalazi u preseku pravaca koji prolaze kroz polove **32-30** i **12-10**. Relativni pol **31** članova **1** i **3** nalazi se u preseku pravaca **10-30** i **12-23**. Shema, po kojoj se određuju položaji polova, predstavljena je grafom (**slika 2.11b**), u kome su članovi mehanizma predstavljeni tačkama, a polovi dužima između ovih tačaka.



SI.2.11.

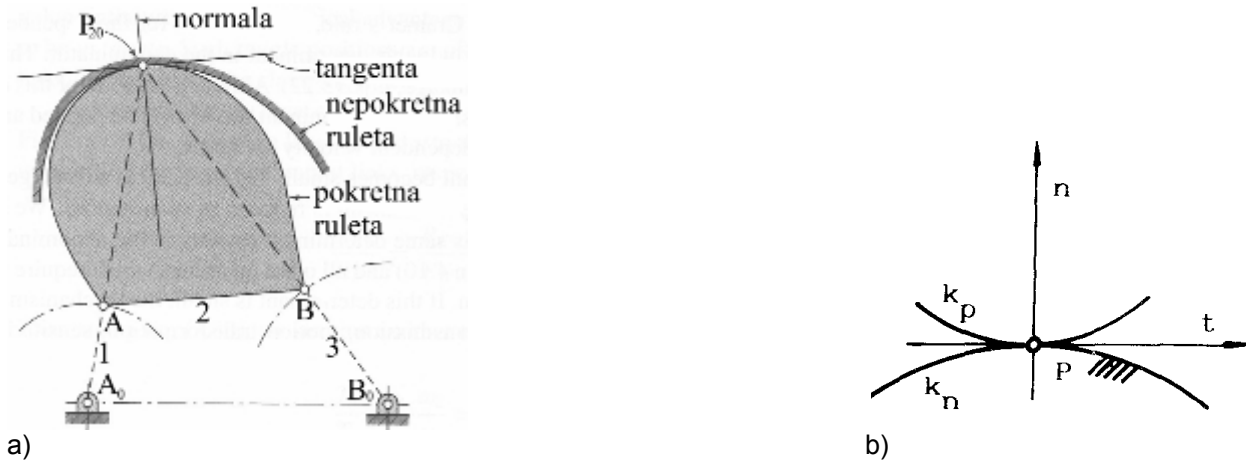
Pri opšte-ravanskom kretanju spojke, sa promenom položaja tačaka **A** i **B** i trenutni pol **P** menja svoj položaj (**slika 2.12a**). Geometrijsko mesto promene položaja pola u nepokretnoj ravni naziva se **nepokretna ruleta** ( $k_n$ ), a u pokretnoj ravni **pokretna ruleta** ( $k_p$ ) (**slika 2.12b**). Za slučaj relativnog kretanja, obe rulete su pokretne, a tačka njihovog dodira je relativni trenutni pol (**slika 2.12c**).



SI.2.12.

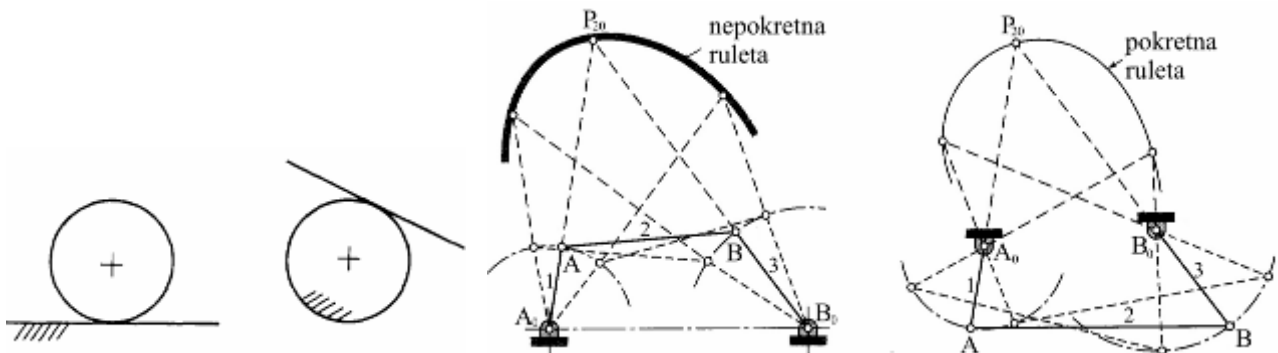


Za analizu geometrije i kinematike kretanja koristi se koordinatni sistem čiji je koordinatni početak u trenutnom polu  $P$ , sa tangentom na rulete ( $t$ ) kao apscisom, i njihovom normalom ( $n$ ) kao ordinatom (**slika 2.13**).

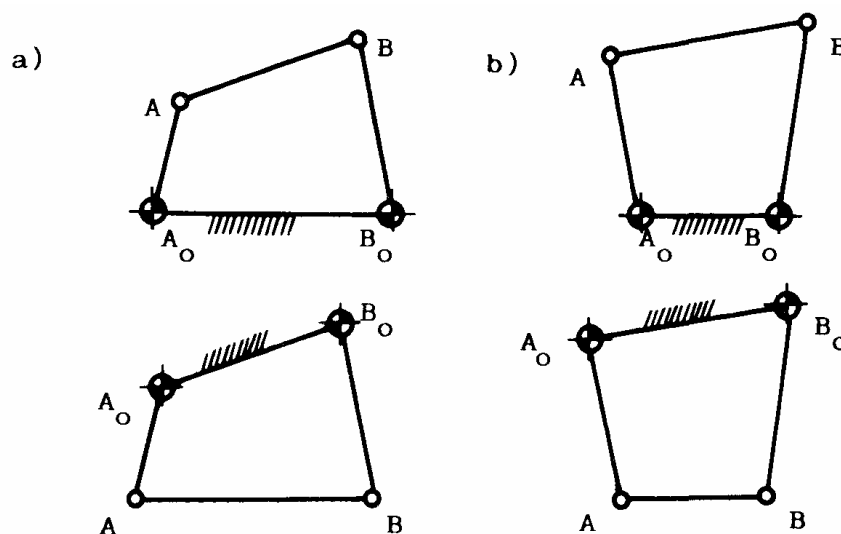


Sl.2.13.

U slučaju da rulete zamene uloge, tj. da nepokretna ruleta postane pokretna i obrnuto, takvo kretanje nazivamo **inverznim**, a mehanizam kojim se ostvaruje takvo kretanje - **kinematski suprotnim** mehanizmom. Npr. za krug koji se kotrlja po nepokretnoj pravoj, inverzno kretanje izvodi prava koja se kotrlja po nepokretnom krugu (**slika 2.14**).

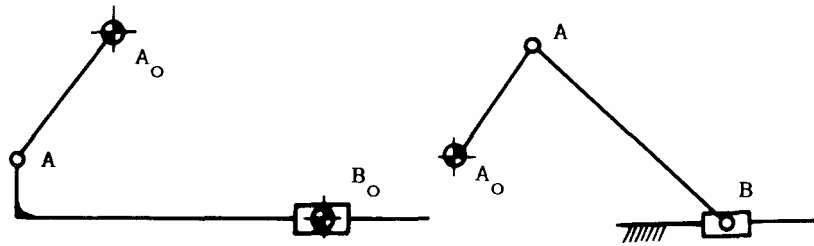


Kinematski suprotan polužnom četvorouglu je mehanizam kod koga postolje i spojka menjaju uloge (**slika 2.15**) pa je stoga kinematski suprotan jednokrivajnom mehanizmu takođe jednokrivajni mehanizam (**slika 2.16.a**), a kinematski suprotan dvokrivajnom mehanizmu – dvobalansirni mehanizam (**slika 2.16.b**).



Sl.2.16.

Kulisni mehanizam je kinematski suprotan klipnom mehanizmu (slika 2.17).



Sl.2.17.

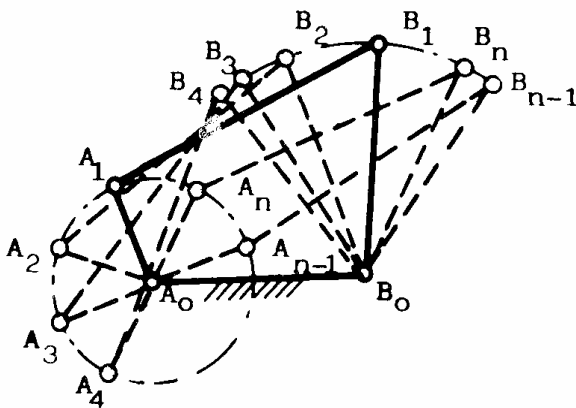
### 2.3. Grafičke metode pozicione i analize stanja brzina i ubrzanja

Za poziciju i analizu stanja brzina i ubrzanja koriste se grafičke, analitičke i numeričke metode. Grafičke i analitičke metode razvijene su pre svega za analizu jednostavnijih mehanizama (četvoročlanih), ali je njihova primena moguća i kod složenijih mehanizama. Numeričke metode su razvijene prvenstveno radi primene kod složenih polužnih mehanizama.

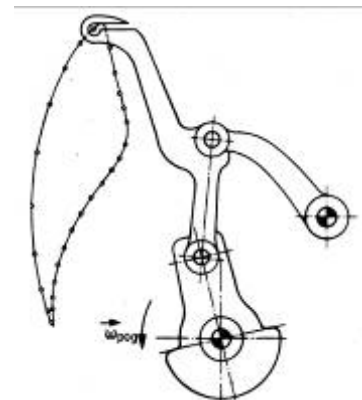
#### 2.3.1. Poziciona analiza. Položaj pokretne tačke

Najjednostavniji postupak **pozicione analize** je grafički postupak; realizuje se crtanjem kinematske sheme za niz uzastopnih položaja mehanizma (slika 2.18).

Geometrijsko mesto tačaka kroz koje prolazi pokretna tačka naziva se putanja ili trajektorija (slika 2.19). Kretanje tačke definiše se oblikom putanje i zakonom puta. Položaj tačke u datom trenutku određen je njenim koordinatama  $A[q_i(t)]$ .



Sl.2.18.



Sl.2.19.

#### 2.3.2. Dva beskonačno bliska položaja pokretne tačke

Iz prirode kretanja proizilazi da u dva beskonačno bliska trenutka, pokretna tačka zauzima dva beskonačno bliska položaja na putanji. Brzina tačke predstavlja prvi izvod vektora položaja tačke po vremenu:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (2.2)$$

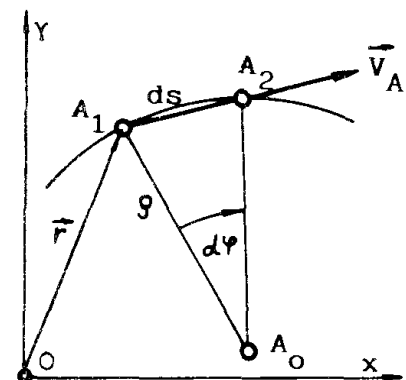
a vektor brzine je određen:

- intezitetom  $v = ds/dt$ ,
- pravcem (u pravcu tangente na putanju) i
- smerom (u smeru kretanja tačke).

Tačke  $A_1$  i  $A_2$  (slika 2.20) su dva susedna bliska položaja tačke  $A$ . Brzina, dakle, definiše dva beskonačno bliska položaja pokretne tačke. Intezitet brzine kod rotacionog kretanja može biti izražen i kao proizvod rastojanja  $\rho = A_0A$  i ugaone brzine  $\omega$ :

$$v = \rho \cdot \omega, \quad (2.3)$$

jer je:  $ds = \rho \cdot d\varphi$  i  $\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ .

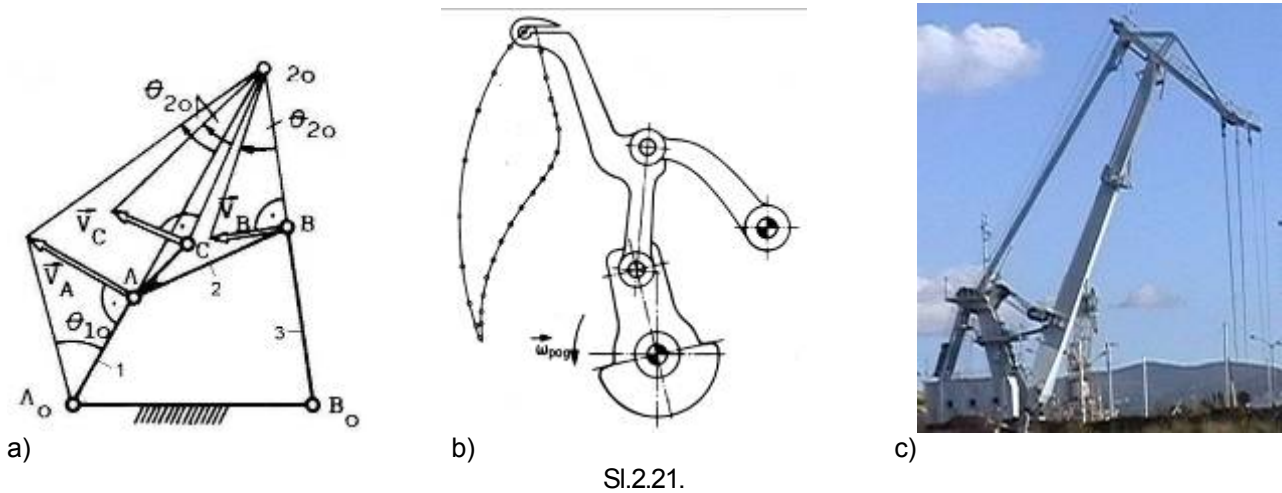


Sl.2.20.

### 2.3.3. Grafičke metode određivanja brzina

Ukoliko je poznata brzina zglobne tačke **A** opšte-pokretnog člana (spojke) polužnog četvorougla  $A_0ABB_0$  (slika 2.21a), za određivanje brzine zglobne tačke **B** ili bilo koje druge tačke spojke (**C**) može se koristiti nekoliko metoda:

#### a) metod trenutnog pola



Sl.2.21.

Za određivanje brzine tačke **A**, kao tačke krivajne (1) koja realizuje obrtno kretanje, može se koristiti izraz (2.3):  $v_A = \overline{A_0A} \cdot \omega_{10}$ . Tačka **A**, međutim, pripada i spojki (2) sa kojom se obrće oko trenutnog pola **20** pa se njena brzina može izraziti i preko ugaone brzine spojke ( $\omega_{20}$ ):

$$v_A = \overline{PA} \cdot \omega_{20} \quad (2.4)$$

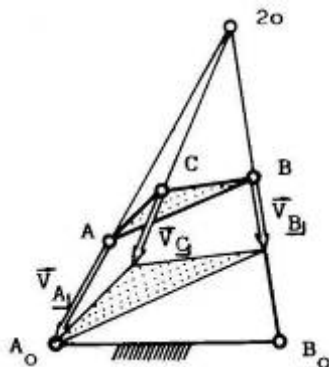
Pošto se najpre iz prethodne jednačine odredi ugaona brzina spojke ( $\omega_{20}$ ), mogu se odrediti i brzine svih ostalih tačaka spojke, npr. tačke koja vodi konac na mehanizmu za obrazovanje petlje pri šivenju šivaćom mašini (slika 2.21b) ili vodjene tačke mehanizma za promenu dohvata kod portalno-obrtnih lučkih dizalica (slika 2.21c):

$$v_B = \overline{PB} \cdot \omega_{20} \quad ; \quad v_C = \overline{PC} \cdot \omega_{20} \quad (2.5)$$

Iz prethodnih jednačina je moguće formirati odnos:

$$\omega_{20} = \frac{v_A}{\overline{PA}} = \frac{v_B}{\overline{PB}} = \frac{v_C}{\overline{PC}} = \operatorname{tg} \theta_{20} \quad (2.6)$$

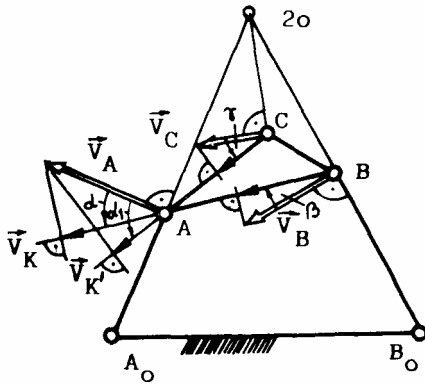
Vektori brzina svih tačaka spojke na pravcu koji prolazi kroz trenutni pol i pokretnu tačku završavaju se na pravcu koja spaja vrh brzine pokretne tačke i pol brzine i koja se često naziva  $\theta$ -linija, a po tome se i cela metoda često naziva i metodom  $\theta$ -linije (slika 2.21a).



Sl.2.22.

Isti metod, metod trenutnog pola, može se realizovati i pomoću zaokrenutih brzina zaokrenutih za  $90^\circ$  (slika 2.22). Pri tome vrhovi zaokrenutih brzina formiraju trougao (mnogougao) sličan trouglu koji formiraju pokretne tačke (šrafirani trouglovi).

## b) metod brzina klizanja



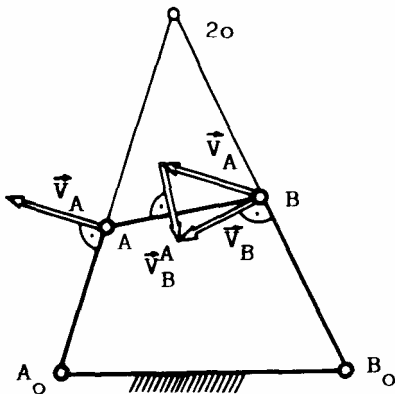
Sl.2.23.

Iz uslova da su projekcije brzina pokretnih tačaka, na pravce koje definišu te tačke, međusobno jednake (slika 2.23), sledi da je:

$$v_A \cdot \cos \alpha = v_B \cdot \cos \beta = v_K ; \quad v_A \cdot \cos \alpha_1 = v_C \cdot \cos \gamma = v_{K'} ,$$

pri čemu su  $v_K$  i  $v_{K'}$  brzine klizanja u pravcu  $\overline{AB}$ , odnosno  $\overline{AC}$ .

## c) Euler-ova metoda



Sl.2.24.

Pomeranje spojke iz jednog položaja u drugi može se realizovati translacijom spojke do novog položaja tačke **A**, a zatim rotacijom tačke **B** oko tačke **A**. Odatle sledi da se brzina tačke **B** (slika 2.24) može izraziti i kao zbir brzine tačke **A** ( $\vec{v}_A$ ) i brzine tačke **B** oko tačke **A** ( $\vec{v}_B^A$ ):

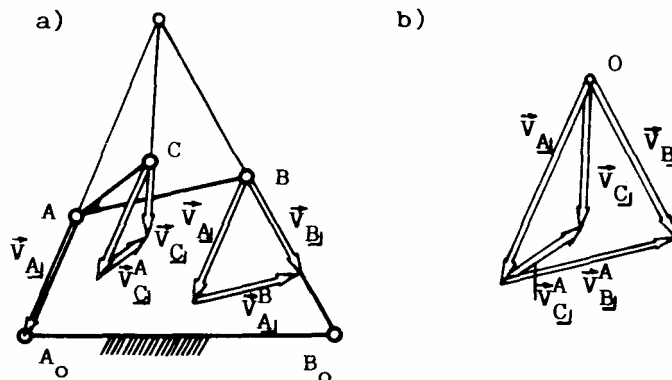
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A. \quad (2.8)$$

Brzina tačke **B** je upravna na štap  $\overline{BB_0}$ , a brzina  $\vec{v}_B^A$  upravna na štap  $\overline{AB}$ , pri čemu je:

$$v_B^A = \overline{AB} \cdot \omega_{20}. \quad (2.9)$$

Ova metoda se može primeniti i na zaokrenute brzine (slika 2.25):

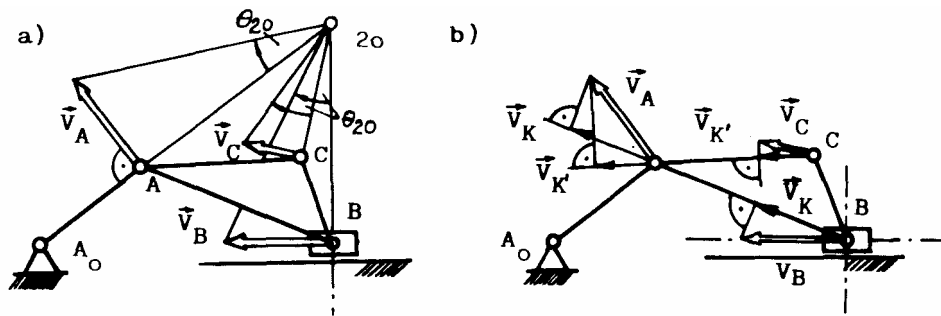
$$\vec{v}_{B_j} = \vec{v}_{A_j} + \vec{v}_{B_j}^A. \quad (2.10)$$



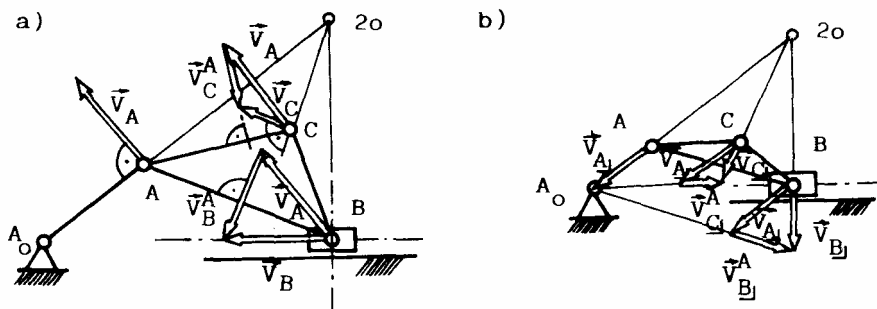
Sl.2.25.

Stanje brzina može biti prikazano i planom brzina, kao i planom zaokrenutih brzina (slika 2.25b). Polazeći od centra **O** i nanoseći najpre  $\vec{v}_{A_j}$ , a zatim i pravac za  $\vec{v}_{B_j}$  kroz **O** odn. pravac za  $\vec{v}_{B_j}^A$  kroz vrh  $\vec{v}_{A_j}$ , dobijaju se intenziteti brzina  $v_B$  i  $v_B^A$ , a analognim postupkom i intenziteti brzina  $v_C$  i  $v_C^A$ .

Sve navedene metode mogu se primeniti i na klipni mehanizam, pri čemu se pravac vektora brzine tačke **B** poklapa s pravcem kretanja klizača (slika 2.26a,b i slika 2.27a,b).

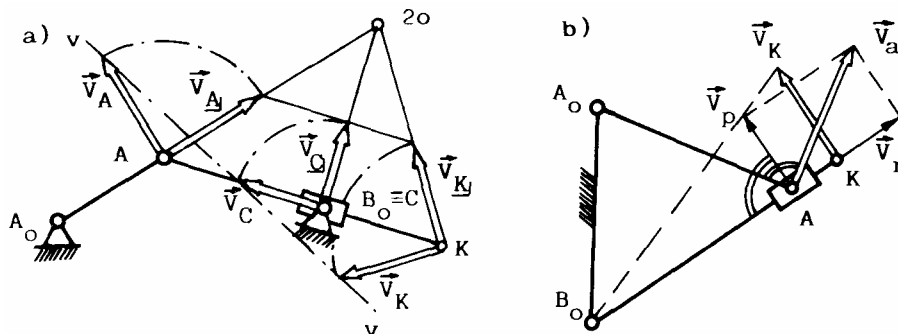


SI.2.26.



SI.2.27.

Kada se kulisni kamen okreće oko tačke **B<sub>0</sub>**, kulisa vrši opšte-ravansko kretanje, pa se sve navedene metode mogu primeniti i na kulisni mehanizam (slika 2.28a).



SI.2.28.

Ukoliko se kulisni kamen okreće oko tačke **A**, izvedeći složeno kretanje, mora se najpre odrediti prenosna brzina  $\vec{v}_p = \vec{v}_a - \vec{v}_r$  (slika 2.28b), a zatim, na osnovu nje i  $\theta$ -linije, i brzina bilo koje druge tačke na kulisi (**K**), koja se okreće oko **B<sub>0</sub>**.

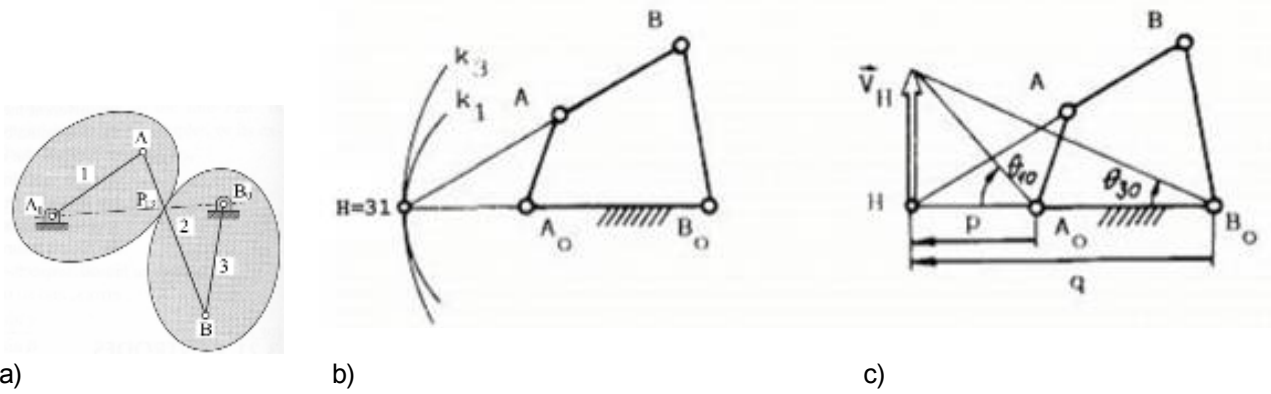
### 2.3.4. Prenosna funkcija prvoga reda

Prenosna funkcija prvoga reda može se grafički odrediti kao odnos rastojanja pola **31** (H) od pola **10** (**A<sub>0</sub>**), odnosno, od pola **30** (**B<sub>0</sub>**), prikazanih na slici 2.29c. Kako se relativno kretanje članova **1** i **3** može predstaviti kotrljanjem ruleta **k<sub>1</sub>** i **k<sub>3</sub>**, kruto vezanih za članove **1** i **3** (slika 2.29a,b), relativni pol **H≡31** kao njihova zajednička dodirna tačka ima brzinu (slika 2.29a):

$$v_H = p \cdot \omega_{10} = q \cdot \omega_{30} \quad (2.11)$$

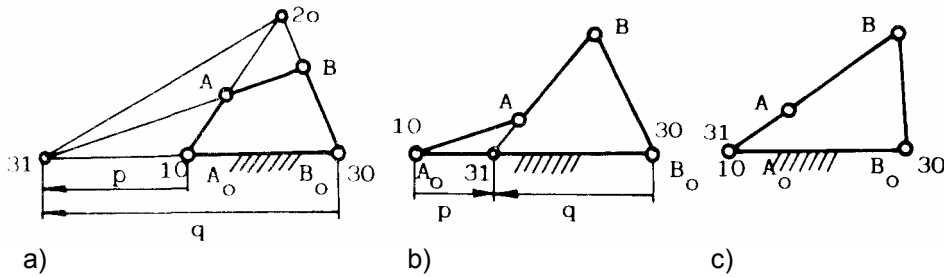
odakle sledi:

$$\psi' = \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \frac{p}{q} = \frac{p}{d+p} \quad (2.12)$$



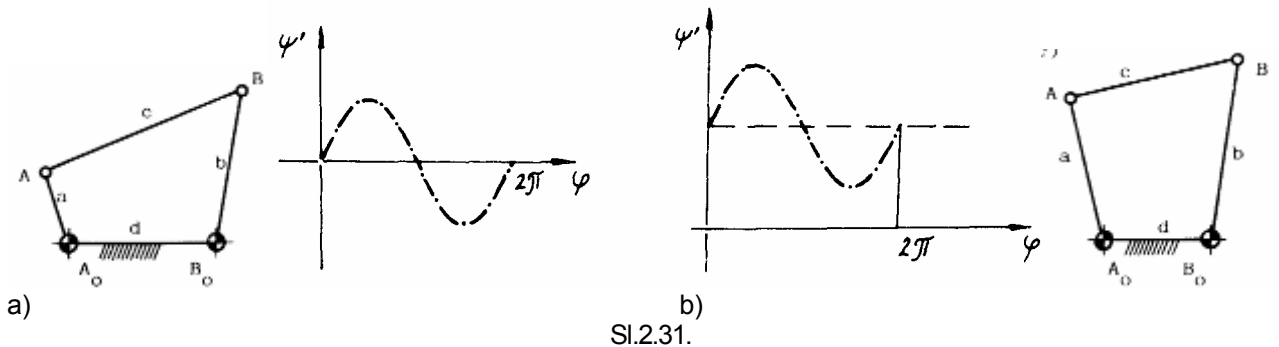
SI.2.29.

Na osnovu orijentacije duži  $p$  i  $q$  može se odrediti i predznak prenosne funkcije prvoga reda. Ako su  $p$  i  $q$  istoga predznaka (pol 31 leži van duži 10-30), funkcija  $\psi'$  je pozitivna (slika 2.30a), ako su  $p$  i  $q$  različitog znaka (pol 31 leži između polova 10 i 30), funkcija  $\psi'$  je negativna (slika 2.30b), a kada je  $p=0$  (pol 10 $\equiv$ 31), funkcija  $\psi'$  je jednaka nuli (slika 2.30c).



SI.2.30.

Prenosna funkcija prvoga reda jednokrivajnog mehanizma je promenljivog predznaka (slika 2.31a), dok je prenosna funkcija prvoga reda dvokrivajnog mehanizma uvek pozitivna (slika 2.31b).



SI.2.31.

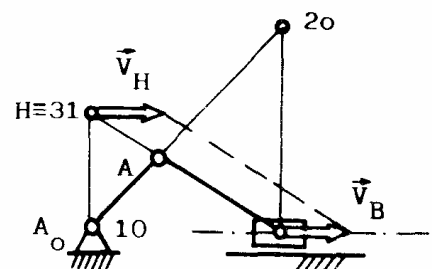
Prenosna funkcija prvoga reda klipnog mehanizma je:

$$s' = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{v_i}{\omega_u} = \frac{v_B}{\omega_{10}} \tag{2.13}$$

Kako je  $v_B = v_H = \overline{A_0H} \cdot \omega_{10}$  (slika 2.32), to sledi:

$$s' = \overline{A_0H} \cdot U_L \tag{2.14}$$

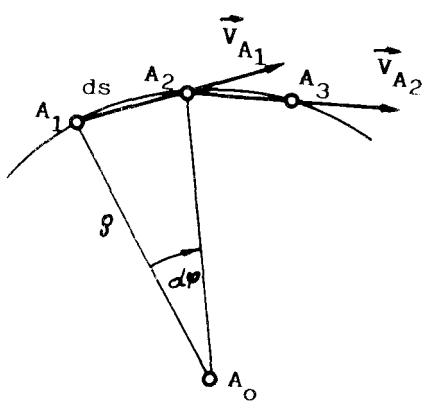
gde je  $U_L$  - razmera u kojoj je nacrtan mehanizam. Prenosna funkcija u ovom slučaju nije bezdimenziona veličina, jer definiše odnos parametara pravolinijskog i kružnog kretanja.



SI.2.32.

### 2.3.5. Tri beskonačno bliska položaja pokretne tačke

Tri beskonačno bliska položaja pokretne tačke (slika 2.33) definisana su drugim izvodom vektora položaja tačke po vremenu odn. ubrzanjem:



Sl.2.33.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (2.15)$$

Kako je vektor brzine  $\vec{v} = v \cdot \vec{T}$ , gde je  $\vec{T}$  ort tangente, ubrzanje će biti:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + v \cdot \frac{d\vec{T}}{dt}. \quad (2.16)$$

Imajući u vidu da je:

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \vec{K} = v \cdot K \cdot \vec{N} = \frac{v}{\rho} \cdot \vec{N}, \quad (2.17)$$

gde je  $K \cdot \vec{N}$  - vektor krivine krive linije ( $\vec{K}$ ),  $\vec{N}$  - ort glavne normale, a  $\rho$  - poluprečnik krivine, dobija se konačno:

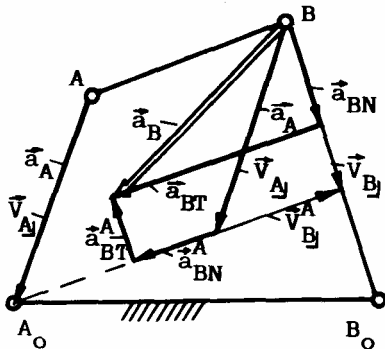
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{N}. \quad (2.18)$$

Iz jednačine (2.18) vidi se da ubrzanje ima dve, međusobno normalne komponente:  $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$  (2.19)

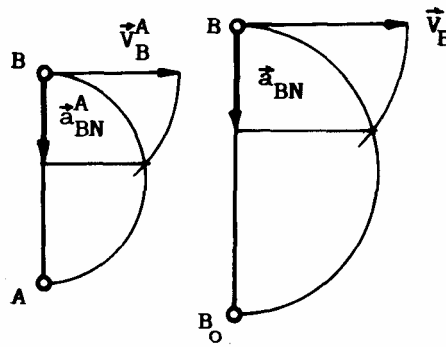
- tangencijalnu  $\vec{a}_T$  u pravcu tangente  $\vec{T}$  i
- normalnu  $\vec{a}_N$ , usmerenu ka središtu krivine putanje.

### 2.3.6. Grafičke metode određivanja ubrzanja

Ako je poznato stanje brzina (odjeljak 2.3.3.) i ubrzanje zglobne tačke **A**, može se odrediti i ubrzanje zglobne tačke **B** ili proizvoljne tačke **C** u ravni spojke polužnog četvorougla  $A_0ABB_0$  (slika 2.34).



Sl.2.34.



Sl.2.35.

Tačka **B** se kreće po kružnoj putanji te stoga ima normalnu i tangencijalnu komponentu ubrzanja (2.19):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{BN} + \vec{a}_{BT}. \quad (2.20)$$

Normalna komponenta ubrzanja tačke **B** je usmerena od **B** ka **B<sub>0</sub>** i ima intenzitet:

$$a_{BN} = \overline{BB_0} \cdot \omega_{30}^2 = \frac{v_B^2}{B_0B} \quad (2.21)$$

dok je tangencijalna komponenta intenziteta:

$$a_{BT} = \overline{BB_0} \cdot \dot{\omega}_{30} \quad (2.22)$$

i upravna je na pravac  $\overline{BB_0}$ .

S druge strane, ubrzanje tačke **B** se, **Euler-ovom metodom**, može izraziti zbirom:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_B^A = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A. \quad (2.23)$$

Normalna komponenta ubrzanja tačke **B** oko **A**, intenziteta:

$$a_{BN}^A = \overline{AB} \cdot \omega_{20}^2 = \frac{(v_B^A)^2}{AB}, \quad (2.24)$$

usmerena je od **B** ka **A**.

Kako je stanje brzina poznato, normalne komponente ubrzanja se mogu izračunati izrazima (2.21) i (2.24), ili odrediti grafičkim postupkom, korišćenjem *Tales-ove* teoreme (**slika 2.35**).

Rešenje jednačina (2.20) i (2.23) dobija se u preseku pravaca tangencijalnih komponenti ubrzanja (**slika 2.34**).

Ubrzanje proizvoljne tačke **C** u ravni spojke može se odrediti na više načina. Ako je poznato ubrzanje tačaka **A** i **B**, ubrzanje  $\vec{a}_C$  se dobija primenom prethodnog postupka, iz jednačina:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CN}^A + \vec{a}_{CT}^A \quad (2.25)$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CN}^B + \vec{a}_{CT}^B.$$

Ako ubrzanje tačke **B** nije poznato, onda se najpre mora odrediti ubrzanje tačke **B**. Umesto tačke **B** moglo bi se odrediti i ubrzanje tačke **Q** koja se poklapa sa trenutnim polom (**slika 2.50**), a zatim, kao druga jednačina za određivanje ubrzanja tačke **C** koristiti:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_Q + \vec{a}_{CN}^Q + \vec{a}_{CT}^Q. \quad (2.26)$$

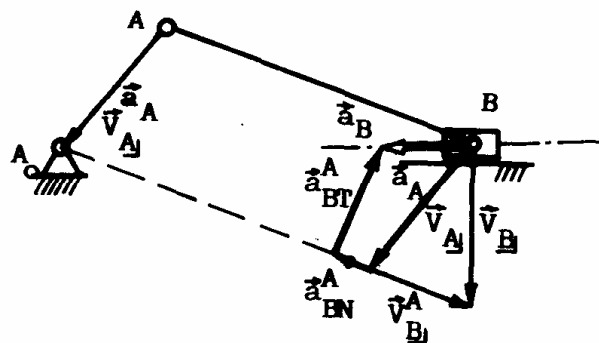
Ako je poznat položaj trenutnog pola ubrzanja  $\vec{P}_a$  ( $\vec{a}_{Pa} = 0$ ), onda se, zbog (2.81), za određivanje ubrzanja  $\vec{a}_C$  kao druga jednačina može koristiti:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{CN}^P + \vec{a}_{CT}^P. \quad (2.27)$$

Ako je poznat položaj trenutnog centra krivine  $\vec{C}_0$  putanje tačke **C** (**slika 2.62**), onda se za određivanje ubrzanja  $\vec{a}_C$  kao druga jednačina može koristiti:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{CN} + \vec{a}_{CT}. \quad (2.28)$$

Ubrzanje tačke **B** klipnog mehanizma ima samo tangencijalnu komponentu, u pravcu kretanja tačke **B** ( $\vec{a}_{BN} = 0$ ), što donekle pojednostavljuje postupak određivanja ubrzanja  $\vec{a}_B$  (**slika 2.36**).



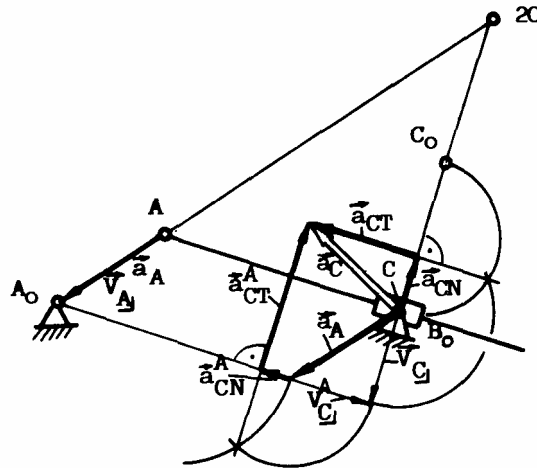
Sl.2.36.



Kod kulisnog mehanizma sa opšte-ravanskim kretanjem kulise (**slika 2.37**) ubrzanje tačke **C**, koja pripada kulisi, a poklapa se sa tačkom **B<sub>0</sub>**, može se odrediti na osnovu jednačina:

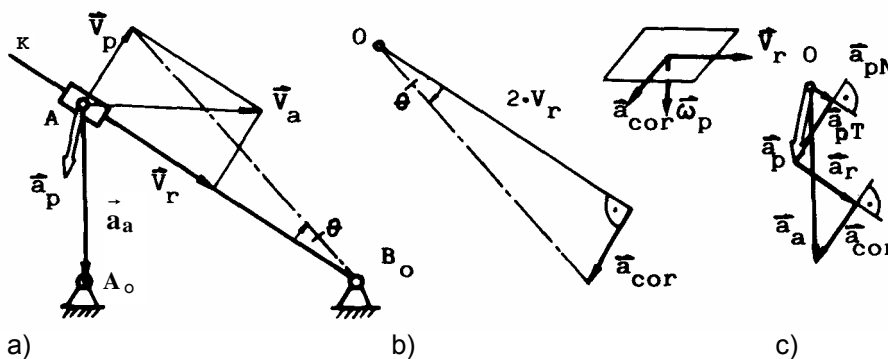
$$\begin{aligned}\bar{a}_C &= \bar{a}_A + \bar{a}_{CN}^A + \bar{a}_{CT}^A \\ \bar{a}_C &= \bar{a}_{CN} + \bar{a}_{CT}.\end{aligned}\quad (2.29)$$

Kako tačka **C** leži na povratnom krugu (**slika 2.57**), centar krivine putanje tačke **C**, tačka **C<sub>0</sub>**, leži na polovini rastojanja  $\overline{PC}$ .



SI.2.37.

Kod kulisnog mehanizma sa rotacijom kulise  $\overline{B_0K}$  (**slika 2.38a**), apsolutno ubrzanje kulisnog kamena ima normalnu i tangencijalnu komponentu, koje se mogu odrediti vektorski i uneti u plan ubrzanja (**slika 2.38c**).



SI.2.38.

Prema *Coriolis*-ovoj teoremi je:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{Ap} + \bar{a}_{Ar} + \bar{a}_{Acor} \quad (\bar{a}_{Ap} = \bar{a}_{ApN} + \bar{a}_{ApT}), \quad (2.30)$$

a **koriolisovo ubrzanje** se može odrediti analitički, vektorskim proizvodom:

$$\bar{a}_{Acor} = 2 \cdot (\bar{\omega}_p \times \bar{v}_{Ar}) \quad (2.31)$$

a kod ravnog kretanja i grafičkim postupkom (**slika 2.38b**) pošto je:  $\omega_p = \frac{v_p}{B_0A} = \text{tg } \theta$ , a  $a_{Acor} = 2 \cdot v_{Ar} \cdot \text{tg } \theta$ .

Pošto je vrednost  $v_{Ap}$  poznata (**slika 2.38a**), može se odrediti normalna komponenta ubrzanja  $\bar{a}_{ApN}$ :

$$a_{ApN} = \frac{v_p^2}{B_0A}, \quad (2.32)$$

kao i pravac tangencijalne komponente  $\bar{a}_{ApT}$  ( $\bar{a}_{Ap} = \bar{a}_{ApN} + \bar{a}_{ApT}$ ). Unošenjem  $\bar{a}_{Acor}$  u plan ubrzanja, tako da zatvori poligon (**slika 2.38c**), uz poznate pravce za  $\bar{a}_{ApT}$ , kao i  $\bar{a}_{Ar}$  (paralelno kulisi), dolazi se do ubrzanja  $\bar{a}_{Ap}$  tačke **A** kulise, a na osnovu njega i do ubrzanja bilo koje druge tačke na kulisi (**K**).

**Razmere.** Fizičke veličine se predstavljaju na crtežu dužima, u razmeri:

- za dužinu  $U_L = \frac{cm}{cm_c}$
- za brzinu  $U_v = \frac{cm/s}{cm_c}$  (2.33)
- za ubrzanje  $U_a = \frac{cm/s^2}{cm_c}$ ,

gde indeks  $c$  označava veličinu na crtežu.

Fizička veličina se dobija sa crteža kada se odgovarajuća dužina pomnoži razmerom:

$$l = l_c \cdot U_L; \quad v = v_c \cdot U_v; \quad a = a_c \cdot U_a. \quad (2.34)$$

Za konstrukciju normalne komponente ubrzanja važi:

$$a_{N_c} = \frac{(v_c)^2}{r_c} = \frac{(U_v)^2}{\frac{l}{U_L}} = \frac{v^2}{l} \cdot \frac{U_L}{(U_v)^2} = a_N \cdot \frac{U_L}{(U_v)^2}, \quad (2.35)$$

odakle sledi da je:

$$U_a = \frac{(U_v)^2}{U_L}. \quad (2.36)$$

Ovaj uslov će biti ispunjen samo ako se brzina i normalna komponenta ubrzanja tačke **A** predstave na crtežu dužinom krivaje mehanizma.

## 2.4. Analitičke metode pozicione i analize stanja brzina i ubrzanja

### 2.4.1. Poziciona analiza

Položaj članova mehanizma zavisi od položaja pogonskih članova i strukture mehanizama, a definiše se jednačinom:

$$f_i(\theta_j) = 0 \quad (2.37)$$

koja proističe iz uslova zatvorenosti kinematskog lanca i u kojoj  $\theta_j$  predstavlja sve koordinate kojima se definišu položaji članova mehanizma. Generalisane koordinate  $\theta_j$  obuhvataju dakle:

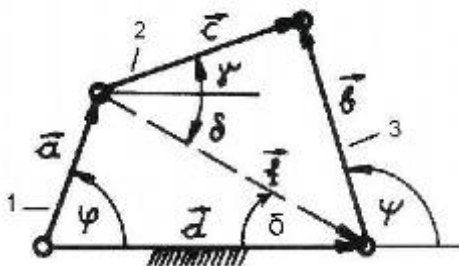
- nezavisno promenljive (pogonske) veličine  $q_k$ , čiji je broj jednak broju stepeni slobode kretanja  $i$
- od njih zavisne veličine  $\phi_l$ , kojima se definiše položaj ostalih članova mehanizma.

**Analitički postupak** se primenjuje u slučajevima kada se može postaviti eksplicitna zavisnost između koordinata vodjenih i pogonskih članova mehanizma:

$$\phi_i(q_k) = 0. \quad (2.38)$$

Položaj poluznog četvorougla određen je pogonskim uglom  $\varphi$  (**slika 2.39**). Prenosnom funkcijom nultoga reda  $\psi(\varphi)$  definiše se položaj člana 3, a funkcijom  $\gamma(\varphi)$  položaj člana 2.

Najčešće primenjivana analitička metoda položajne analize poluznog četvorougla je **vektorska** metoda. Članovi mehanizma na **slici 2.39**. predstavljene su vektorima konstantnog intenziteta ( $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  i  $\vec{d}$ ), dok intenzitet vektora  $\vec{f}$  zavisi od položaja mehanizma. Položaj vektora  $\vec{f}$  definisan je prenosnom funkcijom  $\delta(\varphi)$ , koja istovremeno predstavlja i prenosnu funkciju ekvivalentnog kulisnog mehanizma (**slika 2.6c**). Vektorska metoda kinematske analize poluznih mehanizama biće opisan u **kompleksnoj** notaciji, mada se za analizu mogu koristiti i **dekartova** i **matrična** notacija.



Sl.2.39.

Sa **slike 2.39** sledi:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{f}, \quad (2.39)$$

odnosno:

$$\vec{d} = a \cdot e^{i\varphi} + f \cdot e^{i\delta}, \quad (2.40)$$

odakle se, razvijanjem u obliku:

$$\vec{d} = a \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) + f \cdot (\cos \delta + i \cdot \sin \delta) \quad (2.41)$$

i rastavljanjem na imaginarni i realni deo, dobija sistem jednačina:

$$d = a \cdot \cos \varphi + f \cdot \cos \delta \quad (2.42)$$

$$0 = a \cdot \sin \varphi + f \cdot \sin \delta$$

iz kojeg sledi:

$$\cos \delta = \frac{d - a \cdot \cos \varphi}{f}; \quad \sin \delta = -\frac{a \cdot \sin \varphi}{f} \quad (2.43)$$

odnosno:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{a \cdot \sin \varphi}{a \cdot \cos \varphi - d}. \quad (2.44)$$

Korišćenjem kosinusne teoreme (trougao  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{f}$ ) dobija se prenosna funkcija  $\gamma(\varphi)$ , iz jednačine:

$$\cos(\gamma - \delta) = \frac{f^2 + c^2 - b^2}{2c \cdot f}, \quad (2.45)$$

gde je  $f = \sqrt{d^2 + a^2 - 2a \cdot d \cdot \cos \varphi}$ ,

dok se prenosna funkcija  $\psi(\varphi)$  dobija razvijanjem jednačine:

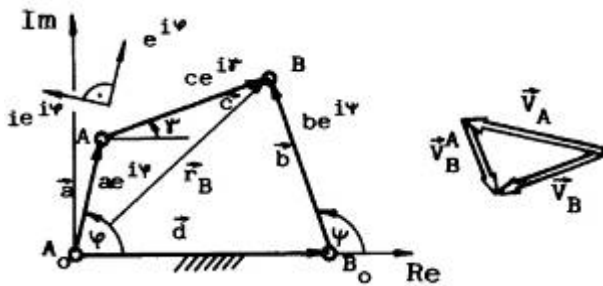
$$c \cdot e^{i\gamma} = f \cdot e^{i\delta} + b \cdot e^{i\psi} \quad (2.46)$$

na realni i imaginarni deo, u obliku:

$$\sin \psi = \frac{c \cdot \sin \gamma - f \cdot \sin \delta}{b}. \quad (2.47)$$

### 2.4.2. Analitička metoda određivanja brzina i ubrzanja

Diferenciranjem vektora položaja tačke **B** (slika 2.40):



Sl.2.40.

$$\vec{r}_B = \vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b} \quad (2.48)$$

po vremenu, dobija se:

$$\dot{\vec{r}}_B = \vec{a} \cdot \dot{\varphi} \cdot i \cdot e^{i\varphi} + \vec{c} \cdot \dot{\gamma} \cdot i \cdot e^{i\gamma} = \vec{b} \cdot \dot{\psi} \cdot i \cdot e^{i\psi}, \quad (2.49)$$

$$\text{gde je: } v_A = a \cdot \omega_{10} = a \cdot \dot{\varphi}$$

$$v_B^A = c \cdot \omega_{20} = c \cdot \dot{\gamma}$$

$$v_B = b \cdot \omega_{30} = b \cdot \dot{\psi}.$$

Jednačina (2.49) predstavlja analitičku interpretaciju grafičke *Euler-ove* metode ( $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A$ ); proizvod imaginarne jedinice  $i$  i kompleksnog broja  $z$ :  $i \cdot z = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot z \cdot e^{i\alpha} = z \cdot e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}$  vektorski se može interpretirati kao zakretanje vektora ekvivalentnog kompleksnom broju  $z$ , za ugao  $\pi/2$  u matematički pozitivnom smeru.

Upoređivanjem realnih i imaginarnih delova leve i desne strane jednačine (2.49), nakon sređivanja, dobija se sistem jednačina:

$$\dot{\gamma} \cdot (-c \cdot \sin \gamma) + \dot{\psi} \cdot (b \cdot \sin \psi) = a \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \quad (2.50)$$

$$\dot{\gamma} \cdot (c \cdot \cos \gamma) + \dot{\psi} \cdot (-b \cdot \cos \psi) = -a \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi$$

čija su rešenja:

$$\dot{\gamma} = \frac{\Delta \gamma}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi & b \cdot \sin \psi \\ -a \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi & -b \cdot \cos \psi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -c \cdot \sin \gamma & b \cdot \sin \psi \\ c \cdot \cos \gamma & -b \cdot \cos \psi \end{vmatrix}}, \quad (2.51)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\Delta \psi}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -c \cdot \sin \gamma & a \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \\ c \cdot \cos \gamma & -a \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -c \cdot \sin \gamma & b \cdot \sin \psi \\ c \cdot \cos \gamma & -b \cdot \cos \psi \end{vmatrix}}, \quad (2.52)$$

odnosno:

$$\omega_{20} = \dot{\gamma} = \frac{a}{c} \cdot \dot{\varphi} \cdot \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin(\gamma - \psi)} \quad (2.53)$$

$$\omega_{30} = \dot{\psi} = \frac{a}{b} \cdot \dot{\varphi} \cdot \frac{\sin(\gamma - \varphi)}{\sin(\gamma - \psi)}.$$

Brzina zglobne tačke **B** se sada može odrediti relacijom:

$$v_B = b \cdot \omega_{30}. \quad (2.54)$$

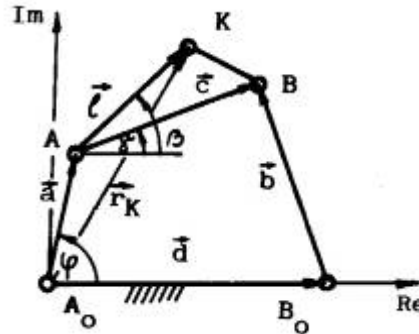
Brzina proizvoljne tačke **K** u ravni spojke (**slika 2.41**), čiji je položaj definisan vektorom položaja  $\vec{r}_K$ :

$$\vec{r}_K = \vec{a} + \vec{l} = a \cdot e^{i\varphi} + l \cdot e^{i\beta}, \quad (2.55)$$

određuje se, nakon diferenciranja prethodnog izraza ( $\dot{\beta} = \dot{\gamma}$ ), iz jednačine:

$$\vec{v}_K = \dot{\vec{r}}_K = a \cdot \dot{\varphi} \cdot i \cdot e^{i\varphi} + l \cdot \dot{\gamma} \cdot i \cdot e^{i\beta}, \quad (2.56)$$

što predstavlja analitičku interpretaciju izraza  $\vec{v}_K = \vec{v}_A + \vec{v}_K^A$ .



Sl.2.41.

Dvostrukim diferenciranjem vektora položaja tačke **B** ( $\vec{r}_B$ ) po vremenu, dobija se:

$$\ddot{\vec{r}}_B = \ddot{\vec{a}}_B = a \cdot \ddot{\varphi} \cdot i \cdot e^{i\varphi} - a \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot e^{i\varphi} + c \cdot \ddot{\gamma} \cdot i \cdot e^{i\gamma} - c \cdot \dot{\gamma}^2 \cdot e^{i\gamma} = b \cdot \ddot{\psi} \cdot i \cdot e^{i\psi} - b \cdot \dot{\psi}^2 \cdot e^{i\psi}, \quad (2.57)$$

što predstavlja analitičku interpretaciju izraza:

$$\ddot{\vec{a}}_B = \ddot{\vec{a}}_A + \ddot{\vec{a}}_B^A = \ddot{\vec{a}}_{AT} + \ddot{\vec{a}}_{AN} + \ddot{\vec{a}}_{BT}^A + \ddot{\vec{a}}_{BN}^A = \ddot{\vec{a}}_{BT} + \ddot{\vec{a}}_{BN}. \quad (2.58)$$

Upoređivanjem realnih i imaginarnih delova leve i desne strane jednačine (2.57), nakon sredjivanja, dobija se:

$$\ddot{\gamma} \cdot (-c \cdot \sin \gamma) + \ddot{\psi} \cdot (b \cdot \sin \psi) = a \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin \varphi + a \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi + c \cdot \dot{\gamma}^2 \cdot \cos \gamma - b \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \cos \psi = A \quad (2.59)$$

$$\ddot{\gamma} \cdot (c \cdot \cos \gamma) + \ddot{\psi} \cdot (-b \cdot \cos \psi) = a \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi + a \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi + c \cdot \dot{\gamma}^2 \cdot \sin \gamma - b \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin \psi = B.$$

Rešenja ovog sistema jednačina su ugaona ubrzanja članova **2** i **3**:

$$\ddot{\gamma} = \varepsilon_{20} = \dot{\omega}_{20} = \frac{1}{c} \cdot \frac{A \cdot \cos \psi + B \cdot \sin \psi}{\sin(\psi - \gamma)} \quad (2.60)$$

$$\ddot{\psi} = \varepsilon_{30} = \dot{\omega}_{30} = \frac{1}{b} \cdot \frac{A \cdot \cos \gamma + B \cdot \sin \gamma}{\sin(\psi - \gamma)}.$$

Ubrzanje proizvoljne tačke **K** u ravni spojke određuje se dvostrukim diferenciranjem jednačine (2.55):

$$\ddot{\vec{a}}_K = a \cdot (i \cdot \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) \cdot e^{i\varphi} + l \cdot (i \cdot \ddot{\gamma} - \dot{\gamma}^2) \cdot e^{i\beta}, \quad (2.61)$$

što predstavlja analitičku interpretaciju grafičke metode za određivanje ubrzanja.

Da bi se vektori, koji predstavljaju rešenje prethodne jednačine, mogli uneti u odgovarajućoj razmeri na kinematsku shemu mehanizma, potrebno je prethodno odrediti intenzitete vektora i uglove  $\chi_i$  koje oni zaklapaju sa pozitivnim smerom x-ose:

$$|a_i| = \sqrt{a_{Re}^2 + a_{Im}^2} \quad ; \quad \chi_i = \arctg \frac{a_{Re}}{a_{Im}} \quad (2.62)$$

pri čemu su  $a_{Re}$  i  $a_{Im}$  realni i imaginarni delovi ubrzanja odgovarajućih tačaka.

Kod klipnog mehanizma (**slika 2.42**) vektor položaja tačke **B** može se formulisati jednačinom:

$$\vec{r}_B = a \cdot e^{i\varphi} + c \cdot e^{i\gamma} = s + i \cdot b, \quad (2.63)$$

odakle se diferenciranjem po vremenu dobija izraz za brzinu tačke **B**:

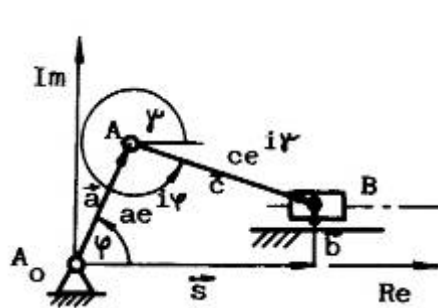
$$\dot{\vec{r}}_B = a \cdot \dot{\varphi} \cdot i \cdot e^{i\varphi} + c \cdot \dot{\gamma} \cdot i \cdot e^{i\gamma} = \dot{s} = \vec{v}_B, \quad (2.64)$$

Dvostrukim diferenciranjem vektora položaja tačke **B** po vremenu dobija se izraz za ubrzanje tačke **B**:

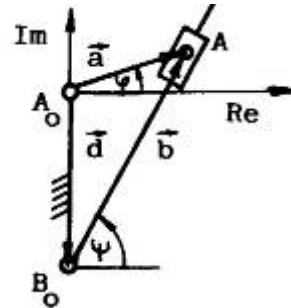
$$\ddot{\vec{r}}_B = a \cdot \ddot{\varphi} \cdot i \cdot e^{i\varphi} - a \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot e^{i\varphi} + c \cdot \ddot{\gamma} \cdot e^{i\gamma} - c \cdot \dot{\gamma}^2 \cdot e^{i\gamma} = \ddot{s} = \vec{a}_B, \quad (2.65)$$

što se svodi na poznati izraz, korišćen kod grafičkih metoda:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{AT} + \vec{a}_{AN} + \vec{a}_{BT}^A + \vec{a}_{BN}^A. \quad (2.66)$$



SI.2.42.



SI.2.43.

Na sličan način se kod kulisnog mehanizma (**slika 2.43**) mogu formulisati izrazi za vektor položaja i brzinu tačke **A**:

$$\vec{r}_A = a \cdot e^{i\varphi} = -i \cdot d + b \cdot e^{i\psi}, \quad (2.67)$$

$$\dot{\vec{r}}_A = a \cdot \dot{\varphi} \cdot i \cdot e^{i\varphi} = \dot{b} \cdot e^{i\psi} + b \cdot \dot{\psi} \cdot i \cdot e^{i\psi} \quad (2.68)$$

odnosno:

$$\vec{v}_{Aa} = \vec{v}_{Ar} + \vec{v}_{Ap}.$$

Dvostrukim diferenciranjem vektora položaja po vremenu dobija se:

$$\ddot{\vec{r}}_A = (\ddot{b} - b \cdot \dot{\psi}^2) \cdot e^{i\psi} + (b \cdot \ddot{\psi} + 2\dot{b} \cdot \dot{\psi}) \cdot i \cdot e^{i\psi}, \quad (2.69)$$

odnosno:

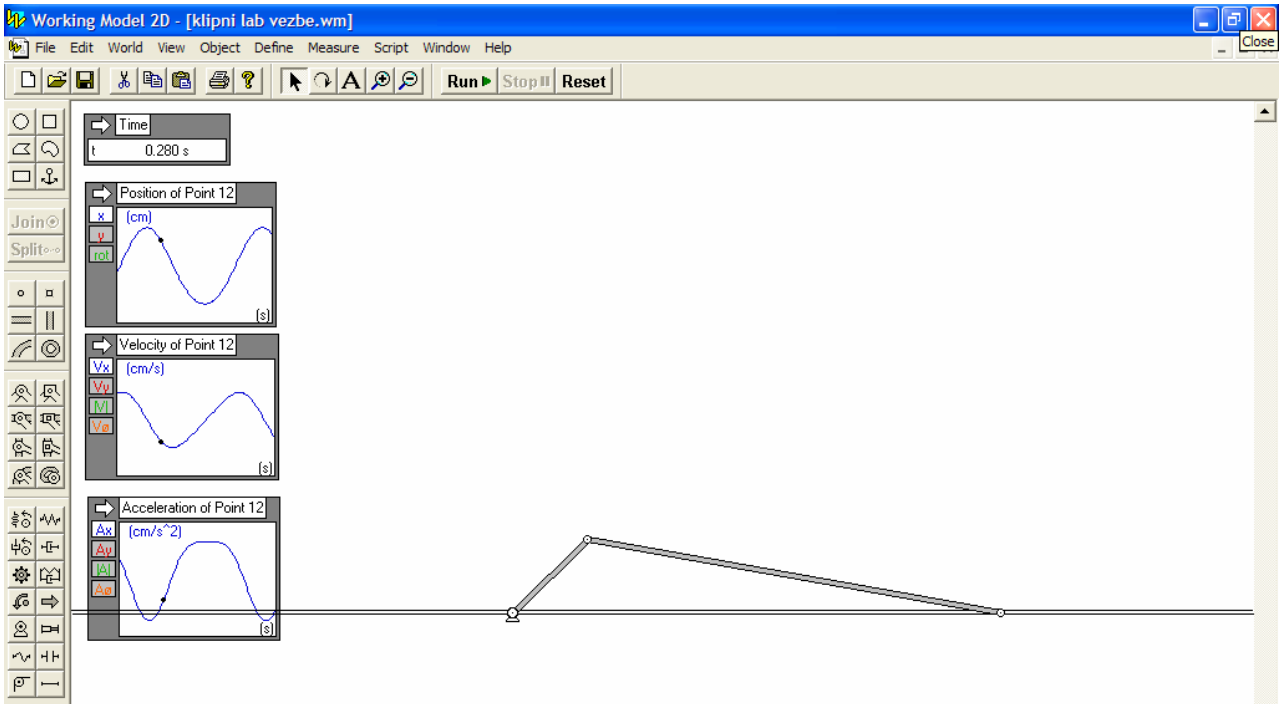
$$\vec{a}_A = (\vec{a}_{ApN} + \vec{a}_{ApT}) + \vec{a}_{Ar} + \vec{a}_{Acor} = \vec{a}_{Ar} + \vec{a}_{ApN} + \vec{a}_{ApT} + \vec{a}_{Acor}, \quad (2.70)$$

jer se pored uobičajenih komponenti ubrzanja, javlja i *Coriolis*-ovo ubrzanje, upravno na pravac kulise ( $\vec{b}$ ):

$$\vec{a}_{Acor} = 2 \dot{b} \cdot \dot{\psi} = 2 v_{Ar} \cdot \omega_p. \quad (2.71)$$

## 2.5. Korišćenje programskih paketa za kinematsku analizu mehanizama

Za kinematsku analizu mehanizama mogu se koristiti i specijalizovani programski paketi za modeliranje kretanja krutih tela. Na **slici 2.44.** prikazan je model centričnog klipnog mehanizma, dimenzija  $a = 4 \text{ cm}$  i  $c = 16 \text{ cm}$ , u programskom paketu WORKING MODEL 2D, kao i njime dobijeni dijagrami položaja, brzine i ubrzanja klizača za ugaonu brzinu pogonske krivaje  $\omega_{10} = 8,4 \text{ s}^{-1} = \text{const}$ .



Sl.2.44.

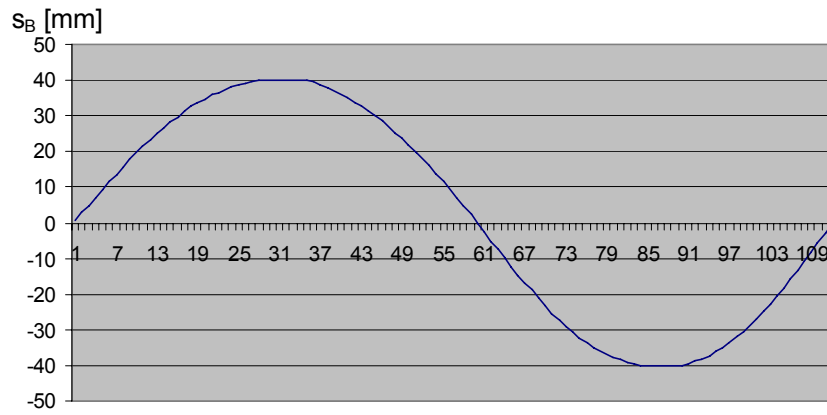
## 2.6. Merni postupak određivanja položaja, brzina i ubrzanja članova realnih mehanizama

Položaji, brzine i ubrzanja članova realnih mehanizma mogu se odrediti i odgovarajućim mernim uređajima. Na narednoj fotografiji prikazan je realni klipni mehanizam, dimenzija  $a = 4 \text{ cm}$  i  $c = 16 \text{ cm}$ , za čiji klizač je kruto vezan odgovarajući davač puta koji određuje položaje klizača.



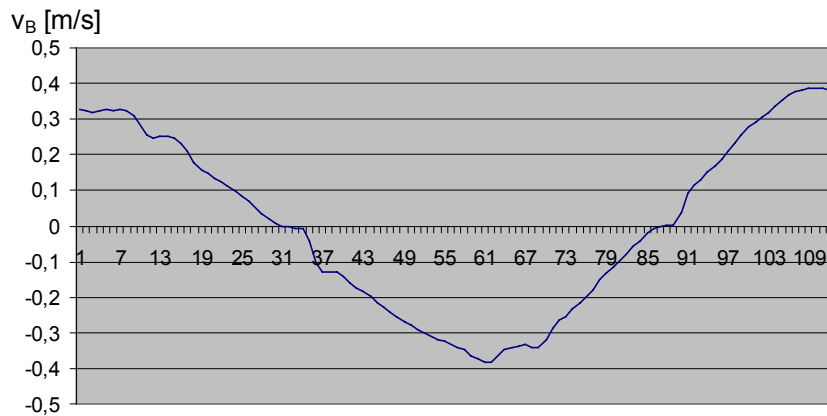
Sl.2.45.

Ucrtavanjem više sukcesivnih položaja klizača  $s_B(t)$  dobijen je dijagram promene položaja klizača (**slika 2.46**):



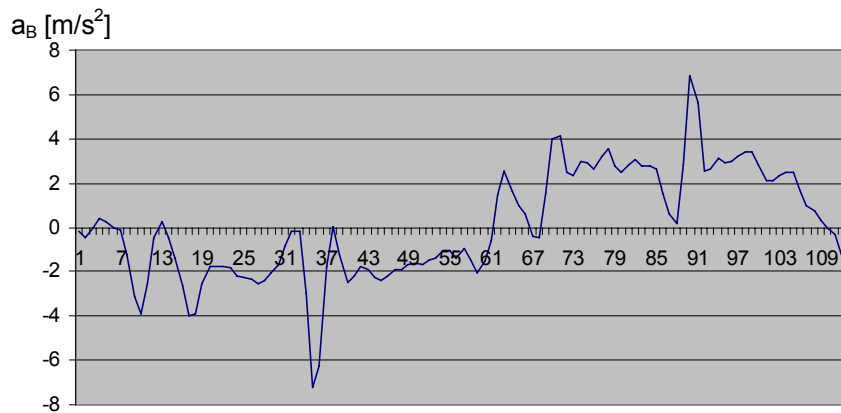
Sl.2.46.

Iz prethodnog dijagrama se softverskim diferenciranjem može dobiti i dijagram promene brzine klizača  $v_B(t)$ :



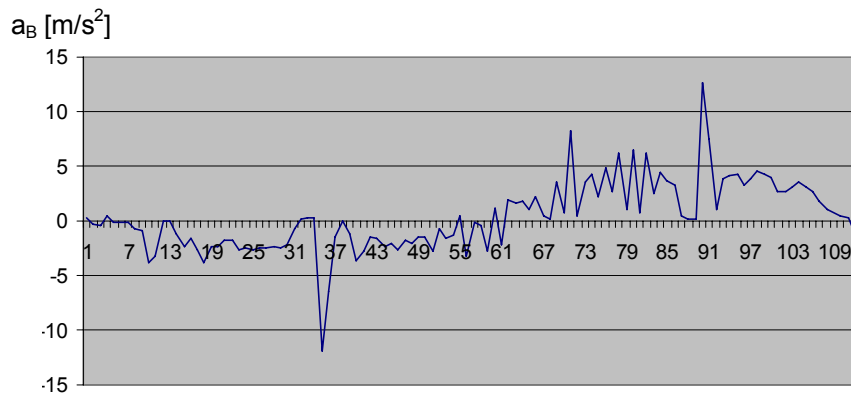
Sl.2.47.

a narednim diferenciranjem i dijagram promene ubrzanja klizača  $a_B(t)$ :



Sl.2.48.

Vrednosti ubrzanja klizača mogu se i direktno izmeriti, korišćenjem davača ubrzanja:



Sl.2.49.

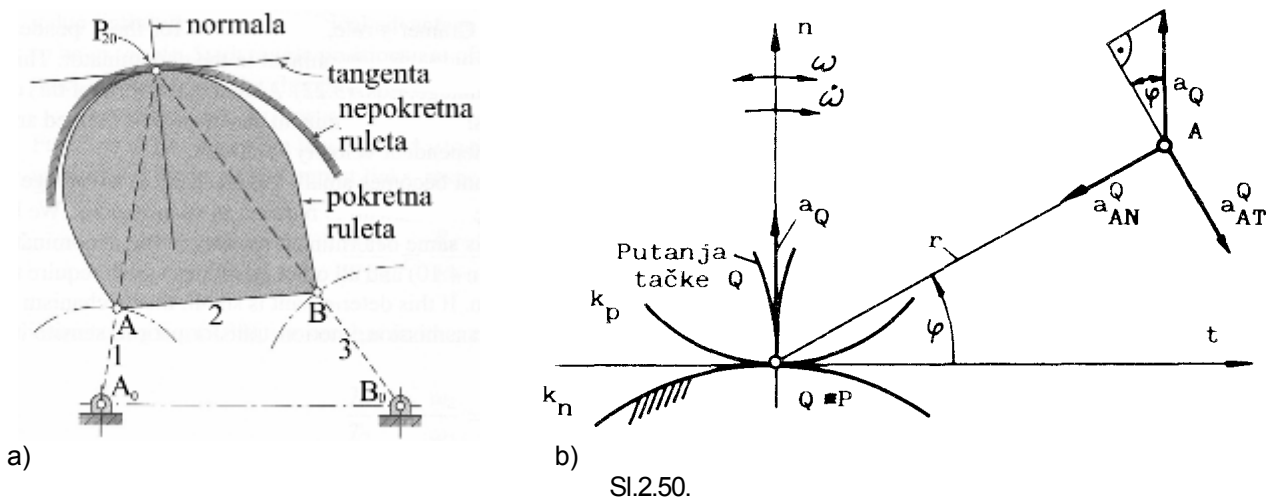
Ovaj dijagram odstupa od prethodnog dijagrama, dobijenog dvostrukim diferenciranjem zakona puta, zbog uticaja zazorâ u zglobovima.



## 2.7. Kinematika kretanja kroz tri beskonačno bliska položaja

### 2.7.1. Bresse-ovi krugovi

Posmatrajmo ubrzanje tačke **A**, čiji je položaj definisan polarnim koordinatama  $(r, \varphi)$  u koordinatnom sistemu  $tPn$  (slika 2.50b).



SI.2.50.

Ako je poznato ubrzanje neke tačke **A** pokretne ravni (slika 2.50a), onda se ubrzanje bilo koje tačke **B** u ravni može odrediti kao zbir ubrzanja tačke **A** i ubrzanja tačke **B** oko tačke **A**, prema Euler-ovom obrascu:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_B^A. \quad (2.72)$$

Neka je poznato ubrzanje neke tačke **Q** pokretne ravni (slika 2.50b), koja se u datom trenutku poklapa sa trenutnim polom **P**. Ubrzanje tačke **A** se u tom slučaju može izraziti relacijom:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_Q + \bar{a}_A^Q. \quad (2.73)$$

Ubrzanje tačke **Q**, u opštem slučaju, ima normalnu i tangencijalnu komponentu. Kako se tačka **Q**, u posmatranom trenutku, poklapa sa polom **P**, njena brzina je jednaka nuli, a samim tim je i normalna komponenta ubrzanja jednaka nuli (2.18).

Tačka **P** je povratna tačka putanja tačke **Q**, a tangenta na putanju tačke **Q** (u ovom trenutku) poklapa se sa normalom ruleta (slika 2.50b).

Ubrzanje tačke **A** oko tačke  $Q \equiv P$  ima normalnu komponentu usmerenu od tačke **A** prema tački **Q** i tangencijalnu komponentu, upravnu na pravac  $\overline{AP}$ , čiji je smer određen smerom ugaonog ubrzanja  $\dot{\omega}$ . Njihovi intenziteti su:

$$a_{AN}^Q = \overline{PA} \cdot \omega^2 = r \cdot \omega^2 \quad (2.74)$$

$$a_{AT}^Q = \overline{PA} \cdot \dot{\omega} = r \cdot \dot{\omega}.$$

Za analizu kretanja tačke **A** pogodnije je poznavati normalnu i tangencijalnu komponentu ubrzanja ove tačke. Normalna komponenta ubrzanja tačke **A** je u pravcu  $\overline{PA}$ , pošto centar krivine putanje tačke **A**, tačka **A**<sub>0</sub>, leži na pravcu  $\overline{PA}$  (slika 2.50a), pa je:

$$a_{AN} = a_{AN}^Q - a_Q \cdot \sin \varphi = r \cdot \omega^2 - a_Q \cdot \sin \varphi. \quad (2.75)$$

Ukoliko se tačka **A** u posmatranom trenutku kreće pravolinijski, normalna komponenta ubrzanja je jednaka nuli, pa se iz prethodne jednačine dobija:

$$r \cdot \omega^2 - a_Q \cdot \sin \varphi = 0, \quad (2.76)$$

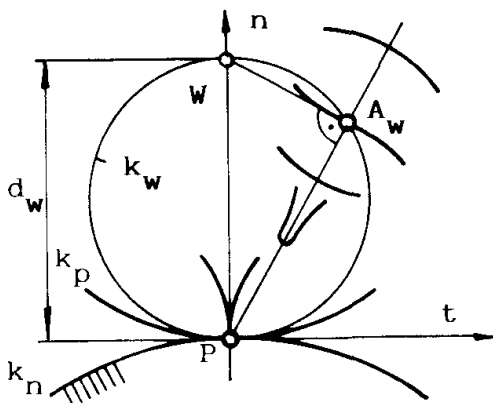
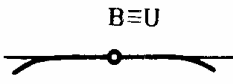
odnosno,

$$r = \frac{a_Q}{\omega^2} \cdot \sin \varphi = d_w \cdot \sin \varphi. \quad (2.77)$$

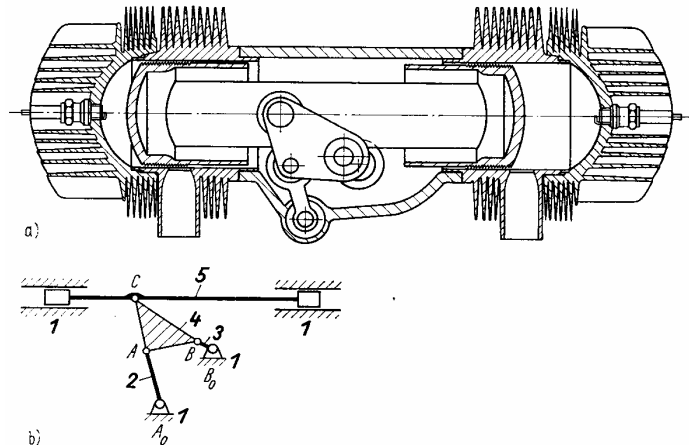
Odnos  $\frac{a_Q}{\omega^2}$  ima dimenziju dužine, a jednačina (2.77), geometrijsko mesto tačaka koje nemaju normalnu

komponentu ubrzanja, predstavlja jednačinu kruga, prečnika  $d_w = \frac{a_Q}{\omega^2}$  (slika 2.51). Centar ovoga kruga leži na normali, a krug prolazi kroz koordinatni početak **P**. Tačke koje leže na ovom krugu opisuju prevoj tj. imaju pravolinijsku putanju u najmanje tri beskonačno bliska položaja, pa se ovaj krug naziva **prevojni krug** ( $k_w$ ). Sve tačke koje leže na prevojnog krugu obeležavamo indeksom  $w$ . Tačka preseka normale (**n**) i prevojnog kruga ( $k_w$ ) naziva se **prevojni pol** (**W**).

Analizom kretanja pokretne tačke kroz četiri beskonačno bliska položaja ustanovljeno je da jedna od tačaka prevojnog kruga realizuje pravolinijsku putanju u najmanje četiri beskonačno bliska položaja, a poznata je pod imenom *Ball-ova tačka* ili tačka undulacije (**U=B**). Za stacionarnu vrednost prečnika prevojnog kruga ( $d_w = \text{const.}$ ) *Ball-ova tačka* se poklapa sa prevojnim polom (**B=W**).



Sl.2.51.



Sl.2.52.

Na **slici 2.52.** prikazana je skica i kinematska shema mehanizma motora SUS, čiji je broj stepeni slobode kretanja jednak nuli, a mehanizam je pokretljiv samo zahvaljujući pravolinijskom (horizontalnom) pomeranju tačke **C** (leži na prevojnog krugu člana **4**) koje omogućuje translatorno pomeranje (klizanje) člana **5**.

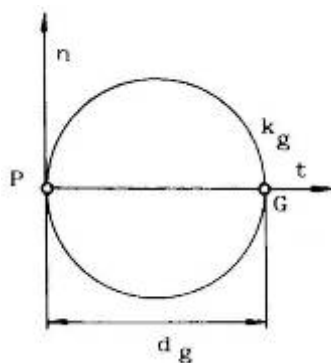
Tangencijalna komponenta ubrzanja tačke **A** upravna je na pravac  $\overline{PA}$  (slika 2.50b), pa je:

$$a_{AT} = \overline{PA} \cdot \dot{\omega} = a_{AT}^0 - a_Q \cdot \cos \varphi = r \cdot \dot{\omega} - a_Q \cdot \cos \varphi. \quad (2.78)$$

Za slučaj kada je  $a_{AT} = 0$  dobija se:

$$r_g = \frac{a_Q}{\dot{\omega}} \cdot \cos \varphi = d_g \cdot \cos \varphi. \quad (2.79)$$

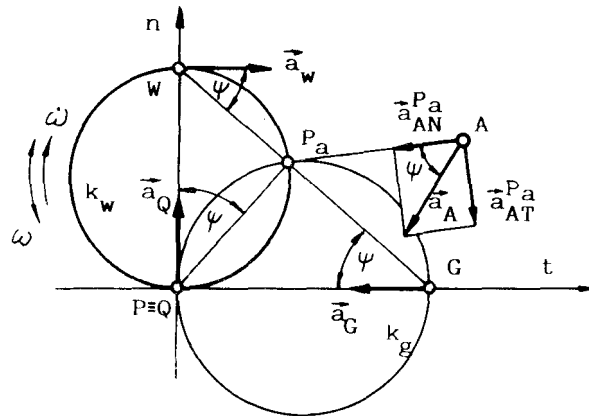
Odnos  $\frac{a_Q}{\dot{\omega}}$  ima dimenziju dužine, a jednačina (2.79), geometrijsko mesto tačaka koje nemaju tangencijalnu komponentu ubrzanja, predstavlja jednačinu kruga, prečnika  $d_g = \frac{a_Q}{\dot{\omega}}$  (slika 2.53). Centar kruga se nalazi na



Sl.2.53.

pozitivnom ili negativnom delu tangente, što zavisi od smera ugaonog ubrzanja  $\dot{\omega}$ , a krug prolazi kroz koordinatni početak (**P**). Brzine tačaka koje leže na ovom krugu dostižu u tom trenutku ekstremum, odnosno prelaze iz režima rasta u režim opadanja i obrnuto, pa se ovaj krug naziva **prelazni krug** ( $k_g$ ). Tačka preseka tangente (**t**) i prelaznog kruga ( $k_g$ ) naziva se **prelazni pol** (**G**).

Prelazni i prevojni krug ( $k_w$  i  $k_g$ ) seku se u tačkama  $P$  i  $P_a$  (slika 2.54). Tačka  $P_a$  je **pol ubrzanja**, koji nema ubrzanje, dok je tačka  $P \equiv Q$  singularna tačka, pošto, kao što je na slici 2.50. pokazano, ona ima ubrzanje ( $a_Q$ ).



Sl.2.54.

Posmatrajmo ubrzanje tačke  $A$  u odnosu na tačku  $P_a$ :

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{P_a} + \bar{a}_{AN}^{P_a} + \bar{a}_{AT}^{P_a}. \quad (2.80)$$

Kako je  $\bar{a}_{P_a} = 0$ , sledi:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{AN}^{P_a} + \bar{a}_{AT}^{P_a} \quad (2.81)$$

gde je:  $a_{AN}^{P_a} = \overline{AP_a} \cdot \omega^2$  i  $a_{AT}^{P_a} = \overline{AP_a} \cdot \dot{\omega}$ ,

odakle se dobija:

$$a_A = \overline{AP_a} \cdot \sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2}. \quad (2.82)$$

Ugao  $\psi$  koji ubrzanje  $\bar{a}_A$  zaklapa sa potegom  $\overline{AP_a}$  određujemo iz odnosa:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a_{AT}^{P_a}}{a_{AN}^{P_a}} = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2}. \quad (2.83)$$

Kako ugao  $\psi$  ne zavisi od položaja tačke ( $r, \varphi$ ), to je i ugao između potega  $\overline{P_aW}$  i ubrzanja  $\bar{a}_w$ , potega  $\overline{P_aG}$  i ubrzanja  $\bar{a}_G$ , kao i potega  $\overline{P_aQ}$  i ubrzanja  $\bar{a}_Q$ , takođe  $\psi$ . Sa slike 2.54. sledi i odnos:

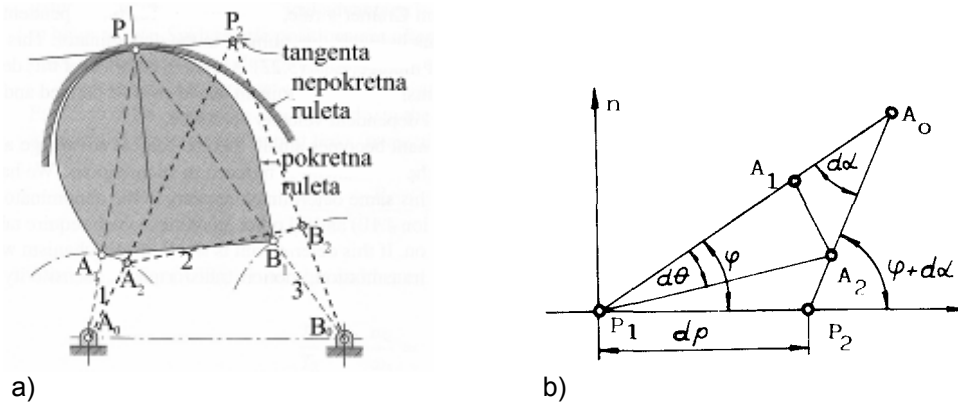
$$\frac{d_w}{d_g} = \operatorname{tg} \psi = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2}. \quad (2.84)$$

Prevojni krug ( $k_w$ ) i prelazni krug ( $k_g$ ) po svome autoru nose naziv *Bresse-ovi krugovi*.

### 2.7.2. Euler-Savary-jeva jednačina

Neka u položaju (1) mehanizma tačka  $A_1$  (slika 2.55) i centar krivine njene putanje ( $A_0$ ) leže na pravoj koja sa tangentom zaklapa ugao  $\varphi$ . Ako je rastojanje  $\overline{P_1A_1} = r$  i  $\overline{P_1A_0} = r_0$ , onda je poluprečnik krivine tačke  $A$ :

$$\rho = r_0 - r. \quad (2.85)$$



Sl.2.55.

Tačka  $A_1$ , okretanjem za mali ugao  $d\alpha$  oko tačke  $A_0$  (slika 2.55b), prelazi u beskonačno bliski položaj  $A_2$ ; novi položaj trenutnog pola ( $P_2$ ) leži na pravoj kroz  $A_2$  i  $A_0$  (slika 2.55a). Polovi  $P_1$  i  $P_2$  su beskonačno bliski (na nepokretnoj ruleti), pa se može reći da pol  $P_2$  leži na tangenti ruleta. Kao što se sa slike 2.55.b. vidi, tačka  $A_1$  može dospeti u položaj  $A_2$  i zaokretanjem oko pola  $P_1$  (za ugao  $d\theta$ ). Iz trougla  $\Delta P_1P_2A_0$  sledi:

$$\frac{dp}{\sin d\alpha} = \frac{r_0}{\sin(\pi - (\varphi + d\alpha))} \quad (2.86)$$

odnosno, kako je  $\sin d\alpha \approx d\alpha$  i  $\sin(\pi - (\varphi + d\alpha)) \approx \sin \varphi$ :

$$\frac{dp}{d\alpha} = \frac{r_0}{\sin \varphi}. \quad (2.87)$$

Sa druge strane je:

$$\overline{A_1A_2} = \rho \cdot d\alpha = r \cdot d\theta, \quad (2.88)$$

pa smenom veličina iz jednačina (2.85) i (2.88) u jednačinu (2.87) sledi:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{d\alpha}{dp \cdot \sin \varphi} = \frac{r \cdot d\theta}{\rho \cdot dp \cdot \sin \varphi}$$

$$\frac{\rho}{r_0 \cdot r} = \frac{r_0 - r}{r_0 \cdot r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{d\theta}{dp \cdot \sin \varphi}$$

odnosno:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{d\theta}{dp \cdot \sin \varphi}. \quad (2.89)$$

Zamenom  $\theta' = d\theta/dp$  u jednačini (2.89) dobija se:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\theta'}{\sin \varphi}. \quad (2.90)$$

U slučaju da se centar krivine nalazi u beskonačnosti ( $r_0 \rightarrow \infty$ ), tj. da se tačka kreće pravolinijski, jednačina (2.90) bi trebalo da predje u jednačinu prevojnog kruga. Upoređivanjem jednačina (2.90) i (2.76) dobija se:

$$d_w = \frac{1}{\theta'} = \frac{dp}{d\theta}, \quad (2.91)$$

pa se konačno može napisati jednačina:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{1}{d_w \cdot \sin \varphi} \quad (2.92)$$

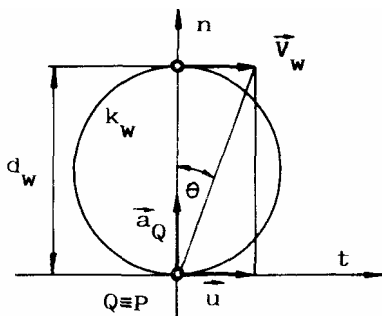
koja se prema autorima naziva *Euler-Savary-jeva* jednačina.

Iz jednačine (2.91) neposredno sledi: 
$$d_w = \frac{dp}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{u}{\omega} \quad (2.93)$$

gde  $u$  predstavlja brzinu promene položaja trenutnog pola, a  $\omega$  ugaonu brzinu.

**Specijalni slučajevi *Euler-Savary-jeve* jednačine** javljaju se kada je:

- a)  $r_0 \rightarrow \infty$ : centar krivine je u beskonačnosti, poluprečnik krivine  $\rho \rightarrow \infty$ , tačka se u datom trenutku kreće pravolinijski, a *Euler-Savary-jeva* jednačina dobija oblik:



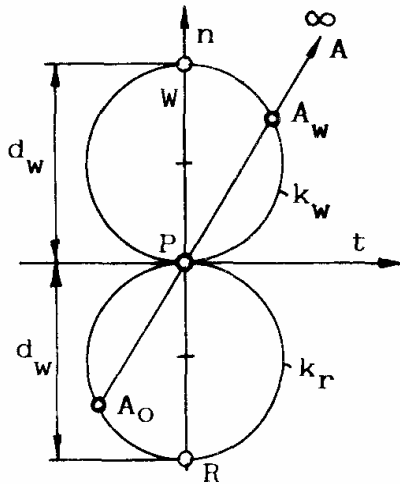
Sl.2.56.

$$r = d_w \cdot \sin \varphi. \quad (2.94)$$

Dobija se dakle jednačina prevojnog kruga ( $k_w$ ). Napomenimo još, da je brzina prevojnog pola  $v_w = d_w \cdot \omega$ , odnosno, kako sledi iz jednačine (2.93), brzina prevojnog pola jednaka je brzini promene položaja trenutnog pola:

$$u = v_w = d_w \cdot \omega. \quad (2.95)$$

- b)  $r \rightarrow \infty$ : tačka leži u beskonačnosti. Iz *Euler-Savary-jeve* jednačine sledi:



Sl.2.57.

$$r_0 = -d_w \cdot \sin \varphi. \quad (2.96)$$

Centar krivine putanje tačke (u beskonačnosti) leži na krugu prečnika  $d_w$ , čiji je centar na negativnom delu normale, a koji prolazi kroz koordinatni početak i naziva se **povratni krug** ( $k_r$ ).

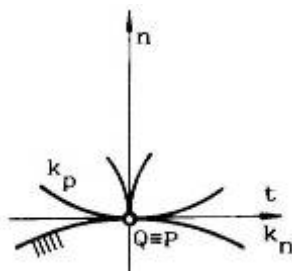
Povratni krug ( $k_r$ ) je simetričan prevojnog krugu ( $k_w$ ) i u slučaju inverznog kretanja on postaje prevojni krug. Povratni krug je dakle prevojni krug kinematski suprotnog mehanizma.

- d)  $r = 0$ : tačka se poklapa sa trenutnim polom  $P$ . Iz *Euler-Savary-jeve* jednačine, smenom:  $r_w = d_w \cdot \sin \varphi$

i  $\rho = r_0 - r$ , dobija se: 
$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_w} = \frac{r_w - r}{r \cdot r_w}$$

$$\rho + r = r_0 = \frac{r \cdot r_w}{r_w - r}$$

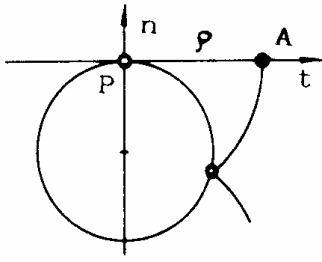
$$\rho = \frac{r^2}{r_w - r} \quad (2.97)$$



Sl.2.58.

odakle sledi da je za  $r=0$  i  $\rho=0$ , što znači da sve tačke koje se poklapaju da trenutnim polom  $P$  u tom trenutku opisuju putanju polu- prečnika krivine  $\rho=0$ .

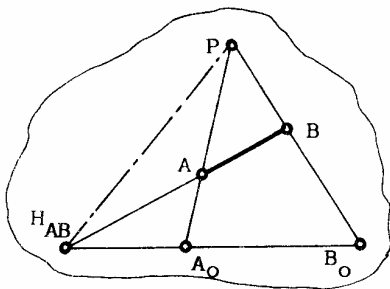
- d)  $\varphi = 0$  : tačka leži na tangenti, pa kako je  $r_w=0$ , iz (2.97) sledi da je  $\rho = -r$  što znači da sve tačke koje leže na tangenti opisuju kružni luk čiji se centar poklapa sa trenutnim polom  $P$ .



Sl.2.59.

### 2.7.3. Tangenta na rulete i centar krivine

Kako tačka, centar krivine njene putanje i pol ( $P$ ) leže na polnom pravcu, to se trenutni pol može odrediti ako su poznate dve tačke ( $A$  i  $B$ ) i centri krivina njihovih putanja ( $A_0$  i  $B_0$ ), u preseku pravaca  $\overline{AA_0}$  i  $\overline{BB_0}$ .



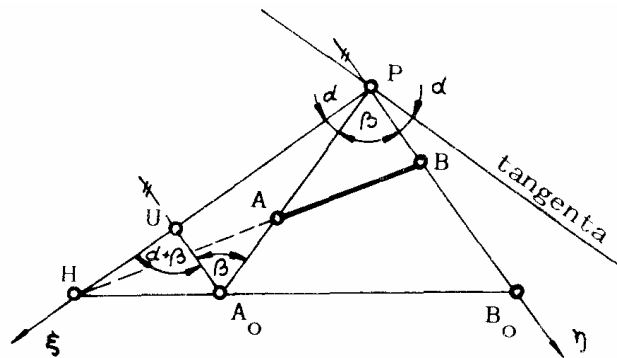
Sl.2.60.

Uočimo i tačku  $H_{AB}$  (slika 2.60), koja se dobija u preseku pravaca  $\overline{AB}$  i  $\overline{A_0B_0}$ . Dok tačka  $P$  važi za celu ravan spojke (sve tačke u njoj), položaj tačke  $H$  zavisi od položaja odgovarajućeg para pokretnih tačaka. Pol  $H$  je kolinearni pol, a pravac  $\overline{PH}$  predstavlja osu kolineacije.

Polazeći od ovih odnosa, može se odrediti tangenta na rulete bez konstruisanja samih ruleta, kao i centar krivine putanje bilo koje tačke u pokretnoj ravni. Prema ovom postupku, konstrukcija tangente se može sprovesti tako što se najpre pronadju tačke  $P$  i  $H$ , pomoću tačaka  $A, A_0, B$  i  $B_0$ .

Zatim se pravci  $\overline{PH}$  i  $\overline{PB_0}$  (slika 2.61) usvoje za koordinatne ose  $\xi$  i  $\eta$  kosouglog koordinatnog sistema  $\xi P \eta$ . Jednačina prave koja prolazi kroz tačke  $A_0$  i  $B_0$  može se u tom koordinatnom sistemu napisati u obliku:

$$\frac{\xi}{PH} + \frac{\eta}{PB_0} = 1. \quad (2.98)$$



Sl.2.61.

Tekuće koordinate tačke  $A_0$  ( $\xi = \overline{PU}$  i  $\eta = \overline{UA_0}$ ) mogu se na osnovu odnosa koji važe u trouglu  $\Delta A_0PU$ :

$$\frac{\overline{PA_0}}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\xi}{\sin \beta} = \frac{\eta}{\sin \alpha} \quad (2.99)$$

izraziti kao:

$$\xi = \overline{PA_0} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\eta = \overline{PA_0} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (2.100)$$

Unošenjem vrednosti za  $\xi$  i  $\eta$  i daljim rešavanjem jednačine (2.98) sledi:

$$\frac{1}{\overline{PH}} = \frac{1}{\sin \beta} \cdot \left[ \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\overline{PA}_0} - \frac{\sin \alpha}{\overline{PB}_0} \right]. \quad (2.101)$$

Analogno, za pravu kroz **B** i **A** (slika 2.61), dobija se:

$$\frac{1}{\overline{PH}} = \frac{1}{\sin \beta} \cdot \left[ \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\overline{PA}} - \frac{\sin \alpha}{\overline{PB}} \right] \quad (2.102)$$

odakle sledi:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\overline{PA}_0} - \frac{\sin \alpha}{\overline{PB}_0} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\overline{PA}} - \frac{\sin \alpha}{\overline{PB}}. \quad (2.103)$$

Kako je  $\overline{PA} = r_A$ ;  $\overline{PB} = r_B$ ;  $\overline{PA}_0 = r_{A_0}$ ;  $\overline{PB}_0 = r_{B_0}$ , sledi, nakon sređivanja jednačine (2.103):

$$\left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{A_0}} \right) \cdot \sin(\alpha + \beta) = \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_{B_0}} \right) \cdot \sin \alpha, \quad (2.104)$$

odnosno, u opštem slučaju:

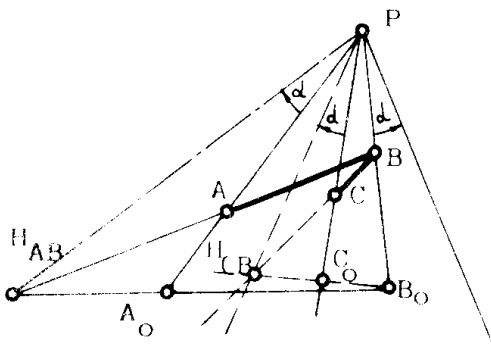
$$\left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \cdot \sin \varphi = \text{const.} = C, \quad (2.105)$$

ili

$$\left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = \frac{C}{\sin \varphi}. \quad (2.106)$$

Ova jednačina može predstavljati *Euler-Savary*-jevu jednačinu kada bi na desnoj strani bio izraz  $C=1/d_w$  i ako bi se ugao ( $\varphi$ ) merio od pravca tangente na rulete.

Ovaj uslov je ispunjen kada tangenta (**t**) zaklapa ugao  $\alpha$  sa pravcem  $\overline{PB}_0$ , odnosno ugao  $(\alpha + \beta)$  sa pravcem  $\overline{PA}_0$ , kako pokazuje **slika 2.61**.



Sl.2.62.

Konstrukcija centra krivine putanje tačke (npr. tačke **C** pokretne ravni) sprovodi se tako što se najpre odrede tačke **P** i **H<sub>AB</sub>**, na osnovu poznatih tačaka **A<sub>0</sub>**, **A**, **B** i **B<sub>0</sub>** (**slika 2.62**).

Tangenta na rulete u tački **P** zaklapa sa jednim polnim pravcem isti ugao koji, orijentisan u suprotnom smeru, osa kolineacije zaklapa sa drugim polnim pravcem.

Tačka **C<sub>0</sub>** mora ležati na pravcu  $\overline{PC}$ . Tačka **H<sub>CB</sub>** se nalazi u preseku pravca  $\overline{BC}$  i pravca koji zaklapa ugao  $\alpha$  sa pravcem  $\overline{PC}$ . Spajanjem tačaka **H<sub>CB</sub>** i **B<sub>0</sub>**, u preseku sa pravcem  $\overline{PC}$ , dolazi se do centra krivine **C<sub>0</sub>**.

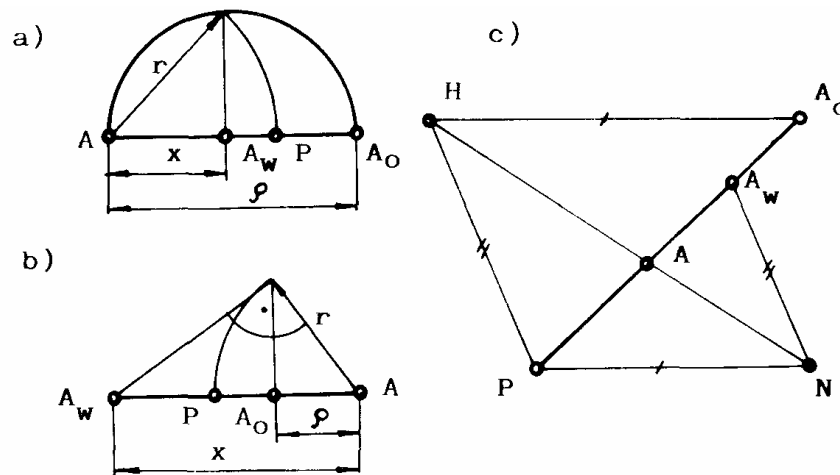
Konstrukcija tangente i centra krivine poznata je kao **Bobillier-ova konstrukcija**.

#### 2.7.4. Raspored tačaka P-A-A<sub>0</sub>-A<sub>w</sub>

Položaj tačke **A<sub>w</sub>**, tačke na prevojnom krugu (**k<sub>w</sub>**), na pravcu **P-A-A<sub>0</sub>** zavisi od položaja ovih tačaka. Uvođenjem smene  $x = r_w - r$  u jednačinu (2.97) dobija se:

$$\rho \cdot x = r^2. \quad (2.107)$$

Grafičko rešenje ove jednačine ( $\overline{A_0A} \cdot \overline{AA_w} = \overline{PA}^2$ ) može se naći uz pomoć *Tales*-ove teoreme (**slika 2.63.a,b**) ili konstrukcijom prikazanom na **slici 2.63.c**. Konstrukcija sa **slike 2.63.a**. koristi se kada je  $r < \rho$ , a konstrukcija sa **slike 2.63.b**. kada je  $r > \rho$ . Konstrukcija sa **slike 2.63.c**. koristi se u oba slučaja.



Sl.2.63.

Pri poznatom rasporedu tačaka  $P-A-A_0$ , potražimo položaj tačke  $A_w$  pomoću konstrukcije **c**. Najpre se postave prave, proizvoljnih pravaca, iz tačaka  $A_0$  i  $P$ , sa presekom u tački označenoj sa  $H$ . Prava, paralelna sa pravcem  $\overline{HA_0}$ , koja prolazi kroz tačku  $P$ , preseca pravu  $\overline{HA}$  u tački  $N$ . U preseku pravca  $P-A-A_0$  i pravca koji prolazi kroz tačku  $N$ , a paralelan je sa pravcem  $\overline{PH}$ , nalazi se tačka  $A_w$ .

Dokaz ovog postupka proizilazi iz sličnosti trouglova  $\triangle PHA \cong \triangle NAA_0$ , odnosno  $\triangle HAA_0 \cong \triangle PAN$ , odakle sledi odnos:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{AA_0}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AA_w}}{\overline{PA}}, \quad (2.108)$$

odnosno:

$$\overline{AA_0} \cdot \overline{AA_w} = \overline{PA}^2, \quad (2.109)$$

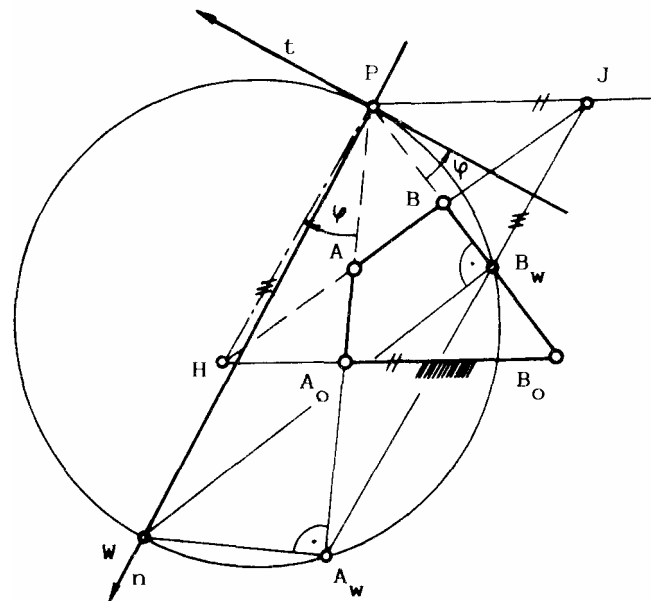
što odgovara jednačini (2.107).

Ako je poznat pravac tangente ( $t$ ) i normale ( $n$ ), kao i položaj bar jedne tačke na prevojnom krugu ( $A_w$ ), povlačenjem normale na poteg tačke  $A_w$  (slika 2.51) može se odrediti prečnik prevojnog kruga ( $d_w$ ), a time i smer normale i tangente u sistemu  $tPn$ , jer kao što je već pokazano, prevojni krug se uvek nalazi na pozitivnoj strani normale.

### 2.7.5. Prevojni i povratni krug kod četvoročlanih mehanizama

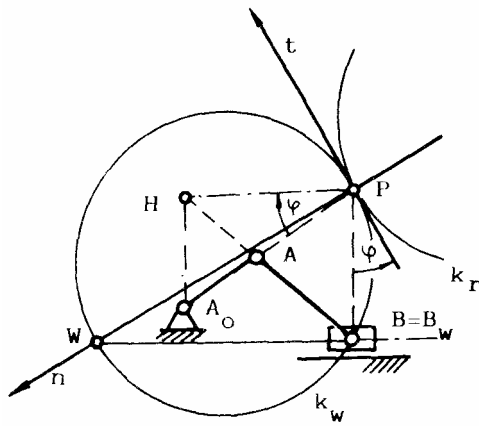
Kao što je već u odeljku 2.7.3. pokazano, koordinatni sistem  $Ptn$  može se definisati i bez poznavanja ruleta. Pravac tangente ( $t$ ) zaklapa isti ugao sa pravcem  $\overline{PB}$  kao i osa kolineacije  $\overline{PH}$  sa pravcem  $\overline{PA}$  (slika 2.64). Na način kako je to već opisano (slika 2.63c), dolazi se do tačaka  $A_w$  i  $B_w$  na prevojnom krugu ( $k_w$ ). Povlačenjem normale na  $\overline{PB_w}$  iz  $B_w$ , dobija se na normalni ( $n$ ) prevojni pol ( $W$ ), čime je određen prečnik prevojnog kruga ( $d_w$ ). Kako se prevojni krug uvek nalazi na pozitivnoj strani normale, to položaj prevojnog pola služi za orijentisanje koordinatnog sistema  $Ptn$ .

Kod klipnog mehanizma (slika 2.65), tačka  $B$  se kreće pravolinijski pa leži na prevojnom krugu ( $k_w$ ), a kod kulisnog mehanizma (slika 2.66), kinematski suprotnog klipnom mehanizmu, tačka  $B_0$  leži na povratnom krugu ( $k_r$ ), na osnovu koga određujemo i prevojni krug (istog prečnika, na pozitivnoj strani normale).

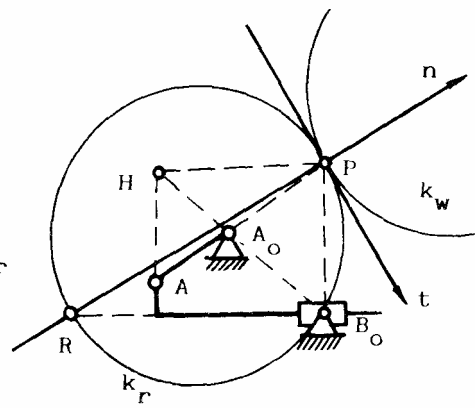


Sl.2.60.





Sl.2.65.



Sl.2.66.

### 2.7.6. Ekstremum prenosne funkcije prvoga reda

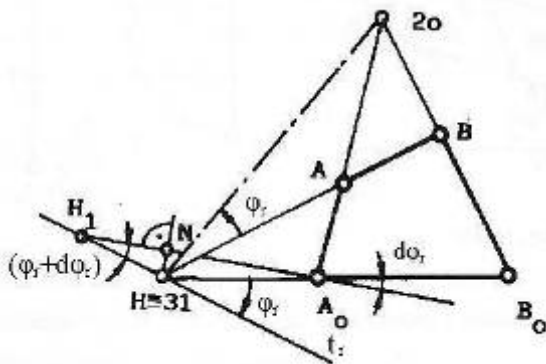
Položaj mehanizma u kome prenosna funkcija prvoga reda ima ekstremum dobija se iz uslova:

$$\psi'' = \frac{d\psi'}{d\varphi} = \frac{p' \cdot d}{(d+p)^2} = 0 \quad (2.110)$$

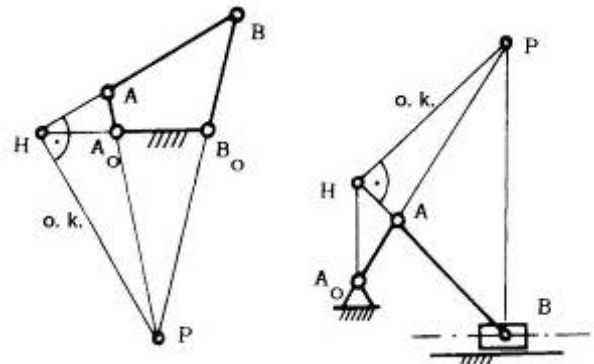
odakle sledi da prenosna funkcija prvoga reda dostiže ekstremum ( $\psi'_{\max}$ ) u trenutku kada je  $p' = \frac{dp}{d\varphi} = 0$ .

Tangenta na rulete  $k_1$  i  $k_3$  dobija se nanošenjem ugla  $\varphi_r$  (koji osa kolineacije zaklapa sa pravcem spojke) na pravac postolja, ali u suprotnom smeru (slika 2.67). Za mali priraštaj pogonskog ugla  $d\varphi$ , tačka  $H \equiv 31$  preći će u položaj  $H_1$  (na tangenti  $t_r$ ); umesto zaokretanja krivaje za ugao  $d\varphi_r$ , zaokrenuli smo postolje u suprotnom smeru za isti ugao. Kako je  $p = A_0H \approx A_0N$ , a  $\overline{HN} = p \cdot d\varphi_r$  i  $\overline{NH_1} \approx dp$  sledi:

$$\text{ctg}(\varphi_r + d\varphi_r) = \text{ctg} \varphi_r = \frac{\overline{H_1N}}{\overline{HN}} = \frac{dp}{p \cdot d\varphi_r} = \frac{p'}{p} \quad (2.111)$$



Sl.2.67.

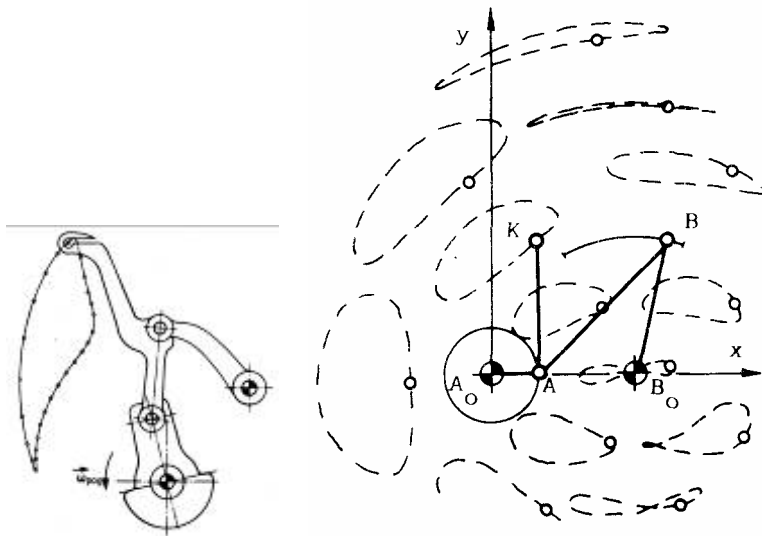


Sl.2.68.

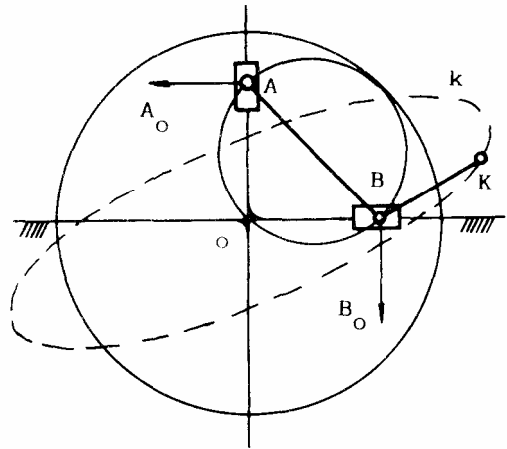
Iz prethodne jednačine sledi da prenosna funkcija prvoga reda ima ekstremum kada je  $\text{ctg} \varphi_r = 0$ , odnosno, kada spojka i osa kolineacije grade prav ugao (slika 2.68).

## 2.8. Putanje tačaka spojke. Teorema Roberts-Čebiševa

Tačke koje leže u ravni spojke polužnog četvorougla opisuju zatvorene putanje, čiji oblik zavisi od položaja tačke u ravni (slika 2.69).



SI.2.69.



SI.2.70.

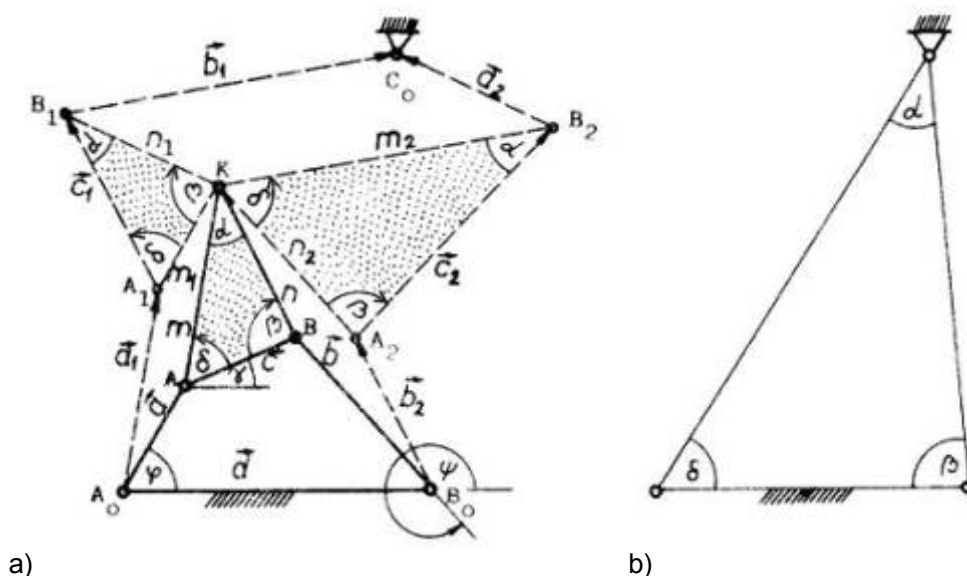
U opštem slučaju, putanje tačaka spojke polužnog četvorougla su tricirkularne krive šestoga reda, putanje tačaka spojke klipnog mehanizma su krive četvrtog reda, a kod mehanizma sa dva klizača (slika 2.70) putanje svih tačaka su elipse.

**Teorema Roberts-Čebišev-a** govori o mogućnostima za višestruku realizaciju putanja tačaka spojke polužnih mehanizama. Za realizaciju putanje bilo koje tačke spojke nekog polužnog četvorougla mogu se formirati još dva nova polužna četvorougla.

Položaj tačke **K** u ravni spojke polužnog mehanizma  $A_0ABB_0$  definisan je trouglom  $\Delta AKB$  (slika 2.71). Formirajmo paralelograme  $A_0AKA_1$  i  $B_0BKA_2$ , a zatim, iznad duži  $A_1K$  i  $A_2K$ , trouglove  $\Delta A_1KB_1$  i  $\Delta A_2KB_2$ , slične trouglu  $\Delta AKB$ , i konačno, paralelogram  $B_1KB_2C_0$ . Ako se dokaže da je tačka  $C_0$  nepokretna, tada zaista postoje dva nova četvorougla  $A_0A_1B_1C_0$  i  $B_0A_2B_2C_0$  čije tačke **K** opisuju istu putanju kao i tačka **K** polužnog četvorougla. Dokaz teoreme se dakle može svesti na dokaz da položaj tačke  $C_0$  ne zavisi od položaja polužnog mehanizma.

Pri dokazu prethodne tvrdnje polazi se od definisanja položaja tačke  $C_0$  vektorom  $\vec{A_0C_0}$ , kao zbirom konturnih vektora:

$$\vec{A_0C_0} = \vec{a_1} + \vec{c_1} + \vec{b_1}, \quad (2.72)$$



SI.2.71.

odnosno:

$$\overrightarrow{A_0C_0} = a_1 \cdot e^{i(\delta+\gamma)} + c_1 \cdot e^{i(\delta+\varphi)} + b_1 \cdot e^{i(\delta+\psi)} \quad (2.73)$$

gde je  $a_1 = m$ , a iz sličnosti trouglova sledi da je:

$$\frac{c_1}{m_1} = \frac{m}{c} ; \quad \frac{m_2}{n_2} = \frac{m}{c} \quad (2.74)$$

odnosno:

$$c_1 = \frac{m}{c} \cdot a ; \quad b_1 = \frac{m}{c} \cdot b \quad (2.75)$$

jer je:  $n_2 = b$ ,  $m_2 = b_1$  i  $m_1 = a$ .

Smenom vrednosti za  $a_1$ ,  $b_1$  i  $c_1$  u (2.73) dobija se, posle sredjivanja ( $a_1 = m = m \frac{c}{c}$ ):

$$\overrightarrow{A_0C_0} = \frac{m}{c} \cdot e^{i\delta} \cdot (a \cdot e^{i\varphi} + c \cdot e^{i\gamma} + b \cdot e^{i\psi}). \quad (2.76)$$

Kako je:

$$\vec{d} = a \cdot e^{i\varphi} + c \cdot e^{i\gamma} + b \cdot e^{i\psi} = \text{const.}, \quad (2.77)$$

sledi da je:

$$\overrightarrow{A_0C_0} = \frac{m}{c} \cdot d \cdot e^{i\delta} = \text{const.} \quad (2.78)$$

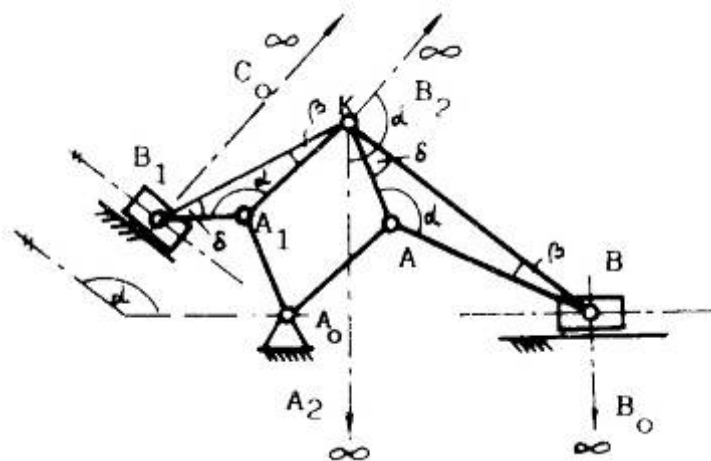
Analognim postupkom se dobija:

$$\overrightarrow{B_0C_0} = \frac{n}{c} \cdot d \cdot e^{i\beta} = \text{const.}, \quad (2.79)$$

na osnovu čega se može zaključiti da je:

$$\Delta A_0B_0C_0 \cong \Delta ABK. \quad (2.80)$$

Primenom teoreme *Roberts-Čebišev-a* na klipni mehanizam (slika 2.72) dolazi se do zaključka da je za realizaciju putanje bilo koje tačke spojke klipnog mehanizma moguće formirati još jedan novi klipni mehanizam (drugi mehanizam koji se dobija opisanom konstrukcijom je bekonačno velikih dimenzija).



Sl.2.72.

Da bi se odredio pravac klizanja zgloba  $B_1$  novog klipnog mehanizma  $A_0A_1B_1$ , odnosno njegov centar krivine  $C_0$ , bez traženja drugog mehanizma, dovoljno je iskoristiti posledicu konstrukcije prikazane na slici 2.72, da je ovaj pravac klizanja pod uglom  $\alpha$  u odnosu na pravac klizanja polznog mehanizma.

### 3. SINTEZA POLUŽNIH MEHANIZAMA

Oblast **sinteze** mehanizama bavi se kreiranjem novih rešenja mehanizama za realizovanje odgovarajućih tehnoloških procesa, pretvaranjem koncepta kretanja u mehanizam i mašinu.

Tipični zahtevi koje sintezom mehanizama treba realizovati su:

- vođenje nekog tela kroz određeni broj zadatih položaja,
- vođenje neke tačke duž zadate putanje ili kroz određeni broj zadatih položaja i
- realizovanje zadate funkcionalne zavisnosti pomeranja vođenog člana od pomeranja pogonskog člana mehanizma (mehanizmi za prenos).

tako da razlikujemo sintezu mehanizama za vođenje i sintezu mehanizama za prenos, mada, ponekad, ove dve funkcije mehanizma nisu deljive.

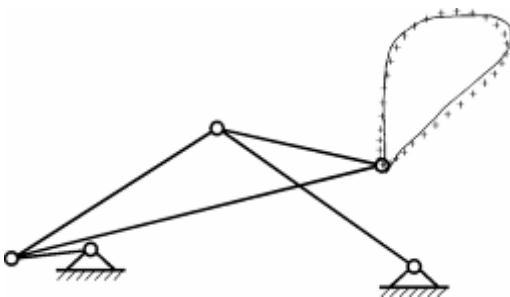
Postupak sinteze mehanizama sastoji se iz:

a) **strukturne sinteze** - izbora ili sinteze:

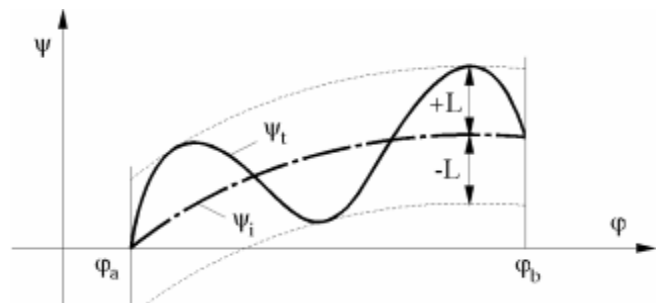
- tipa mehanizma (polužni, bregasti, planetni) i
- strukture mehanizma (broj članova, nižih i viših kinematskih parova, kinematska šema) i

b) **dimenzione sinteze** - određivanje vrednosti dimenzija članova mehanizma (dužina i uglova) kojima bi se najpribližnije mogao realizovati postavljeni zadatak sinteze.

Sintezom se često ne može doći do rešenja mehanizma koje zadatu funkcionalnu zavisnost (**slika 3.1.b**) odn. putanju (**slika 3.1.a**) realizuje egzaktno već samo do rešenja koje u određenom broju diskretnih položaja realizuje tačne vrednosti zadate funkcionalne zavisnosti odn. putanje; ovi položaji se uobičajeno nazivaju **tačnim** položajima. Drugim rečima, zadata i realizovana funkcija odn. putanja, poklapaju se samo u pojedinim tačkama. Ograničen je broj problema za koje egzistiraju egzaktna rešenja sinteze (realizovanje pravolinijske putanje, putanja oblika konusnih preseka i nekih krivih višeg reda uprošćenih karakteristika) za razliku od približne sinteze kojom se može realizovati, na određenom intervalu, skoro svaka funkcionalna zavisnost odn. putanja.



a)



b)

Sl.3.1.

Za rešavanje problema sinteze mehanizama razvijene su najpre grafičke metode, zbog nelinearnosti problema koje je trebalo rešavati.

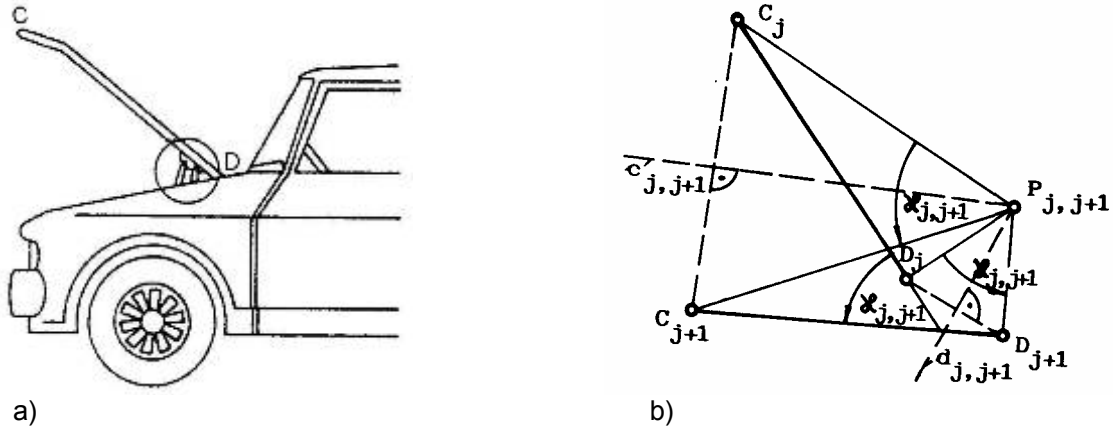
Zatim su razvijene analitičke metode; težilo se dobijanju rešenja u zatvorenom obliku, pošto ona nude velike mogućnosti analize dobijenih rešenja, pa su stoga rešavani pre svega problemi sinteze mehanizama sa manjim brojem članova i manjim brojem zadatih tačnih položaja.

Razvoj računarske tehnike i neposredni tehnološki problemi ohrabрили su početkom 60-tih godina prošloga veka, posebno u USA, razvoj numeričkih postupaka sinteze koji su potisnuli grafičke metode (pojedine numeričke i analitičke metode su razvijene i na osnovu grafičkih konstrukcija). Primenom računara u procesu sinteze eliminisani su nedostaci grafičkih postupaka, vezani za tačnost i brzinu dobijanja rešenja, zadatke sinteze moguće je rešavati u većem broju tačnih položaja, rešeni su zadaci koji bi za grafičku sintezu bili suviše komplikovani, ali je uvođenje numeričkih metoda donelo probleme druge vrste od kojih neki ni do danas nisu kvalitetno rešeni (osnovnu teškoću numeričkih postupaka predstavlja izbor dovoljno dobrog početnog rešenja ovih iterativnih postupaka). Nedostaci analitičkih postupaka sinteze mehanizama doveli su do razvoja tzv. optimalne sinteze mehanizama (nelinearno programiranje).

U narednim odeljcima biće prikazane osnovne metode sinteze, razvijene do tri položaja, čime se stvara osnova za dalje proučavanje ove problematike.

### 3.1. Sinteza mehanizama za vođenje

Mehanizmi za vođenje imaju zadatak da neko telo (npr. haubu automobila na **slici 3.2a**), ili tačku (**slika 2.69a**), provedu kroz zadate položaje. Neka je položaj pokretnog tela pri ravnom kretanju definisan položajem dveju tačaka ovog tela (**C** i **D**), koje se, u opštem slučaju, ne poklapaju sa zglobovima kojima je ovo telo vezano za ostale članove mehanizma (prikazani u krugu na **slici 3.2a**). Tačke  $C_j$  ( $C_1, C_2, \dots, C_n$ ) i  $D_j$  ( $D_1, D_2, \dots, D_n$ ) su homologne tačke i predstavljaju sukcesivne položaje tačke **C** odn. **D**. Ugao između dva sukcesivna položaja pokretne ravni (**slika 3.2b**) je ugao između dva susedna položaja štapa  $\overline{CD}$  ( $\chi_{j,j+1}$ ).



Sl.3.2.

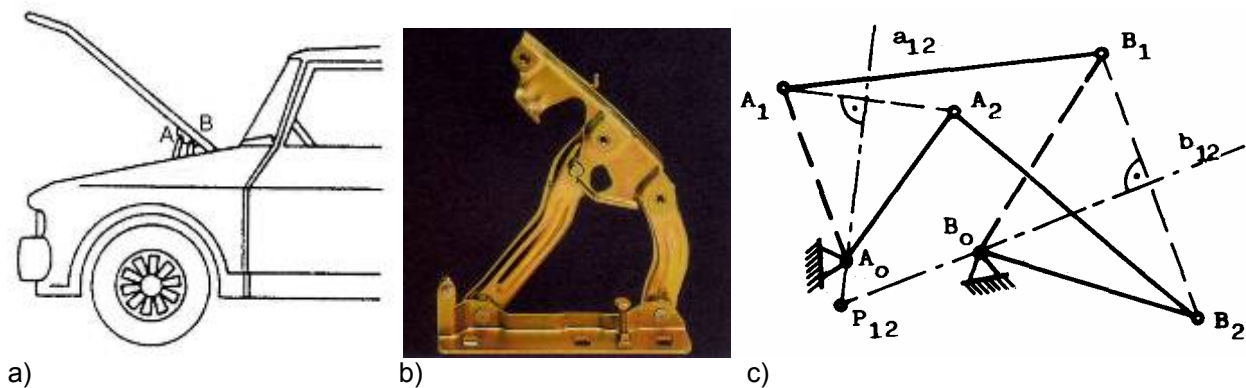
Štap  $\overline{CD}$  (**slika 3.2b**) može iz položaja  $C_j D_j$  preći u položaj  $C_{j+1} D_{j+1}$  na dva načina:

- rotacijom štapa (ravni) za ugao  $\chi_{j,j+1}$ , a zatim paralelnim pomeranjem do položaja  $C_{j+1} D_{j+1}$  ili
- rotacijom štapa (ravni) oko pola  $P_{j,j+1}$  za ugao  $\chi_{j,j+1}$ ; pol se nalazi u preseku simetrala duži  $\overline{C_j C_{j+1}}$  ( $C_{j,j+1}$ ) i  $\overline{D_j D_{j+1}}$  ( $D_{j,j+1}$ ).

Uočimo još, da je  $\chi_{j,j+1} + \chi_{j+1,j} = 2\pi$ .

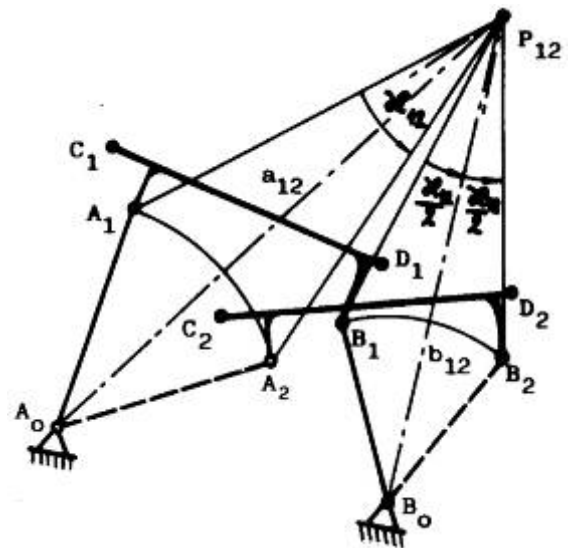
#### Dva položaja pokretne ravni

Ukoliko želimo da ovu ravan vodimo spojkom polužnog četvorougla (**slika 3.3a,b**), a položaj ravni je zadat položajem zglobnih tačaka spojke (**A** i **B** na **slici 3.3a**) u dva homologna položaja (**slika 3.3c**), putanje tačaka **A** i **B** su kružnice sa centrom u  $A_0$ , odnosno  $B_0$ . Simetrala duži  $\overline{A_1 A_2}$  ( $a_{12}$ ) je geometrijsko mesto tačaka  $A_0$ , a simetrala duži  $\overline{B_1 B_2}$  ( $b_{12}$ ) geometrijsko mesto tačaka  $B_0$  što znači da postoji bezbroj rešenja. Postojanje velikog broja rešenja pruža mogućnost za postavljanje dodatnih kinematskih, dinamičkih i konstruktivnih uslova. U slučaju  $A_0 = B_0 = P_{12}$  dobija se trivijalno rešenje, kada mehanizam ne postoji, a zadatak vođenja se obavlja rotacijom trougla  $\triangle ABP_{12}$  oko pola  $P_{12}$ .



Sl.3.3.

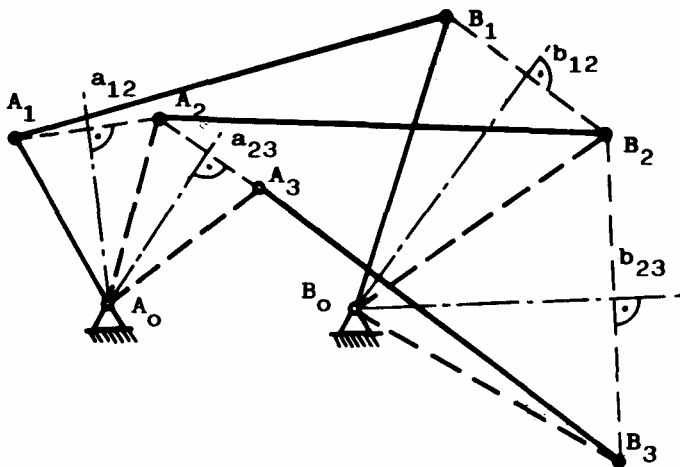
U opštem slučaju, kada je položaj ravni zadat proizvoljnim homolognim tačkama  $C_j$  i  $D_j$ , gde je  $j=1,2$  (slika 3.2a), moguće je dodatno zadati zglobne tačke spojke ( $A$  i  $B$ ), odnosno tačke postolja ( $A_0$  i  $B_0$ ). Ako su zadate tačke  $A$  i  $B_0$  (slika 3.4), tada je geometrijsko mesto tačkaka  $A_0$  simetrala  $a_{12}$ , a geometrijsko mesto tačkaka  $B_1$ , odnosno  $B_2$  su kraci ugla  $\chi_{12}$ , čija je simetrala  $b_{12}$ , a teme  $P_{12}$ .



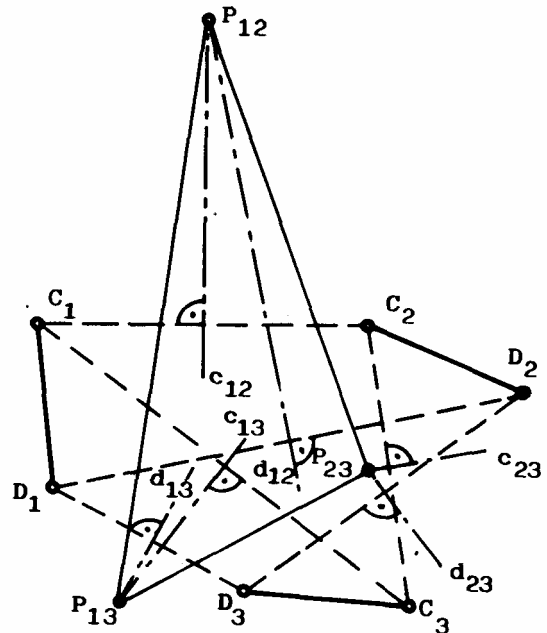
Sl.3.4.

**Tri položaja pokretne ravni**

Pokretna ravan zadata je parom tačkaka u tri homologna položaja. Ukoliko su odabrane tačke ( $A, B$ ) zglobne tačke, njihove putanje su kružnice oko  $A_0$  odnosno  $B_0$ . Tačka  $A_0$  nalazi se u preseku simetrala  $a_{12}$ ,  $a_{13}$  i  $a_{23}$ , a tačka  $B_0$  u preseku simetrala  $b_{12}$ ,  $b_{13}$  i  $b_{23}$  (slika 3.5).



Sl.3.5.



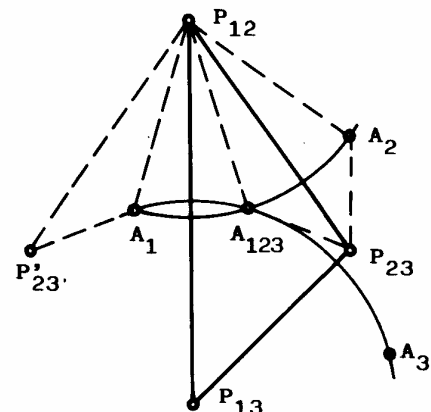
Sl.3.6.

U opštem slučaju, položaj pokretne ravni je definisan proizvoljnim tačkama  $C_j$  i  $D_j$ , gde je  $j=1,2,3$ . U preseku simetrala  $c_{jk}$  i  $d_{jk}$  ( $j \neq k, k=1,2,3$ ) nalaze se polovi  $P_{jk}$ . Relativni položaji pokretne ravni definisani su polovima  $P_{12}$ ,  $P_{13}$  i  $P_{23}$  koji čine trougao polova (slika 3.6). Postupak sinteze se nadalje provodi razmatranjem kretanja pokretne ravni u odnosu na trougao polova (slika 3.7).

Tačka koja se poklapa sa polom  $P_{23}$  pripada položaju 2 i 3 pokretne ravni. Položaj te tačke, kada se ravan nalazi u položaju 1, dobija se njenim okretanjem oko polova  $P_{12}$  i  $P_{13}$ , odnosno, preslikavanjem tačke  $P_{23}$  dobija se tačka  $P'_{23}$ ; tačke  $P_{23}$  i  $P'_{23}$  su simetrične u odnosu na osu 1. Ose (stranice trougla polova) nose oznaku ponovljenog indeksa temena.

Homologne tačke  $A_2$  i  $A_3$ , za proizvoljno odabranu zglobnu tačku  $A_1$ , dobijaju se preslikavanjem oko ose 1, a zatim oko ose 2, odn. ose 3. U preseku kružnica, čiji su centri temena trougla polova, nalazi se osnovna tačka  $A_{123}$ . Tačke  $A_1$  i  $A_2$  su homologne tačke, jer je:

$$\Delta P_{12} A_1 P'_{23} \cong \Delta P_{12} A_{123} P_{23} \cong \Delta P_{12} A_2 P_{23}, \quad (3.1) \quad \text{Sl.3.7.}$$



odnosno, ponovnim preslikavanjem tačke  $P'_{23}$  oko ose **1**, određen je položaj homologne tačke  $A_2$ . Na sličan način može se dokazati da je i tačka  $A_3$  homologna tačka.

Ugao  $\chi_{12} = \angle A_1 P_{12} A_2$  (slika 3.8) može se izraziti kao:

$$\chi_{12} = 2\gamma + 2\delta, \quad (3.2)$$

odakle sledi da je ugao:

$$\alpha_{12} = \gamma + \delta = \frac{\chi_{12}}{2}, \quad (3.3)$$

$$\text{odn. } \alpha_{jk} = \frac{\chi_{jk}}{2}. \quad (3.4)$$

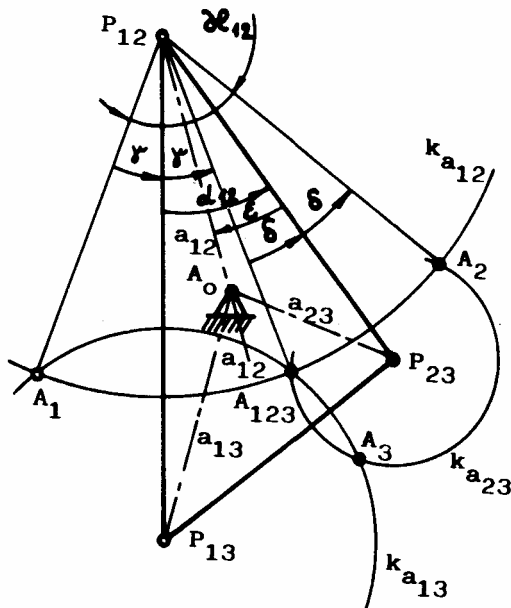
Ležišna tačka  $A_0$  nalazi se u preseku simetrala  $a_{jk}$ , koje su istovremeno i simetrale uglova  $\chi_{jk}$ , pa je:

$$\varepsilon = \frac{\chi_{12}}{2} - \delta = \gamma, \quad (3.5)$$

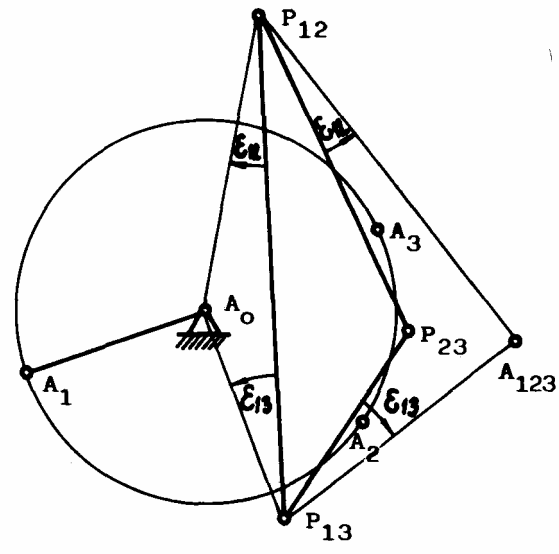
odnosno:

$$\varepsilon_{ik} = \gamma_{ik}. \quad (3.6)$$

Na slici 3.9 prikazan je postupak određivanja položaja tačke  $A_{123}$  i homolognih tačaka  $A_j$ , ako je zadata ležišna tačka  $A_0$ . Sprovedenjem istog postupka za tačku  $B_0$  dobija se traženi polužni četvorougao.



Sl.3.8.



Sl.3.9.

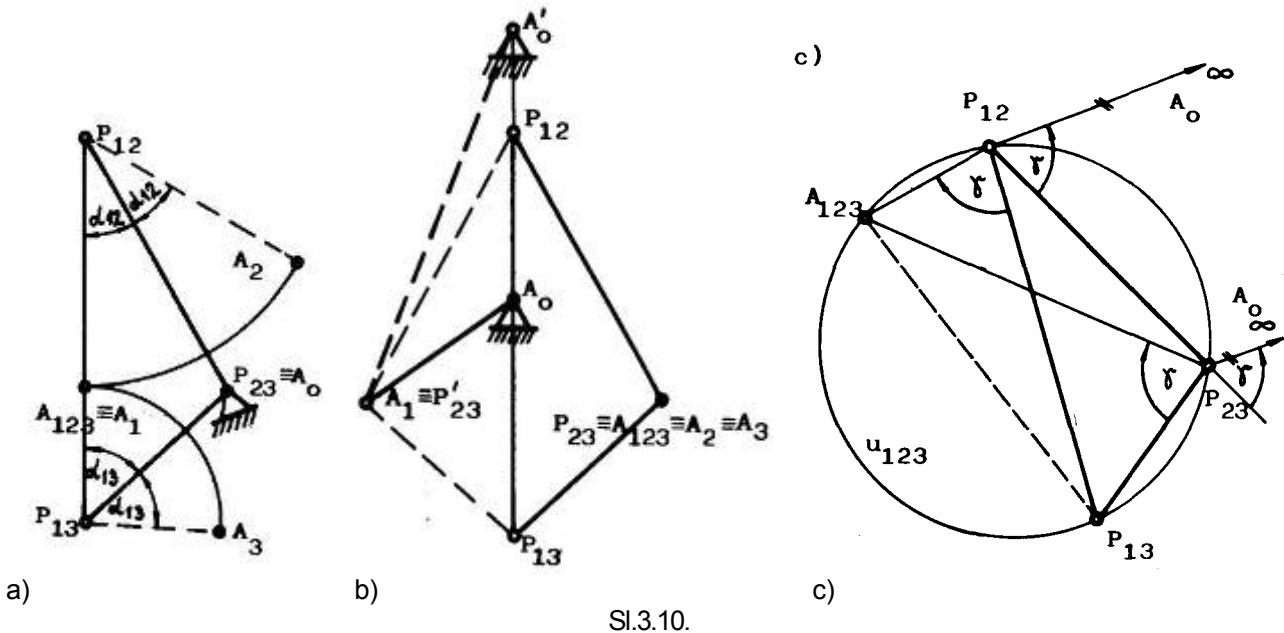
**Specijalni slučajevi** se javljaju izborom specifičnih položaja zglobne tačke  $A_0$ :

- $A_0 \equiv P_{jk}$ ; zbog  $\varepsilon_{jk} = 0$ , suprotna stranica trougla polova je geometrijsko mesto osnovne i jedne od homolognih tačaka (slika 3.10a);
- $A_0$  leži na stranici trougla polova; zbog  $\varepsilon_{jk} = 0$ , osnovna i dve homologne tačke (slika 3.10b) poklapaju se sa polom koji se ne nalazi na ovoj stranici;

c)  $A_0 \rightarrow \infty$ ; homologne tačke  $A_i$  leže na pravoj, a tačka  $A_{123}$  dobija se prethodno opisanim postupkom (prenošenjem ugla  $\varepsilon_{jk} = \gamma_{jk}$ ). Kako se duž  $\overline{A_{123}P_{13}}$  vidi pod istim uglom  $\gamma$  iz temenâ trougla  $P_{12}$  i  $P_{23}$ , to je geometrijsko mesto tačaka  $A_{123}$  kružnica opisana oko trougla polova  $u_{123}$  (slika 3.10c).

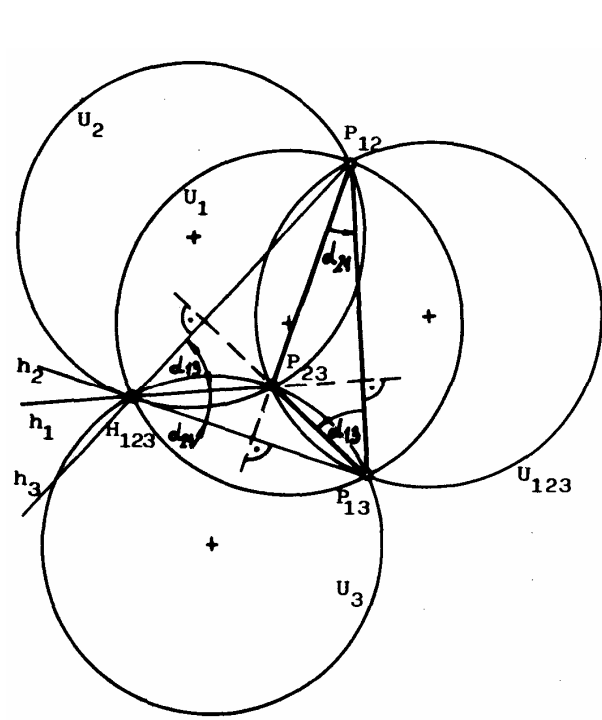
Geometrijska mesta homolognih tačaka ( $A_i$ ) su kružnice  $u_1$ ,  $u_2$  i  $u_3$ , dobijene preslikavanjem kružnice  $u_{123}$  u odnosu na odgovarajuće ose, kao što je prikazano na slici 3.11.

Preslikane kružnice se seku u tački  $H_{123}$ , koja je, istovremeno, presek visina trougla polova.

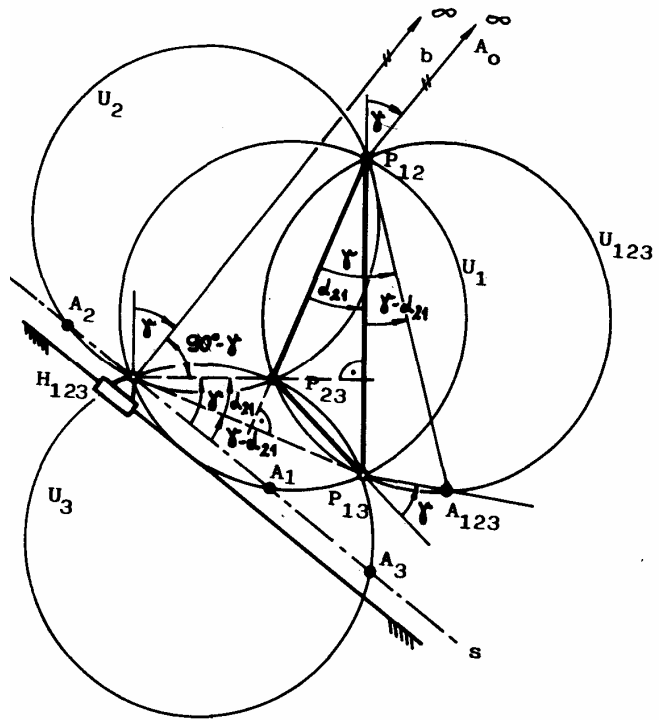


Sl.3.10.

Homologna tačka  $A_i$  dobija se preslikavanjem tačke  $A_{123}$  (slika 3.12). Zahvaćeni ugao između pravca "s" (postavljenog kroz tačke  $A_1$  i  $H_{123}$ ) i pravca povučenog kroz  $H_{123}$  paralelno sa "a" (pravac ležišne tačke  $A_0$ ) jednak je zbiru ugla  $\alpha_{21}$  ( $\angle P_{23}H_{123}P_{13}$ ), ugla  $\gamma - \alpha_{21}$  ( $\angle A_1H_{123}P_{13} = \angle P_{13}P_{12}A_{123}$ ) i ugla zahvaćenog između pravca "a" i visine  $h_1$  ( $90^\circ - \gamma$ ). Kako je zbir ovih uglova jednak  $90^\circ$ , sledi da prava "s" uvek prolazi kroz tačku  $H_{123}$ , pa se homologne tačke nalaze u preseku pravce "s", upravne na "a", i odgovarajućih kružnica  $u_i$ .



Sl.3.11.

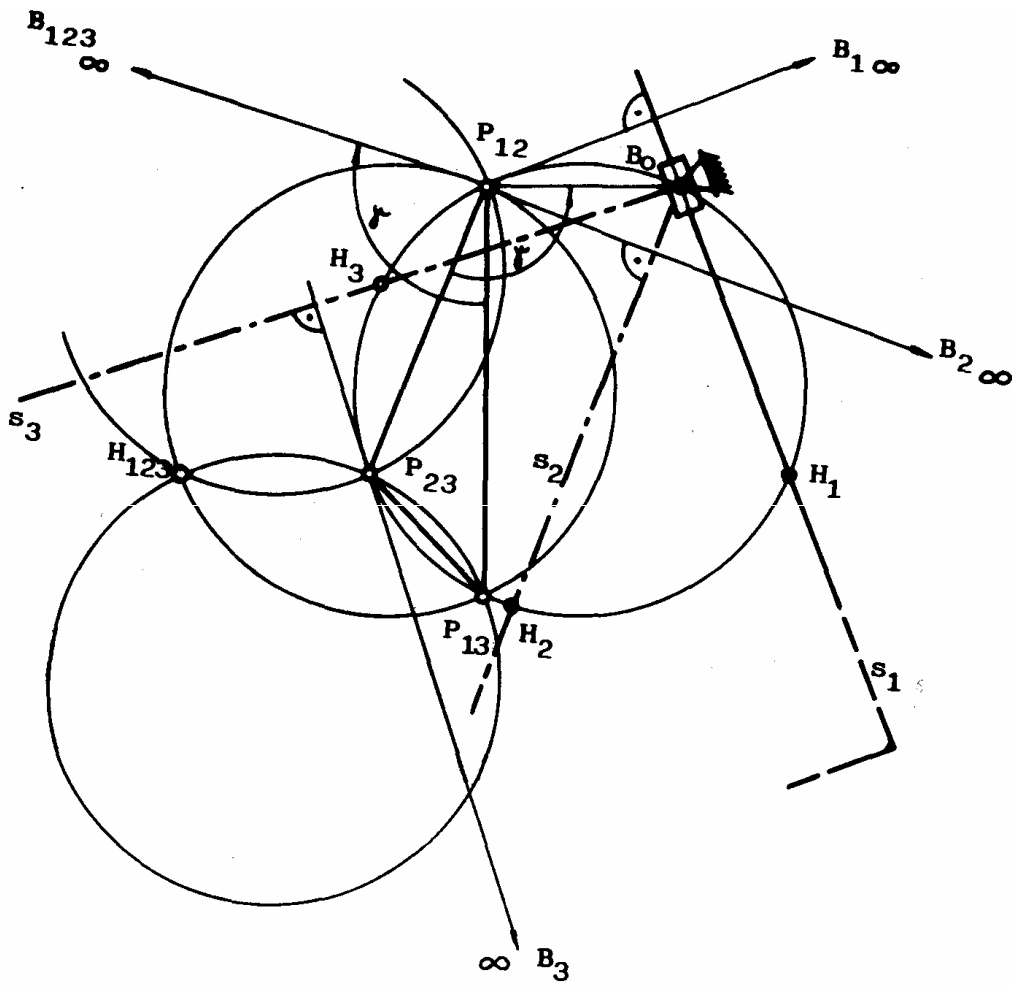


Sl.3.12.



- d) zglob  $B \rightarrow \infty$ ; homologne tačke  $B_j$ , kao i osnovna tačka  $B_{123}$ , (slika 3.13) leže u beskonačnosti. Tačka  $B_0$  se nalazi na kružnici opisanoj oko trougla polova. Pravci relativnog klizanja "s<sub>j</sub>" upravni su na pravce beskonačnosti homolognih tačaka.

Iz kinematske suprotnosti sa prethodnim slučajem sledi da se tačke  $H_j$  dobijaju preslikavanjem tačke  $H_{123}$  i da leže na krugu  $u_{123}$ . Pravci relativnog klizanja određeni su tačkama  $B_0$  i  $H_j$ .



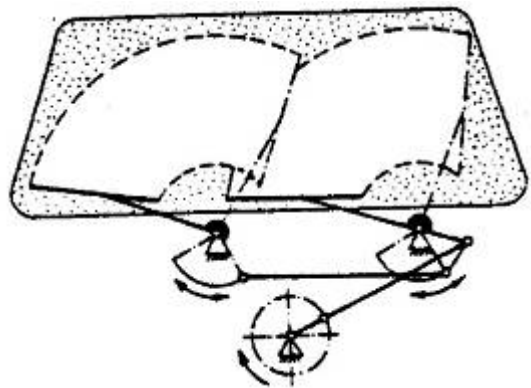
Sl.3.13.

### 3.2. Sinteza mehanizama za prenos

Sinteza mehanizama za prenos obuhvata metode sinteze mehanizama sa povratnim kretanjem, generatora funkcije, brzine i sl.

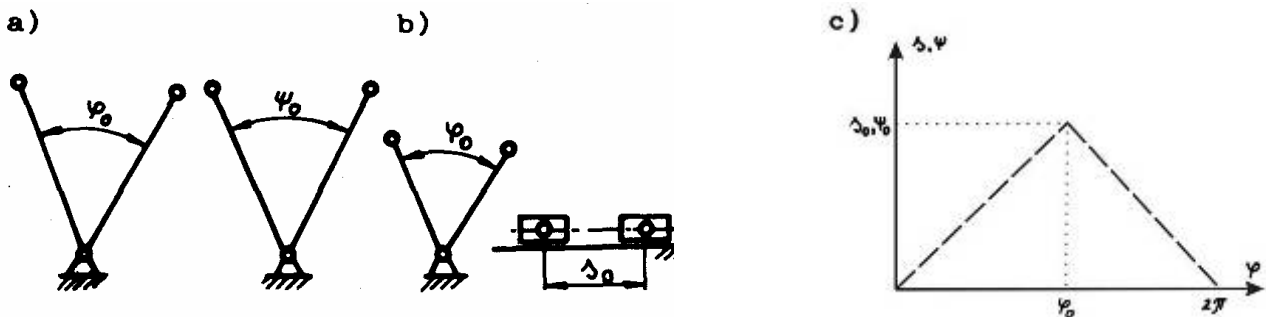
#### 3.2.1. Sinteza mehanizama sa povratnim kretanjem

Vodjeni član mehanizma često ima zadatak da, za jedan obrt pogonskog člana, realizuje zadato povratno kretanje (tabela 1.1.), kao što je to npr. slučaj kod mehanizma brisača vetrobranskog stakla automobila (slika 3.14).



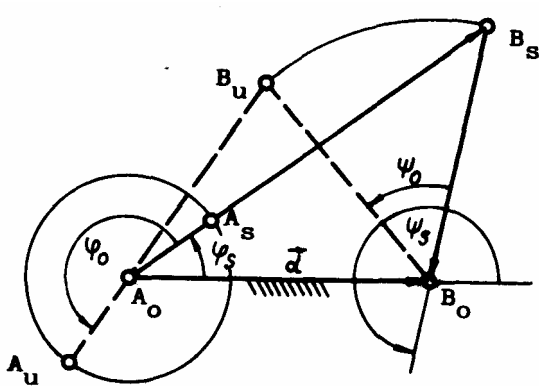
Sl.3.14.

Povratno kretanje vodjenog člana može biti rotaciono (**slika 3.15a**) ili translatorno (**slika 3.15b**). Prenosna funkcija  $\psi(\varphi)$ , odnosno  $s(\varphi)$ , treba u tom slučaju da zadovolji postavljene uslove samo u krajnjim položajima  $\psi_0(\varphi_0)$ , odnosno  $s_0(\varphi_0)$ , dok je preostali tok prenosne funkcije proizvoljan (**slika 3.15c**).



Sl.3.15.

Spoljašnji i unutrašnji mrtvi položaj jednokravnog mehanizma (**slika 3.16**) mogu se formulirati izrazima:



Sl.3.16.

$$(a+c) \cdot e^{i\varphi_s} + b \cdot e^{i\psi_s} = \bar{d} \quad (3.7)$$

$$(a-c) \cdot e^{i(\varphi_s+\varphi_0)} + b \cdot e^{i(\psi_s+\psi_0)} = \bar{d}.$$

Zadatkom sinteze najčešće se traže dimenzije mehanizma za zadato  $\varphi_0$  (hod krivaje između spoljašnjeg i unutrašnjeg mrtvog položaja mehanizma),  $\psi_0$  (hod balansijera) i  $\bar{d} = \mathbf{A}_0\mathbf{B}_0$ . Da bi iz jednačina (3.7) odredili  $a$ , a kasnije i  $(a+c)$ , eliminišimo najpre  $b$  i  $\psi_s$ , množenjem prve jednačine sa  $(-e^{i\psi_0})$  i sabiranjem sa drugom jednačinom, čime se dobija:

$$(a-c) \cdot e^{i(\varphi_s+\varphi_0)} - (a+c) \cdot e^{i(\varphi_s+\varphi_0)} = d \cdot (1 - e^{i\psi_0}). \quad (3.8)$$

Množenjem prethodne jednačine sa  $e^{-i(\varphi_s + \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\psi_0}{2})}$  dobija se jednačina:

$$(a-c) \cdot e^{i(\frac{\varphi_0 - \psi_0}{2})} - (a+c) \cdot e^{-i(\frac{\varphi_0 - \psi_0}{2})} = d \cdot e^{-i(\varphi_s + \frac{\varphi_0}{2})} \cdot \left( e^{-i\frac{\psi_0}{2}} - e^{i\frac{\psi_0}{2}} \right), \quad (3.9)$$

koja, u razvijenom obliku, glasi:

$$\begin{aligned} (a-c) \cdot \left[ \cos\left(\frac{\varphi_0 - \psi_0}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi_0 - \psi_0}{2}\right) \right] - (a+c) \cdot \left[ \cos\left(\frac{\varphi_0 - \psi_0}{2}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{\varphi_0 - \psi_0}{2}\right) \right] = \\ = -2i d \cdot \left[ \cos\left(\varphi_s + \frac{\varphi_0}{2}\right) - i \cdot \sin\left(\varphi_s + \frac{\varphi_0}{2}\right) \right] \cdot \sin\frac{\psi_0}{2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

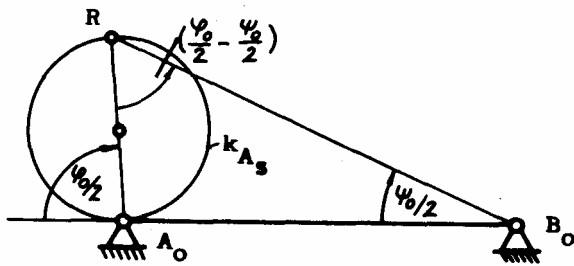
Iz prethodne jednačine, upoređivanjem imaginarnih delova leve i desne strane, sledi:

$$a = \frac{-d \cdot \sin\frac{\psi_0}{2}}{\sin\left(\frac{\varphi_0 - \psi_0}{2}\right)} \cdot \cos\left(\varphi_s + \frac{\varphi_0}{2}\right), \quad (3.11)$$

odnosno:

$$a = \frac{d \cdot \sin\frac{\psi_0}{2}}{\sin\left(\frac{\varphi_0 - \psi_0}{2}\right)} \cdot \cos\left(\pi - \varphi_s - \frac{\varphi_0}{2}\right). \quad (3.12)$$

Jednačina (3.12), kao geometrijsko mesto tačaka  $\mathbf{A}_s$ , predstavlja krug ( $\mathbf{k}_{A_s}$ ) prečnika:



Sl.3.17.

$$a = d \cdot \frac{\sin \frac{\psi_0}{2}}{\sin \left( \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\psi_0}{2} \right)}, \quad (3.13)$$

čiji je centar na kraku ugla  $\varphi = \pi - \frac{\varphi_0}{2}$ .

Grafička interpretacija jednačine (3.12) svodi se na pronalaženje tačke **R** kao presečne tačke kraka ugla  $\varphi = \pi - \varphi_0/2$  iz tačke **A<sub>0</sub>** i kraka ugla  $\psi_0/2$  iz tačke **B<sub>0</sub>** (slika 3.17).

Upoređenjem realnih delova leve i desne strane jednačine (3.10) dobija se:

$$c = \frac{d \cdot \sin \frac{\psi_0}{2}}{\sin \left( \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\psi_0}{2} \right)} \cdot \sin \left( \varphi_s + \frac{\varphi_0}{2} \right), \quad (3.14)$$

što, posle sabiranja sa jednačinom (3.11) i sređivanja, daje:

$$(a + c) = \frac{2d \cdot \sin \frac{\psi_0}{2}}{\sin(\varphi_0 - \psi_0)} \cdot \cos \left( \pi - \varphi_s - \varphi_0 + \frac{\psi_0}{2} \right). \quad (3.15)$$

Jednačina (3.15), kao geometrijsko mesto tačaka **B<sub>s</sub>**, je krug (**k<sub>Bs</sub>**) prečnika:

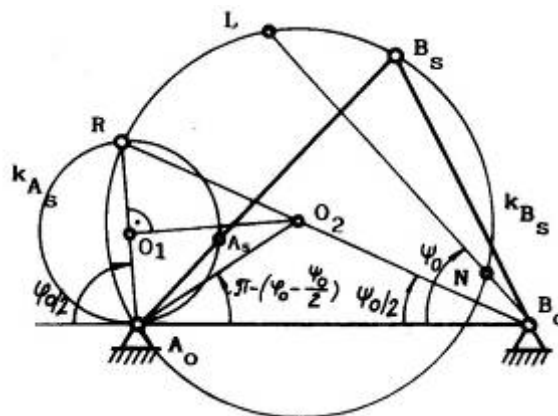
$$(a + c) = 2d \cdot \frac{\sin \frac{\psi_0}{2}}{\sin(\varphi_0 - \psi_0)} \quad (3.16)$$

čiji je centar u preseku prave koja prolazi kroz **A<sub>0</sub>** pod uglom:

$$\varphi = \pi - \left( \varphi_0 - \frac{\psi_0}{2} \right) \quad (3.17)$$

i prave koja prolazi kroz **B<sub>0</sub>** pod uglom  $\frac{\psi_0}{2}$ .

Grafička interpretacija se, u ovom slučaju, svodi na pronalaženje centra kruga **k<sub>Bs</sub>**, u preseku simetrale duži  $\overline{RA_0}$  i pravca  $\overline{RB_0}$  (slika 3.18).



Sl.3.18.

Postavljanjem pravca krivaje u spoljašnjem mrtvom položaju, pod željenim uglom  $\varphi_s$ , dobija se na krugu **k<sub>As</sub>** tačka **A<sub>s</sub>**, a na krugu **k<sub>Bs</sub>** tačka **B<sub>s</sub>**, čime određujemo i dimenzije mehanizma.

Napomenimo još, da se upotrebljiva rešenja za **B<sub>s</sub>** mogu dobiti samo u oblasti između tačaka **L** i **N**, odnosno izvan ugla  $\psi_0$ .

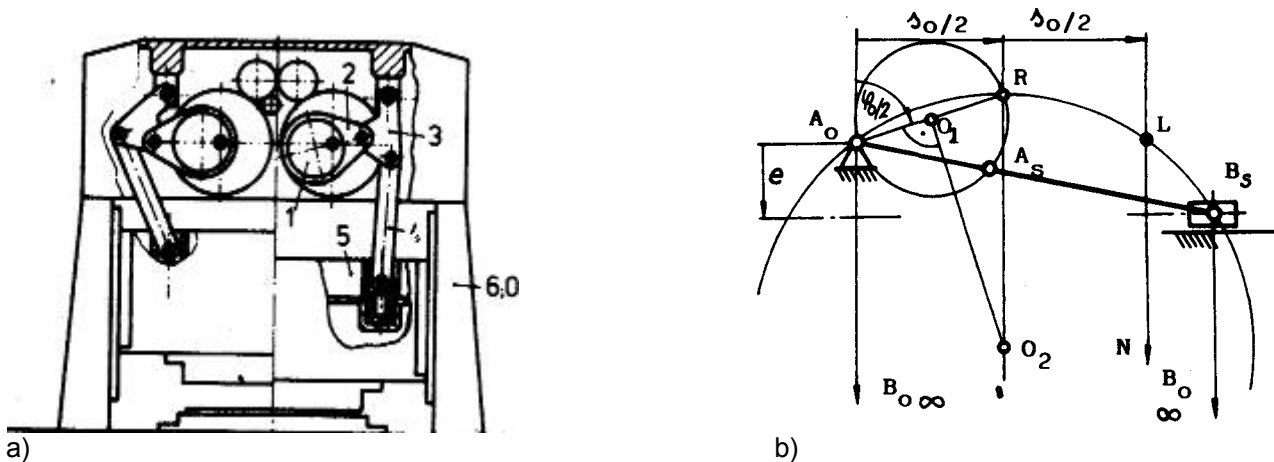
### Klipni mehanizam

Kod klipnog mehanizma (npr. mehaničke prese na **slici 3.19a**) je:

$$d \cdot \sin \frac{\psi_0}{2} = \frac{s_0}{2}, \quad (3.18)$$

pri čemu je  $\psi_0 = 0$ , a  $d \rightarrow \infty$ . Tačka **R**, shodno tome, nalazi se u preseku kraka ugla  $\varphi_0/2$  i pravca paralelnog pravcu postolja  $A_0B_0$  na rastojanju  $s_0/2$  od tačke  $A_0$  (**slika 3.18**).

Konstrukcija se nadalje ne razlikuje od sinteze poluznog četvorougla, s tim što je u ovom slučaju oblast upotrebljivih rešenja ograničena rastojanjem  $s_0$  od tačke  $A_0$ .



Sl.3.19.

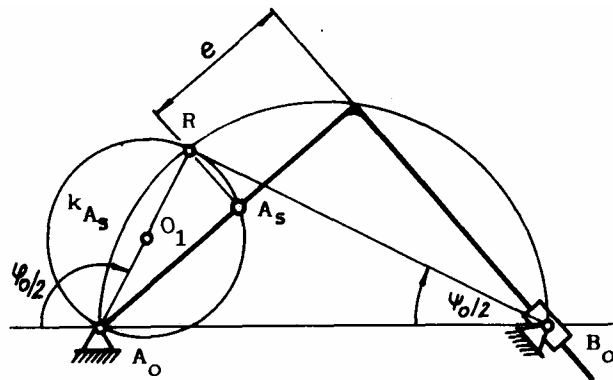
### Kulisni mehanizam.

Kod kulisnog mehanizma (centričnog i ekscentričnog) važi:

$$\varphi_0 - \psi_0 = \pi, \quad (3.19)$$

što znači da se centar kruga  $k_{B_s}$  nalazi u beskonačnosti (3.15). Dužina krivaje  $a$  definiše se kao i u prethodnim slučajevima, a ekscentričnost ( $e$ ) dobija se iz uslova da je u mrtvom položaju ugao između krivaje i pravca klizanja prav (**slika 3.20**).

Postavljanjem pravca krivaje u spoljašnjem mrtvom položaju, pod željenim uglom  $\varphi_s$ , dobija se u preseku sa krugom  $k_{A_s}$  tačka  $A_s$ , a u preseku sa krugom nad prečnikom  $A_0B_0$  ekscentričnost ( $e$ ).



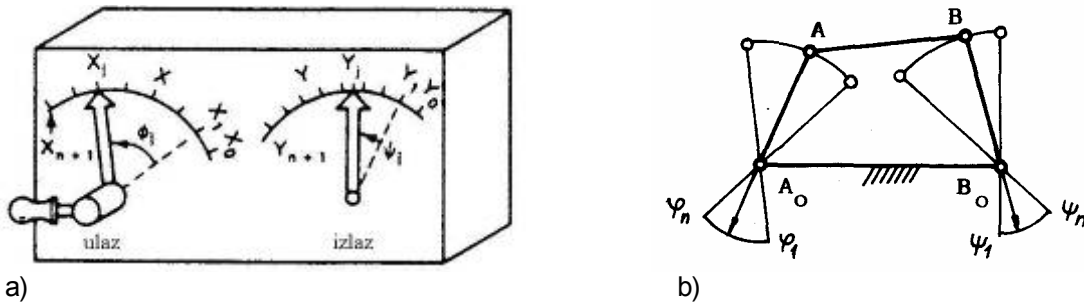
Sl.3.20.

### 3.2.2. Sinteza mehanizama kao generatora funkcije

Ukoliko mehanizam treba da realizuje zadatu funkcionalnu zavisnost pomeranja pogonskog i vodjenog člana mehanizma, u literaturi se naziva i **generatorom funkcije**. Jedan od tipičnih zadataka kinematske sinteze je sinteza mehanizama koji će obrtna i/ili translatorsna pomeranja pogonskog i vodjenog člana dovesti u korelaciju tako da pomeranje ulaznog člana bude srazmerno sa nezavisno promenljivom  $x$ , a vodjenog sa zavisno promenljivom  $y=f(x)$  u opsegu  $x_0 \leq x \leq x_{n+1}$  (**slika 3.21a**).

### Sinteza polužnog četvorougla kao generatora funkcije

Ukoliko i pogonski i vodjeni član izvode obrtno kretanje (slika 3.21a), mehanizam u "black box"-u treba da obezbedi da uglovi rotacije  $\phi$  i  $\psi$  budu linearno analogni sa  $x$  i  $y$  respektivno. Zadatu funkcionalnu zavisnost "black box"-a  $y=f(x)$ , u oblasti  $\varphi_1$  do  $\varphi_n$ , odnosno  $\psi_1$  do  $\psi_n$ , mogao bi da realizuje niz različitih mehanizama, uključujući i polužni četvorougao (slika 3.21b).



Sl.3.21.

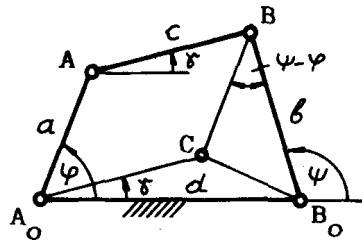
Sintezom se može dobiti polužni četvorougao kojim se realizuje prenosna funkcija koja je tačna u konačnom broju tačaka, a približna u oblastima između ovih tačaka (slika 3.1b).

Formiranjem paralelograma  $A_0ABC$  (slika 3.22) dobijaju se trouglovi  $\Delta A_0CB_0$  i  $\Delta CBB_0$  iz kojih se dobija:

$$\overline{CB_0} = c^2 + d^2 - 2c \cdot d \cdot \cos \gamma = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos(\psi - \varphi), \quad (3.20)$$

odakle je:

$$c \cdot \cos \gamma = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2a \cdot b \cdot \cos(\psi - \varphi)}{2d}. \quad (3.21)$$



Sl.3.22.

Iz uslova zatvorenosti kinematskog lanca sledi jednačina:

$$a \cdot \cos \varphi + c \cdot \cos \gamma - b \cdot \cos \psi = d \quad (3.22)$$

koja, zamenom vrednosti za  $c \cdot \cos \gamma$  (3.21) i deljenjem sa  $2ab$ , dobija oblik:

$$\frac{a^2 + b^2 + d^2 - c^2}{2a \cdot b} - \frac{d}{b} \cdot \cos \varphi + \frac{d}{a} \cdot \cos \psi = \cos(\psi - \varphi). \quad (3.23)$$

Uvođenjem smena:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{a^2 + b^2 + d^2 - c^2}{2a \cdot b}, \\ R_2 &= \frac{d}{b}, \\ R_3 &= \frac{d}{a}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

jednačina (3.23) dobija oblik:

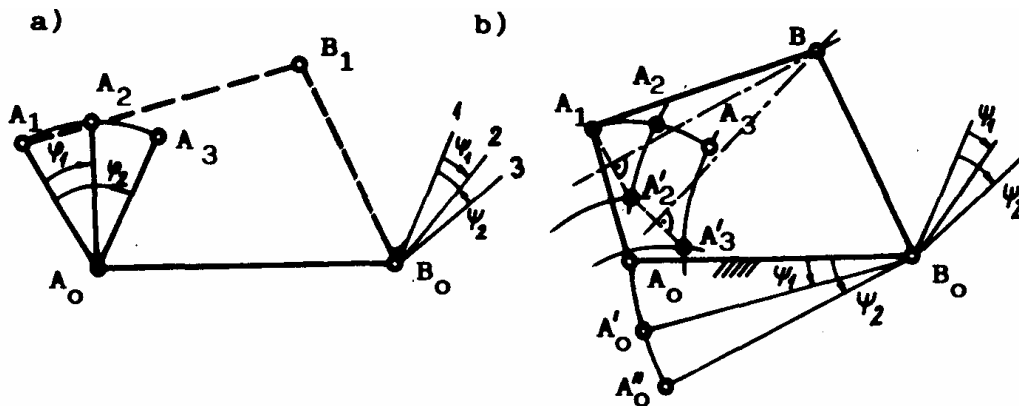
$$R_1 - R_2 \cdot \cos \varphi + R_3 \cdot \cos \psi = \cos(\psi - \varphi). \quad (3.25)$$

Primenom ove jednačine može se projektovati mehanizam koji ima tačnu funkciju u tri tačke. Zamenom korespondentnih parova uglova  $(\varphi_1, \psi_1)$ ,  $(\varphi_2, \psi_2)$  i  $(\varphi_3, \psi_3)$ , koji odgovaraju tačnim rešenjima, u prethodnoj jednačini, dobijamo tri simultane jednačine:

$$\begin{aligned}
 R_1 - R_2 \cdot \cos \varphi_1 + R_3 \cdot \cos \psi_1 &= \cos(\psi_1 - \varphi_1), \\
 R_1 - R_2 \cdot \cos \varphi_2 + R_3 \cdot \cos \psi_2 &= \cos(\psi_2 - \varphi_2), \\
 R_1 - R_2 \cdot \cos \varphi_3 + R_3 \cdot \cos \psi_3 &= \cos(\psi_3 - \varphi_3).
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

čija rešenja određuju traženi odnos dužina članova mehanizma. Za veću tačnost (4 i 5 tačaka) moguća su samo približna rešenja.

Mehanizam, kojim zadata tri relativna položaja pogonskog člana realizuju tri zadata položaja vodjenog člana, može se odrediti i grafičkom metodom. Neka su, pored uglova  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , koji definišu relativna pomeranja pogonskog člana, i  $\psi_1$  i  $\psi_2$ , koji definišu relativna pomeranja vodjenog člana, zadate i dužine pogonskog člana  $a = \overline{A_0A}$  i postolja  $d = \overline{A_0B_0}$  (slika 3.23.a). Odredimo dužine spojke  $c = \overline{AB}$  i vodjenog člana  $b = \overline{B_0B}$ . Grafički postupak, kojim se rešava ovaj zadatak, prikazan je na slici 3.23.b. Umesto balansirajera, zaokreće se postolja (d) oko tačke  $B_0$  (u suprotnom smeru) za ugao  $\psi_1$  odnosno  $\psi_2$  i određuju tačke  $A'_0$  i  $A''_0$ . Tačka  $A'_2$  dobija se u preseku luka poluprečnika  $a$ , opisanog oko tačke  $A'_0$ , i luka poluprečnika  $B_0A_2$ , opisanog oko tačke  $B_0$ . Na analogan način određuje se i tačka  $A'_3$ . U preseku simetrala duži  $\overline{A_1A'_2}$  i  $\overline{A'_2A'_3}$  nalazi se tačka  $B$ , čime je određena i dužina članova  $c = \overline{AB}$  i  $b = \overline{B_0B}$ .

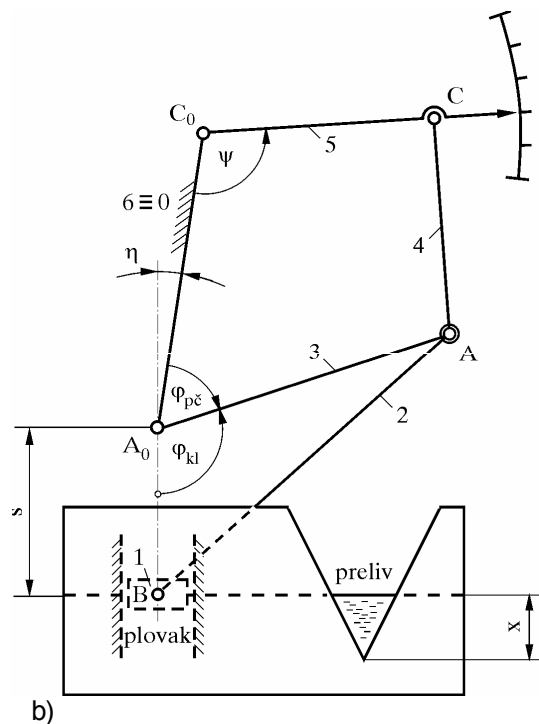
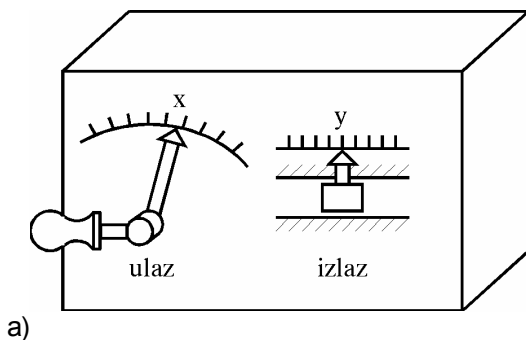


Sl.3.23.

### Sinteza klipnog mehanizma kao generatora funkcije

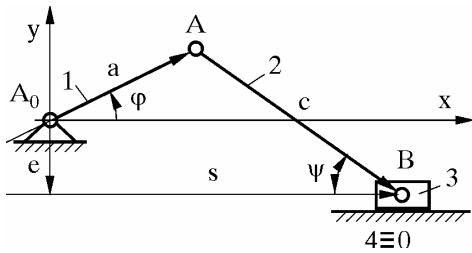
Na slici 3.24a prikazan je mehanički generator funkcije kod koga je rotacija krivajke linearno analogna jednoj promenljivoj ( $x$ ), a translatorno pomeranje drugog člana linearno analogno drugoj, funkcionalno zavisnoj promenljivoj ( $y$ ). Zadatu funkcionalnu zavisnost mogao bi da realizuje i klipni mehanizam.

Na slici 3.24b prikazan je šestočlani mehanizam indikatora protoka vode kroz preliv (generator funkcije), formiran rednom vezom klipnog mehanizma i polužnog četvorougla; ulazna koordinata je pomeranje plovka, uzrokovano promenom nivoa vode ( $x$ ).



Sl.3.24.

Sintezom se može dobiti klipni mehanizam kojim se generiše prenosna funkcija koja je tačna u 3 zadata položaja mehanizma  $(\varphi_1, s_1)$ ,  $(\varphi_2, s_2)$  i  $(\varphi_3, s_3)$ , a približna u oblastima između ovih tačaka. Vrednosti dužine krivaje, dužine spojke i ekscentriciteta klipnog mehanizma mogu se odrediti rešavanjem sistema od 3 jednačine koje formulišu zahtev da mehanizam tačno realizuje 3 zadata položaja:



Sl.3.25.

$$\begin{aligned} s_1 &= a \cdot \cos \varphi_1 + \sqrt{c^2 - (a \cdot \sin \varphi_1 + e)^2} \\ s_2 &= a \cdot \cos \varphi_2 + \sqrt{c^2 - (a \cdot \sin \varphi_2 + e)^2} \\ s_3 &= a \cdot \cos \varphi_3 + \sqrt{c^2 - (a \cdot \sin \varphi_3 + e)^2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Rešavanjem ovog sistema simultanih jednačina dobija se za dužinu krivaje izraz:

$$a = \frac{s_1^2 \cdot (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_3) + s_2^2 \cdot (\sin \varphi_3 - \sin \varphi_1) + s_3^2 \cdot (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)}{2[s_1 \cdot \cos \varphi_1 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_3) + s_2 \cdot \cos \varphi_2 (\sin \varphi_3 - \sin \varphi_1) + s_3 \cdot \cos \varphi_3 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)]}. \quad (3.28)$$

Zamenom dobijene vrednosti za dužinu krivaje u izrazu:

$$e = \frac{s_1^2 - s_2^2 - 2 \cdot a \cdot s_1 \cdot \cos \varphi_1 + 2 \cdot a \cdot s_2 \cdot \cos \varphi_2}{2 \cdot a \cdot (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} \quad (3.29)$$

dobija se vrednost ekscentriciteta, a zamenom obe ove vrednosti u izrazu:

$$c = \sqrt{a^2 + e^2 + s_1^2 - 2 \cdot a \cdot s_1 \cdot \cos \varphi_1 + 2 \cdot a \cdot e \cdot \sin \varphi_1} \quad (3.30)$$

i vrednost dužine spojke.

### Sinteza mehanizama za zadate brzine i ubrzanja

U okviru ovog zadatka sinteze razrađena je metoda za projektovanje poluznog četvorougla, čiji članovi u datom trenutku imaju tačno definisane brzine i ubrzanja.

Postavljanjem konturne jednačine poluznog četvorougla (slika 3.26) i formulisanjem njenih izvoda, dobija se sistem jednačina:

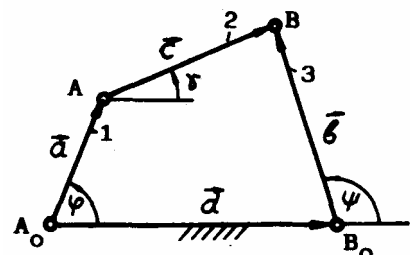
$$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{c} - \bar{b} &= \bar{d}, \\ \omega_{10} \cdot \bar{a} + \omega_{20} \cdot \bar{c} - \omega_{30} \cdot \bar{b} &= 0, \\ (i \cdot \varepsilon_{10} - \omega_{10}^2) \cdot \bar{a} + (i \cdot \varepsilon_{20} - \omega_{20}^2) \cdot \bar{c} - (i \cdot \varepsilon_{30} - \omega_{30}^2) \cdot \bar{b} &= 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

iz kojeg sledi:

$$\bar{a} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{d} & 1 & -1 \\ 0 & \omega_{20} & -\omega_{30} \\ 0 & (i \cdot \varepsilon_{20} - \omega_{20}^2) & -(i \cdot \varepsilon_{30} - \omega_{30}^2) \end{vmatrix}}{D} \quad (3.32)$$

gde je determinanta sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \omega_{10} & \omega_{20} & -\omega_{30} \\ (i \cdot \varepsilon_{10} - \omega_{10}^2) & (i \cdot \varepsilon_{20} - \omega_{20}^2) & -(i \cdot \varepsilon_{30} - \omega_{30}^2) \end{vmatrix}. \quad (3.33)$$



Sl.3.26.

Izračunavanjem jednačine (3.32) dobija se:

$$\bar{a} = \frac{\bar{d}}{D} \cdot (-\omega_{20} \cdot (i \cdot \varepsilon_{30} - \omega_{30}^2) + \omega_{30} \cdot (i \cdot \varepsilon_{20} - \omega_{20}^2)), \quad (3.34)$$

a iz sistema jednačina (3.31) sledi:

$$\bar{c} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \bar{d} & -1 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_{30} \\ (i \cdot \varepsilon_{10} - \omega_{10}^2) & 0 & -(i \cdot \varepsilon_{30} - \omega_{30}^2) \end{vmatrix}}{D}, \quad (3.35)$$

odnosno:

$$\bar{c} = \frac{\bar{d}}{D} \cdot (\omega_{10} \cdot (i \cdot \varepsilon_{30} - \omega_{30}^2) - \omega_{30} \cdot (i \cdot \varepsilon_{10} - \omega_{10}^2)), \quad (3.36)$$

kao i:

$$\bar{b} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \bar{d} \\ \omega_{10} & \omega_{20} & 0 \\ (i \cdot \varepsilon_{10} - \omega_{10}^2) & (i \cdot \varepsilon_{20} - \omega_{20}^2) & 0 \end{vmatrix}}{D}, \quad (3.37)$$

odnosno:

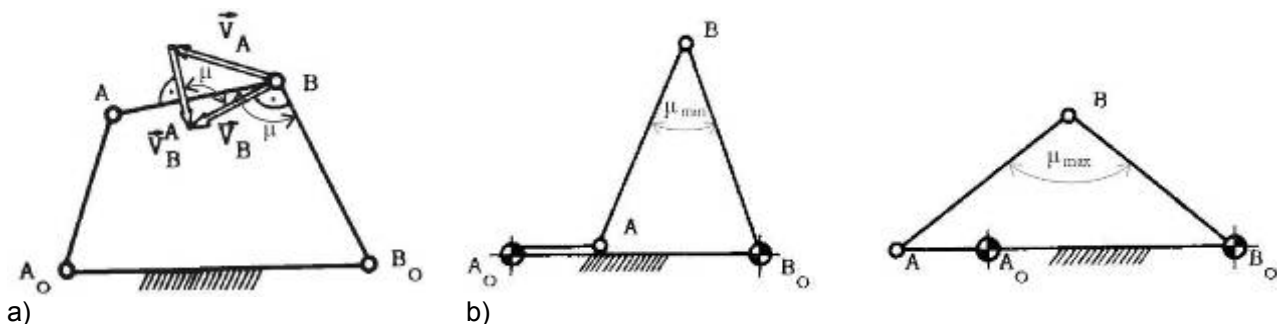
$$\bar{b} = \frac{\bar{d}}{D} \cdot (\omega_{10} \cdot (i \cdot \varepsilon_{20} - \omega_{20}^2) - \omega_{20} \cdot (i \cdot \varepsilon_{10} - \omega_{10}^2)). \quad (3.38)$$

Kako se dužine članova **a**, **b** i **c** mogu izraziti relativno (u odnosu na **d**), to se u svim prethodnim jednačinama može usvojiti jedinična vrednost faktora  $\bar{d}/D$ . Sređivanjem prethodnih jednačina konačno se dobija:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \omega_{20} \cdot \omega_{30} \cdot (\omega_{30} - \omega_{20}) + (\omega_{30} \cdot \varepsilon_{20} - \omega_{20} \cdot \varepsilon_{30}) \cdot i, \\ \bar{c} &= \omega_{10} \cdot \omega_{30} \cdot (\omega_{10} - \omega_{30}) + (\omega_{10} \cdot \varepsilon_{30} - \omega_{30} \cdot \varepsilon_{10}) \cdot i, \\ \bar{b} &= \omega_{10} \cdot \omega_{20} \cdot (\omega_{10} - \omega_{20}) + (\omega_{10} \cdot \varepsilon_{20} - \omega_{20} \cdot \varepsilon_{10}) \cdot i, \\ \bar{d} &= \bar{a} + \bar{c} - \bar{b}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

### 3.2.3. Ugao prenosa

Ugao koji grade apsolutna i relativna brzina zgloba koji povezuje vodjeni član sa spojkom (**slika 3.27a**), jednak uglu koji grade pravci ova dva člana ( $\mu$ ), naziva se **ugao prenosa**. Kod jednokravnog mehanizma, ovaj ugao dostiže najmanju vrednost u unutrašnjem postoljnom, a najveću u spoljašnjem postoljnom položaju (**slika 3.27b**). Ne bi trebalo koristiti opseg kretanja u kome je ugao prenosa manji od  $45^\circ$  pošto bi u tim položajima i neveliko trenje u zglobu moglo prouzrokovati blokiranje rada mehanizma. Najbolji prenos sila i/ili kretanja postiže se mehanizmom kod koga u celom opsegu kretanja ugao prenosa što manje odstupa od pravog ugla ( $90^\circ$ ). Zbog jednostavnosti analize, ugao prenosa je postao opšteprihvaćeni kriterijum (mera) kvaliteta rešenja dobijenih sintezom mehanizama za prenos.



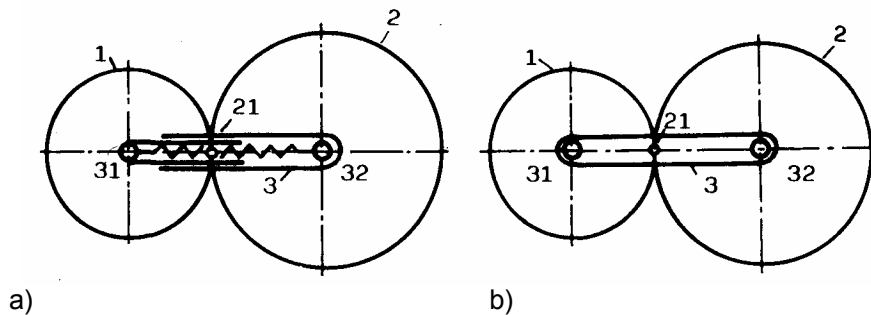
Sl.3.27.



#### 4. MEHANIZMI S KOTRLJANJEM

Pri razmatranju kinematičkih osnova konstatovali smo da se svako kretanje može predstaviti kotrljanjem bez klizanja pokretne po nepokretnoj ruleti. Isto tako, međusobnim kotrljanjem relativnih ruleta mogu se realizovati i različite prenosne funkcije. Na toj osnovi se zasniva funkcionisanje frikcionih i zupčastih prenosnika, koji se međusobno razlikuju jedino po karakteru veze:

- frikcionni prenosnici sadrže više kinematske parove sa dinamičkim vezama (**slika 4.1a**), a
- zupčasti prenosnici sadrže više kinematske parove sa geometrijskim ili kinematskim vezama (**slika 4.1b**).



Sl.4.1

Kako je primena zupčastih parova rasprostranjenija, nadalje ćemo govoriti o zupčastim parovima, iako se, uz ispunjenje dinamičkih uslova veze, neke od struktura mogu realizovati i frikcionim parovima.

U opštem slučaju, minimalni kinematski lanac sa zupčastim parom sastoji se od dva zupčanika (**1 i 2**) i poluge **3** (**slika 4.1b**). Zupčanik **1** se okreće oko pola **31**, a zupčanik **2** oko pola **32**. Zupčanici **1** i **2** se stalno dodiruju u polu **21** koji leži na podeonom krugu, a koji se u *Mašinskim elementima* naziva sprežna tačka.

U zavisnosti od izbora postolja (nepokretnog člana) razlikujemo tri osnovne vrste zupčastih prenosnika:

- zupčaste prenosnike sa nepokretnim osama - član **3** nepokretan,
- planetne zupčaste prenosnike - član **2** nepokretan,
- diferencijalne zupčaste prenosnike - pol **32** nepokretan.

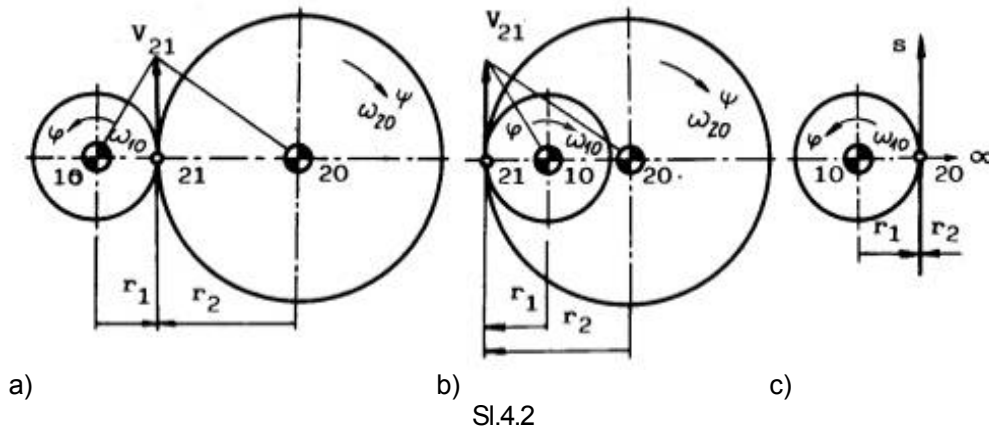
#### 4.1. Zupčasti prenosnici sa nepokretnim osama

Zupčasti prenosnici sa nepokretnim osama najčešće služe za realizaciju linearne prenosne funkcije, a ređe za realizaciju nelinearne, periodično promenljive prenosne funkcije.

U prvom slučaju zupčanici su kružnog oblika i okreću se oko centra kruga. U drugom slučaju zupčanici imaju promenljiv poluprečnik krivine ili se okreću oko tačke koja se ne poklapa sa centrom kruga.

Za realizaciju linearne prenosne funkcije koriste se cilindrični zupčanici sa spoljašnjim (slika 4.2a) ili unutrašnjim (slika 4.2b) ozubljenjem.

Mehanizmi sa zupčastom letvom predstavljaju specijalan slučaj, kod koga jedan od zupčanika ima beskonačno veliki poluprečnik (slika 4.2c).



Dodirna tačka zupčanika (21) je zajednička tačka zupčanika 1 i 2 pa je:

$$V_{21} = r_1 \cdot \omega_{10} = r_2 \cdot \omega_{20} \quad (4.1)$$

odakle sledi da je prenosni odnos:

$$i_{12} = \pm \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \pm \frac{r_2}{r_1} \quad (4.2)$$

Prenosni odnos ima negativan predznak kada je relativni trenutni pol 21 između polova 10 i 20 (kao i kod polunog četvorougla, na slici 2.30), odakle sledi da je kod prenosnika sa **spoljašnjim zupčanjem**:

$$i_{12} = -\frac{r_2}{r_1} \quad (4.3)$$

a kod prenosnika sa **unutrašnjim zupčanjem**:

$$i_{12} = +\frac{r_2}{r_1} \quad (4.4)$$

Kod prenosnika sa **zupčastom letvom** prenosni odnos se definiše kao odnos brzina (kao i na slici 2.32):

$$i_{12} = \frac{\omega_{10}}{V_2} = \frac{\omega_{10}}{r_1 \cdot \omega_{10}} = \frac{1}{r_1} \quad (4.5)$$

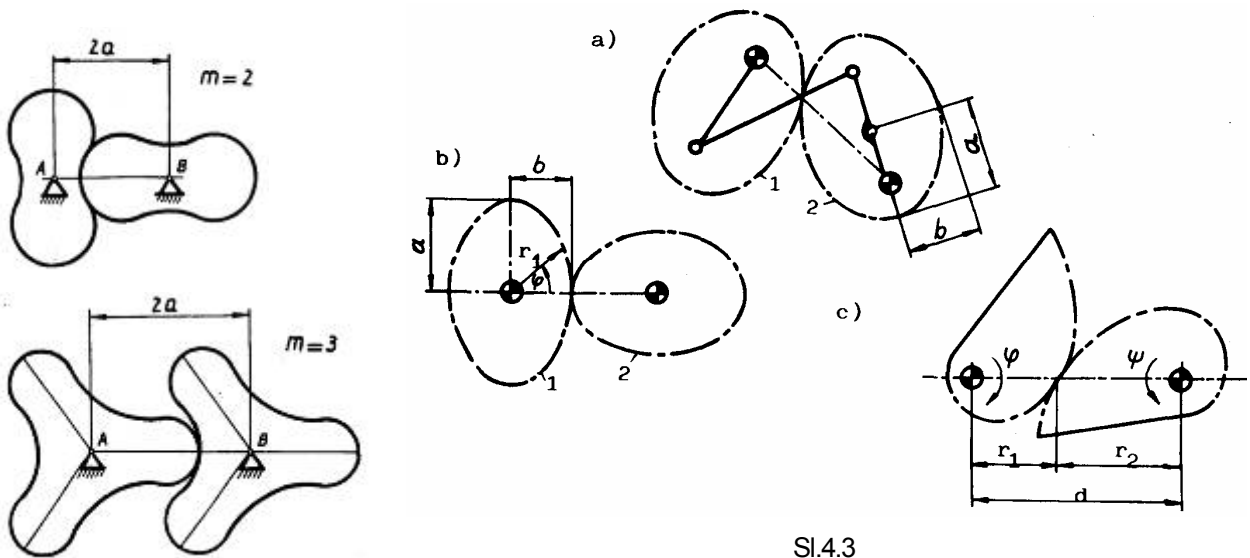
Uočimo još, da je prenosna funkcija nultoga reda linearna odn. da je prenosna funkcija prvoga reda konstantna:

$$\psi' = \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{i_{12}} = \text{const.} \quad (4.6)$$

Opšti obrazac za prenosni odnos  $i_{12} = r_2/r_1$  važi i u slučaju nelinearne prenosne funkcije. Veličine  $r_1$  i  $r_2$  su promenljive, zavise od položaja mehanizma i moraju zadovoljiti uslov:

$$r_1 + r_2 = \text{const.} \quad (4.7)$$

Uslov konstantnog osnog rastojanja ograničava i izbor mogućih oblika zupčanika na elipse, ovale, ekscentre i zatvorene krive jednake širine (slika 4.3).



Sl.4.3

Na **slici 4.3a** prikazan je **eliptični prenosnik**, kod koga su zupčanici **1** i **2** elipse čije su jednačine:

$$y = b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad (4.8)$$

a prenosna funkcija  $i_{12} = r_2/r_1$  odgovara prenosnoj funkciji ukrštenog dvokrivajnog mehanizma kod koga su dužine članova  $a=b$  i  $c=d$ .

Shema **ovalnog prenosnika** ( $m=1$ ) prikazana je na **slici 4.3b**. Zupčanici **1** i **2** su ovali čija je jednačina:

$$r = \frac{2b}{(1+b/a) + (1-b/a) \cdot \cos 2\varphi}. \quad (4.9)$$

Na **slici 4.3c** prikazan je par zupčastih segmenata kod koga prenosna funkcija zavisi od oblika konture. Poluprečnici  $r_1$  i  $r_2$  dobijaju se na osnovu zadate prenosne funkcije prvoga reda  $\psi'(\varphi)$ :

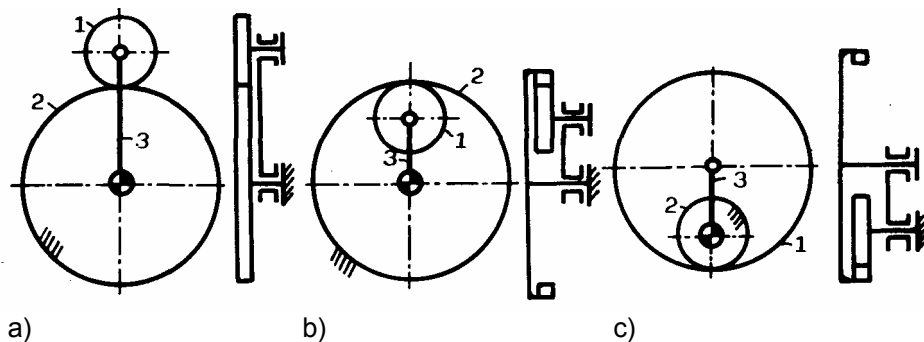
$$r_1 = \frac{d}{1 + 1/\psi'} = \frac{\psi' \cdot d}{\psi' + 1} \quad (4.10)$$

i

$$r_2 = \frac{d}{1 + \psi'}. \quad (4.11)$$

#### 4.2. Planetni prenosnici

Ukoliko je jedan od zupčanika nepokretan, zupčasti par prelazi u **planetni prenosnik**.



Sl.4.4

Planetni zupčasti prenosnik može biti sa spoljašnjim (**slika 4.4a**) i sa unutrašnjim zupčenjem. Kod planetnog prenosnika sa unutrašnjim zupčenjem razlikujemo dva slučaja:

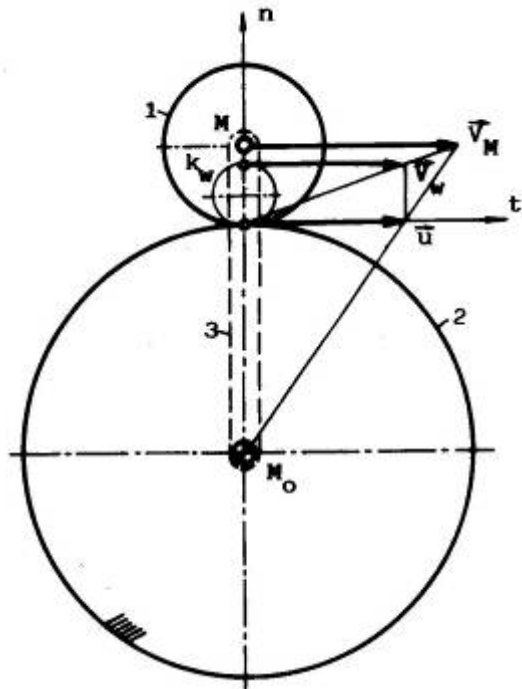
- poluprečnik nepokretnog zupčanika je veći od poluprečnika pokretnog zupčanika (**slika 4.4b**), i
- poluprečnik nepokretnog zupčanika je manji od poluprečnika pokretnog zupčanika (**slika 4.4c**).

### 4.2.1. Kinematika planetnih prenosnika

#### Planetni prenosnik sa spoljašnjim zupčenjem

Planetni prenosnik sa spoljašnjim zupčenjem (**slika 4.5**) sastoji se od centralnog, nepokretnog zupčanika (2), planetnog zupčanika (1) i krivaje (3). Planetni zupčanik (1) izvodi složeno kretanje - okreće se oko tačke **M** i zajedno sa krivajom oko tačke **M<sub>0</sub>**. Apsolutna ugaona brzina planetnog zupčanika  $\omega_{10}$  dobija se kao zbir prenosne ugaone brzine  $\omega_{30}$  i relativne ugaone brzine planetnog zupčanika u odnosu na krivaju  $\omega_{13}$ :

$$\omega_{10} = \omega_{30} + \omega_{13} \cdot \quad (4.12)$$



Sl.4.5.

Brzina tačke **M** je:

$$V_M = l_3 \cdot \omega_{30} = r_1 \cdot \omega_{10}, \quad (4.13)$$

gde je:

$$l_3 = r_1 + r_2 \quad (4.14)$$

dužina krivaje  $\overline{M_0M}$ . Iz jednačine (4.13) sledi:

$$\omega_{10} = \frac{l_3}{r_1} \cdot \omega_{30}, \quad (4.15)$$

što, unošenjem vrednosti za  $l_3$  iz jednačine (4.14), daje:

$$\omega_{10} = \omega_{30} \cdot \left( 1 + \frac{r_2}{r_1} \right). \quad (4.16)$$

Na osnovu ove jednačine i jednačine (4.2) konačno sledi:

$$i_{13} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{30}} = 1 + i_{12}. \quad (4.17)$$

Iz uslova jednakosti brzine prevojnog pola i brzine promene položaja trenutnog pola (2.95), a s obzirom da brzina promene položaja trenutnog pola odgovara brzini tačke na krivaji koja se poklapa s trenutnim polom

$$d_w \cdot \omega_{10} = r_2 \cdot \omega_{30}, \quad (4.18)$$

sledi da je prečnik prevojnog kruga:

$$d_w = \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} \cdot r_2. \quad (4.19)$$

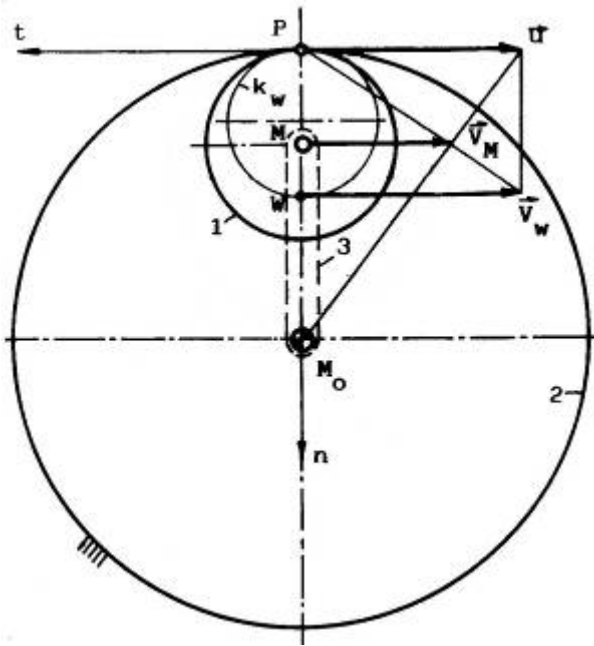
Unošenjem vrednosti iz jednačine (4.17) dobija se:

$$d_w = \frac{i_{12}}{i_{12} - 1} \cdot r_1, \quad (4.20)$$

odakle možemo zaključiti da je prečnik prevojnog kruga manji od poluprečnika planetnog zupčanika.

### Planetni prenosnik sa unutrašnjim zupčanjem i $r_2 > r_1$

Kod ovog prenosnika krivaja (3) se okreće oko tačke  $M_0$  i pokreće zupčanik (1). Zupčanik 1 se okreće oko tačke krivaje  $M$  i u zahvatu je sa unutrašnje ozubljenim, nepokretnim zupčanicom 2 (slika 4.6).



Sl.4.6

Ugaona brzina planetnog zupčanika je:

$$\omega_{10} = \omega_{30} - \omega_{13}. \quad (4.21)$$

Brzina tačke  $M$  je:

$$V_M = l_3 \cdot \omega_{30} = r_1 \cdot \omega_{10}, \quad (4.22)$$

gde je  $l_3 = r_2 - r_1$ , na osnovu čega sledi:

$$\omega_{10} = \left( \frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \cdot \omega_{30}, \quad (4.23)$$

odnosno:

$$i_{13} = -\frac{\omega_{10}}{\omega_{30}} = 1 - i_{12}. \quad (4.24)$$

Iz uslova jednakosti brzine prevojnog pola i brzine promene položaja trenutnog pola (2.95):

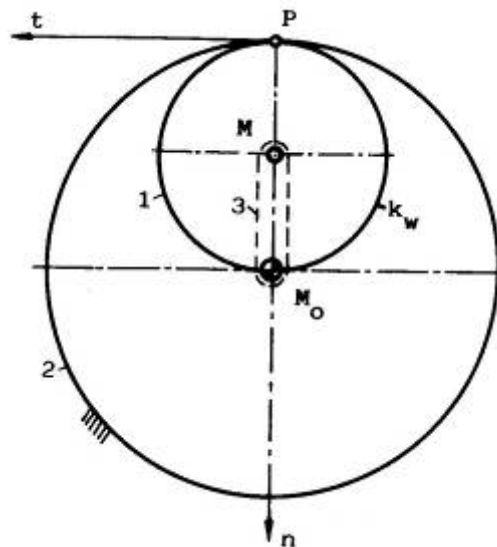
$$d_w \cdot \omega_{10} = r_2 \cdot \omega_{30}, \quad (4.25)$$

sledi da je prečnik prevojnog kruga:

$$d_w = \frac{i_{12}}{i_{12} - 1} \cdot r_1. \quad (4.26)$$

Kako je u ovom slučaju  $i_{12} > 0$ , to je prečnik prevojnog kruga veći od poluprečnika planetnog zupčanika.

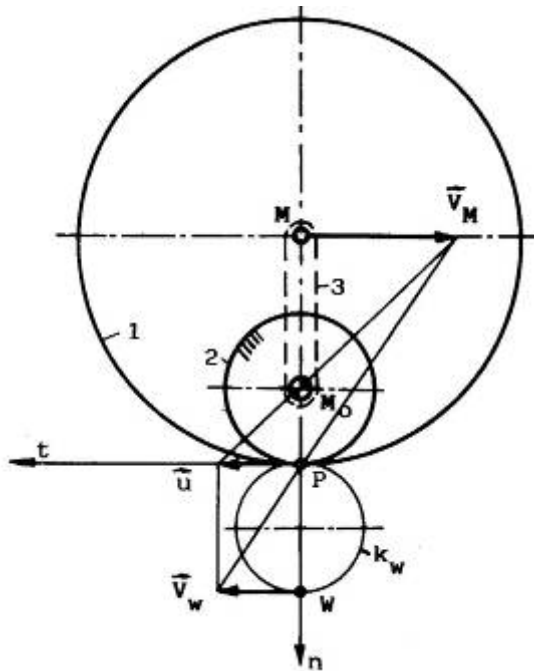
Za specijalni slučaj  $r_2 = 2r_1$  (slika 4.7), prenosni odnos je  $i_{12} = 2$ , a prečnik prevojnog kruga je  $d_w = 2r_1$ .



Sl.4.7

### Planetni prenosnik sa unutrašnjim zupčanjem i $r_1 > r_2$

I u ovom slučaju se krivaja (3) okreće oko tačke  $M_0$  i pokreće zupčanik 1 (slika 4.8). Planetni zupčanik, sa unutrašnjim ozubljenjem, okreće se oko tačke krivaje  $M$  i u zahvatu je sa spoljašnje ozubljenim centralnim, nepokretnim zupčanikom (2).



Sl.4.8.

Ugaona brzina planetnog zupčanika je:

$$\omega_{10} = \omega_{30} + \omega_{13}. \quad (4.27)$$

Brzina tačke  $M$  je:

$$V_M = l_3 \cdot \omega_{30} = r_1 \cdot \omega_{10}, \quad (4.28)$$

gde je dužina krivaje  $l_3 = r_1 - r_2$ , na osnovu čega sledi ugaona brzina:

$$\omega_{10} = \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) \cdot \omega_{30}, \quad (4.29)$$

odnosno, prenosni odnos:

$$i_{13} = (1 - i_{12}). \quad (4.30)$$

Iz uslova jednakosti brzine prevojnog pola i brzine promene položaja trenutnog pola (2.95):

$$d_w \cdot \omega_{10} = r_2 \cdot \omega_{30}, \quad (4.31)$$

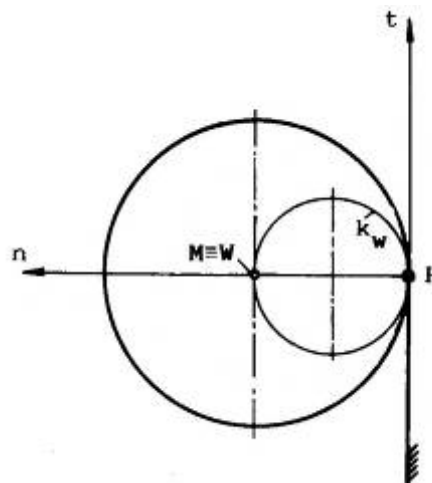
sledi da je prečnik prevojnog kruga:

$$d_w = \frac{i_{12}}{1 - i_{12}} \cdot r_1 = \frac{1}{1 - i_{12}} \cdot r_2. \quad (4.32)$$

Ovaj izraz se ne razlikuje od izraza (4.26) ukoliko bi se vrednost za  $r_1$  usvojila s negativnim predznakom.

Kako je  $0 < i_{12} < 1$ , sledi da je prečnik prevojnog kruga veći od poluprečnika nepokretnog zupčanika.

**Specijalni slučaj.** Kotrljanje kruga po pravoj (zupčanika po zupčastoj letvi) predstavlja specijalni slučaj planetnog prenosnika sa beskonačno velikim prečnikom centralnog zupčanika (slika 4.9).



Sl.4.9.

Brzina tačke  $M$ , u ovom slučaju, jednaka je brzini promene položaja trenutnog pola, iz čega zaključujemo da se tačka  $M$  poklapa sa prevojnim polom  $W$ , odnosno, da je  $r_1 = d_w$ .

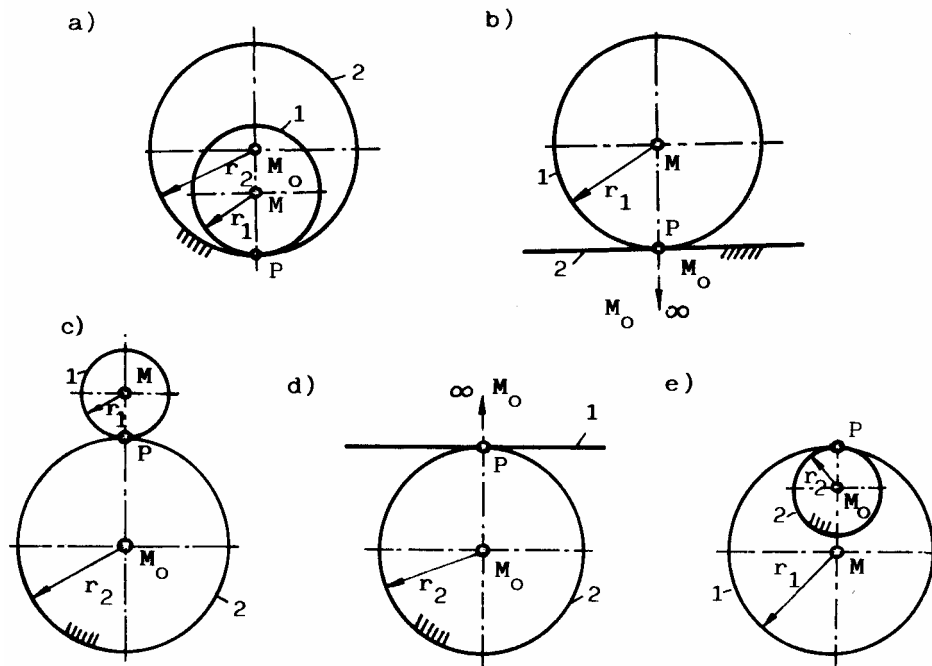
#### 4.2.2. Putanje tačaka planetnog točka

Pri kotrljanju kruga po krugu, tačke pokretnog kruga opisuju trohoide.

Na **slici 4.10.** prikazane su moguće varijante kotrljanja kruga po krugu kao i dva specijalna slučaja kod kojih poluprečnici  $r_1$  odn.  $r_2$  postaju beskonačno veliki, a odgovarajući krugovi - prave.

U zavisnosti od varijante kotrljanja, tačke pokretnog kruga opisivajuće:

- hipotrohoide - krug se kotrlja po unutrašnjoj strani nepokretnog kruga,
- ortotrohoide - krug se kotrlja po nepokretnoj pravoj,
- epitrohoide - krug se kotrlja po spoljašnjoj strani nepokretnog kruga,
- evolvente - prava se kotrlja po nepokretnom krugu,
- pericikloide - krug se svojom unutrašnjom stranom kotrlja po spoljašnjoj strani nepokretnog kruga.

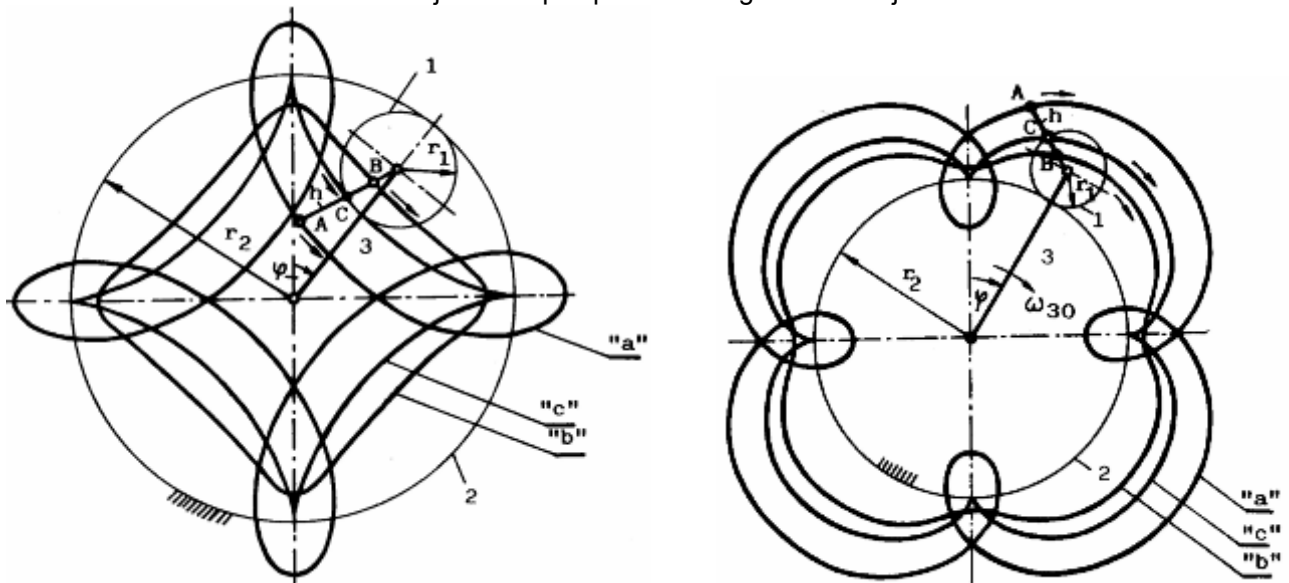


Sl.4.10.

Ako sa  $h$  obeležimo rastojanje tačke od centra pokretnog kruga (**slika 4.11**), onda je, u zavisnosti od veličine tog rastojanja:

- za  $h > r_1$  trohoida produžena i opisuje petlju,
- za  $h < r_1$  trohoida skraćena i opisuje putanju sa prevojnima tačkama,
- za  $h = r_1$  trohoide imaju "špic" i dobijaju naziv cikloide (hipo-, epi-, orto- i pericikloide).

Trohoide će biti zatvorene krive ako je odnos poluprečnika krugova ceo broj.



Sl.4.11.

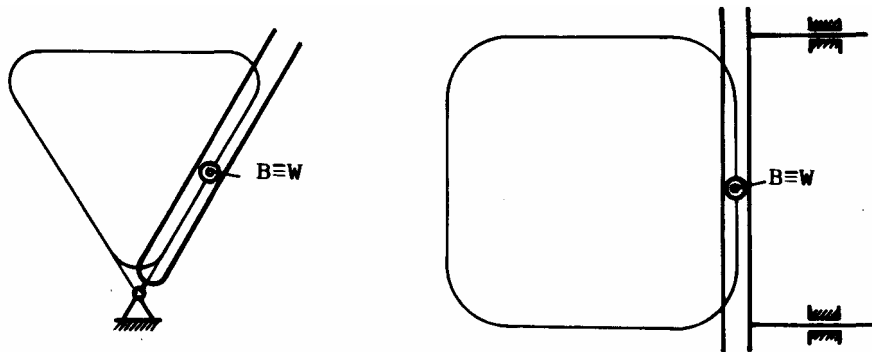
Od posebnog interesa je putanja *Ball*-ove tačke (odjeljak 2.7.1.). Za stacionarnu vrednost prečnika prevojnog kruga ( $d_w = \text{const.}$ ), kao što je to slučaj kod planetnih prenosnika, *Ball*-ova tačka se poklapa sa prevojnim polom ( $B \equiv W$ ). U zavisnosti od odnosa poluprečnika krugova, *Ball*-ova tačka opisuje trougao, četvorougao, petougao itd., sa zaobljenim uglovima.

Za opisani specijalni slučaj kotrljanja kruga po unutrašnjoj strani nepokretnog kruga, kod koga je  $r_2 = 2r_1$  (**slika 4.7**), sve tačke na pokretnom krugu postaju *Ball*-ove tačke, a putanje svih tačaka na pokretnom krugu su prave linije.

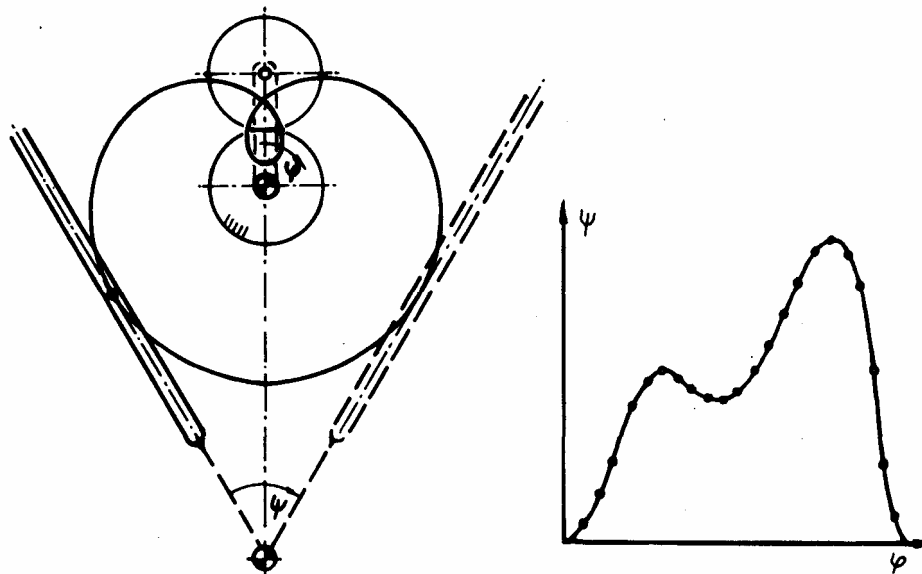
Putanja *Ball*-ove tačke se može koristiti za konstrukciju mehanizama sa periodima mirovanja (**slika 4.12**).

Na ovaj način se mogu koristiti i druge putanje tačaka pokretnog kruga. Na slici **4.13**. prikazano je korišćenje produžene trohoide, dobijene kotrljanjem pokretnog kruga po spoljašnjoj strani nepokretnog kruga istog prečnika, za realizaciju progresivne prenosne funkcije sa regresivnim delom (**tabela 1.1**).

Napomenimo da se epicikloida, opisana tačkom na obimu pokretnog kruga ( $h=r_1$ ) koji se kotrlja po spoljašnjoj strani nepokretnog kruga, u ovom slučaju naziva **kardioida**.



Sl.4.12.



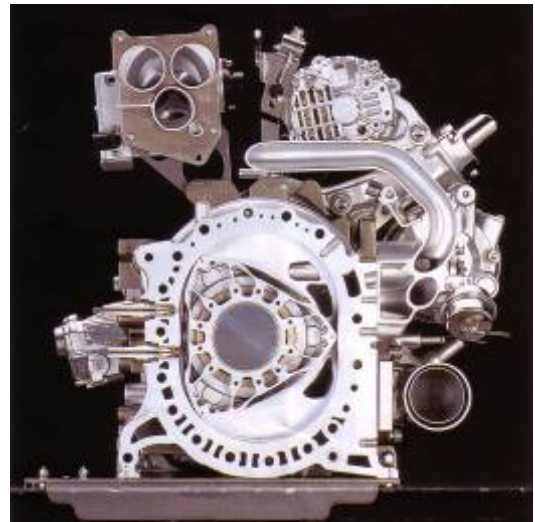
Sl.4.13.

Kako je ranije pokazano (odjeljak 2.8.), putanja neke tačke spojke polužnog četvorougla može se realizovati pomoću tri različita polužna četvorougla. Na sličan način može se dokazati da se trohoide mogu realizovati pomoću dva različita planetna para.

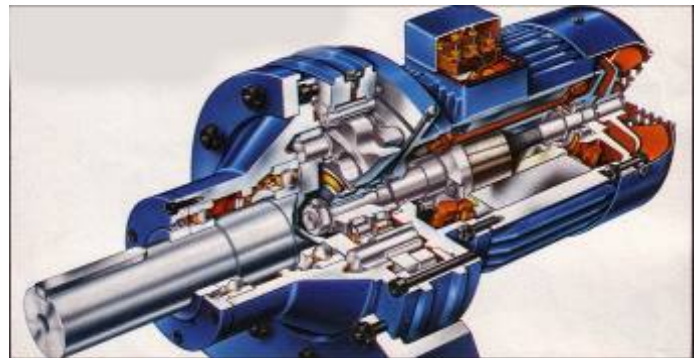
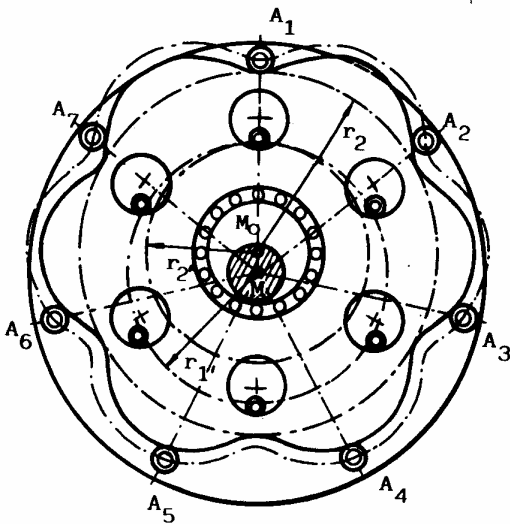
Na bazi dvostruke realizacije putanja tačaka planetnog zupčanika razvijeni su i:

- *Wankel*-ov motor SUS (**slika 4.14**) koji se danas ugrađuje npr. u Mazdu RX-8 i
- *Cyclo*- (ciklo) prenosnici (**slika 4.15**) koje karakteriše vrlo visok prenosni odnos ( $i=1:85$ ), stepen korisnog dejstva do  $\eta=0,98$  i prenos snage u rasponu  $P=0,12-110$  kW.





Sl.4.14

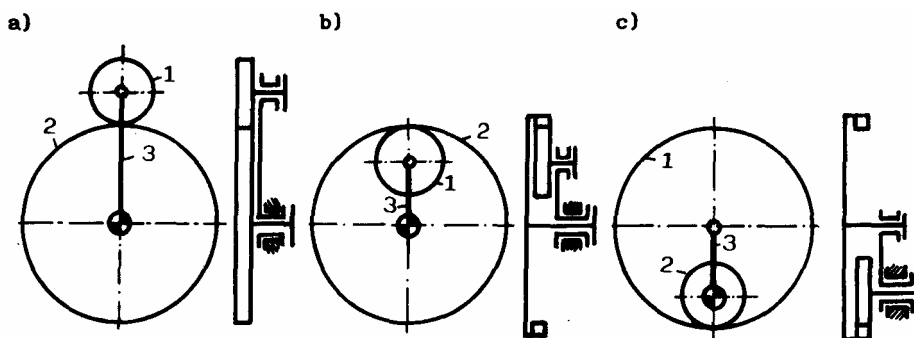


Sl.4.15

### 4.3. Diferencijalni prenosnici

Zupčasti par, kod koga je osim poluge (3) i zupčanika 1, za razliku od planetnog para, pokretan i zupčanik 2, ima  $F=2$  stepena slobode kretanja i naziva se diferencijalni prenosnik. Slično planetnim prenosnicima, i kod ovih prenosnika se mogu razlikovati tri osnovna tipa (slika 4.20):

- sa spoljašnjim zupčenjem,
- sa unutrašnjim zupčenjem i  $r_2 > r_1$ ,
- sa unutrašnjim zupčenjem i  $r_1 > r_2$ .



Sl.4.16

#### 4.4.1. Jednostepeni diferencijalni prenosnici

Složeno kretanje zupčanika **1** definisano je funkcijom:

$$\varphi_1 = f(\varphi_2, \varphi_3). \quad (4.33)$$

Ugaona brzina  $\omega_{10}$  dobija se diferenciranjem funkcije  $\varphi_1$  po vremenu (t):

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{d\varphi_1}{d\varphi_3} \cdot \frac{d\varphi_3}{dt}. \quad (4.34)$$

Pošto su ugaone brzine članova **2** i **3**:

$$\omega_{20} = \frac{d\varphi_2}{dt} \quad \text{i} \quad \omega_{30} = \frac{d\varphi_3}{dt}, \quad (4.35)$$

a prenosni odnos članova **1** i **2**, kada član **3** miruje:

$$i_{12}^{(3)} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_2}, \quad (4.36)$$

i prenosni odnos članova **1** i **3**, kada član **2** miruje:

$$i_{13}^{(2)} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_3}, \quad (4.37)$$

uvođenjem relacija (4.35), (4.36) i (4.37) u jednačinu (4.34) dobija se:

$$\omega_{10} = i_{12}^{(3)} \cdot \omega_{20} + i_{13}^{(2)} \cdot \omega_{30} \quad (4.38)$$

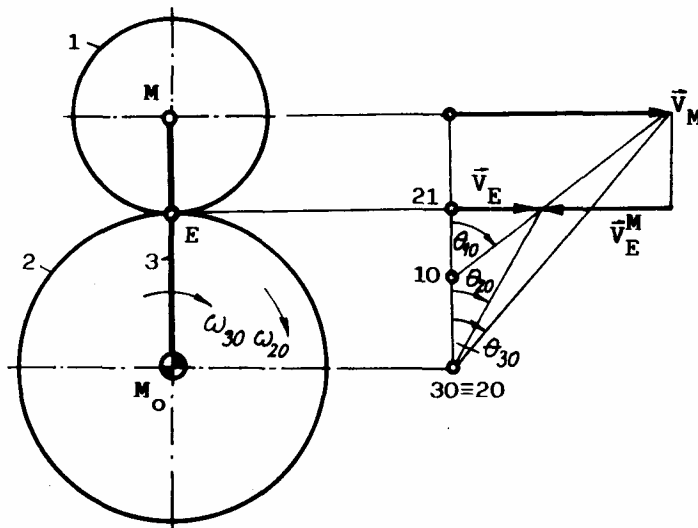
odakle se smenom  $i_{13} = 1 - i_{12}$  dobija:

$$\omega_{10} = i_{12}^{(3)} \cdot \omega_{20} + (1 - i_{12}^{(3)}) \cdot \omega_{30}, \quad (4.39)$$

odnosno:

$$i_{12} = \frac{\omega_{10} - \omega_{30}}{\omega_{20} - \omega_{30}}. \quad (4.40)$$

Do ove jednačine se može doći i preko plana brzina (**slika 4.17**).



Sl.4.17.

Ako je poznata ugaona brzina  $\omega_{30}$ , brzina tačke **M** je:

$$V_M = l_3 \cdot \omega_{30} = (r_1 + r_2) \cdot \omega_{30}. \quad (4.41)$$

Brzina tačke **E**, koja predstavlja zajedničku tačku zupčanika **2** i **1**, može se izračunati pomoću ugaone brzine člana **2**:

$$V_E = r_2 \cdot \omega_{20}, \quad (4.42)$$

i preko ugaone brzine zupčanika **1**:

$$V_E = V_M - V_E^M, \quad (4.43)$$

gde je:

$$V_E^M = r_1 \cdot \omega_{10}. \quad (4.44)$$

Izjednačavanjem vrednosti za  $V_E$  u jednačinama (4.42) i (4.43) i unošenjem vrednosti  $V_E^M$  iz jednačine (4.44) dobija se:

$$r_2 \cdot \omega_{20} = (r_1 + r_2) \cdot \omega_{30} - r_1 \cdot \omega_{10}, \quad (4.45)$$

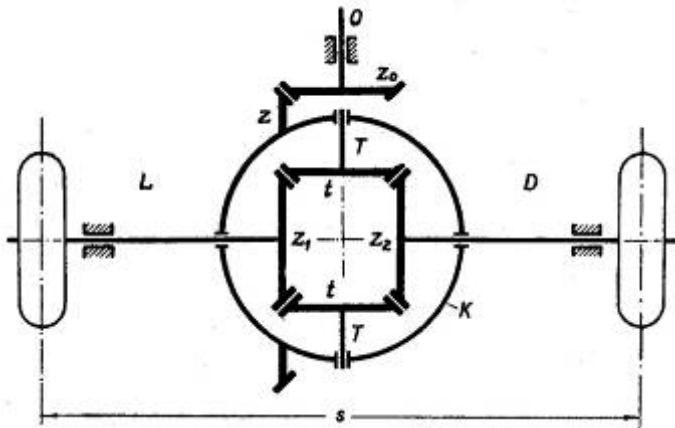
odnosno, posle deljenja jednačine (4.45) sa  $r_1$ :

$$\omega_{10} = (1 - i_{12}) \cdot \omega_{30} + i_{12} \cdot \omega_{20}, \quad (4.46)$$

odakle sledi jednačina (4.40).

Ova jednačina važi za sve tipove diferencijalnih prenosnika, a njihove razlike se izražavaju predznakom ( $\pm$ ) vrednosti  $i_{12}$  i  $i_{13}$ .

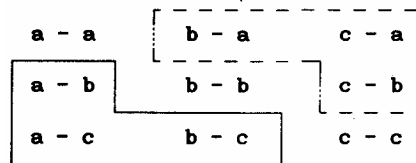
Diferencijalni prenosnik se koristi i kod automobila (**slika 4.18**). Postavljen je na zadnjoj osovini i služi da omogući da se zadnji točkovi mogu da obrću različitim brzinama u krivini (spoljašnji točak se obrće brže od unutrašnjeg). Zadnja osovina je stoga izvedena kao dve poluosovine koje ulaze u kutiju "diferencijala" (K), koja ima ulogu krivajave, i mogu se slobodno obrtati u njoj. Motor pokreće pogonsko (kardansko) vratilo (O) na čijem kraju se nalazi prenosni zupčanik ( $z_0$ ) koji je spregnut s tanjirastim zupčanikom (z) na kutiji "diferencijala" i obrće se zajedno s njom. U kutiji se, na njenom obodu, nalaze dve krstaste osovinice (T) na kojima su nasadjeni mali konični zupčanici, tzv. trkači ili sateliti (t). Oni se slobodno obrću na osovinicama, a mogu se sprežiti i sa koničnim zupčanicima na poluosovinama. Osa krstastih osovinica je upravna na osu poluosovina zadnjih točkova.



Sl.4.18.

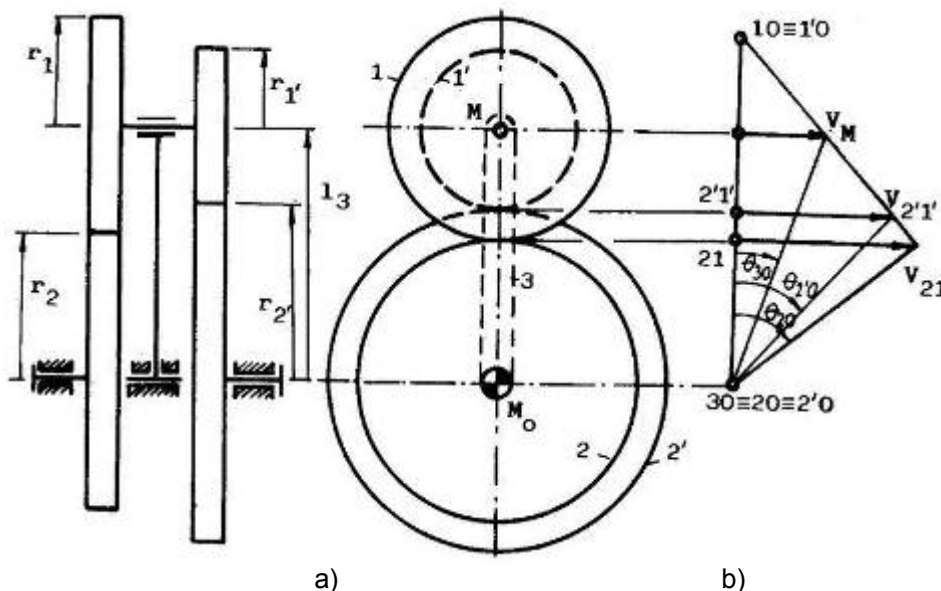
#### 4.4.2. Dvostepeni diferencijalni prenosnici

Bilo koja dva osnovna diferencijalna prenosnika mogu se povezati u dvostepeni diferencijalni prenosnik, pri čemu je broj mogućih kombinacija  $k=3^2=9$  (a,b,c - osnovni tipovi diferencijalnih prenosnika sa **slike 4.16**):



Kombinacije uokvirene punom linijom predstavljaju identične diferencijalne prenosnike s kombinacijama uokvirenim isprekidanom linijom, pa za analizu preostaje ukupno šest različitih kombinacija.

Na primeru dvostepenog diferencijalnog prenosnika, prikazanom na **slici 4.19a**, koji predstavlja kombinaciju dva osnovna diferencijalna prenosnika sa spoljašnjim zupčanjem (tip a-a), prikazaćemo tok analize brzina i postupak konstruisanja plana brzina.



Sl.4.19.

Kao što se sa slike vidi, zupčanici 1 i 2 su u međusobnoj sprezi kao i zupčanici 1' i 2', a poluga (3) je zajednička za oba dela prenosnika. Zupčanici 1 i 1' su međusobno kruto vezani, što znači da imaju istu ugaonu brzinu  $\omega_{10}=\omega_{1'0}$ . Kako je  $\omega_{10}=\omega_{30}+\omega_{13}=\omega_{30}+\omega_{1'3}$ , sledi da je:

$$\omega_{13} = \omega_{1'3} = \omega_{10} - \omega_{30} = \omega_{1'0} - \omega_{30} \quad (4.47)$$

Na osnovu jednačine (4.40) dobija se:

$$i_{12} \cdot (\omega_{20} - \omega_{30}) = i_{1'2'} \cdot (\omega_{2'0} - \omega_{30}) \quad (4.48)$$

Ako su poznate ugaone brzine  $\omega_{20}$  i  $\omega_{2'0}$ , iz prethodne jednačine se može formulisati izraz za ugaonu brzinu poluge (3):

$$\omega_{30} = \lambda_1 \cdot \omega_{20} + \lambda_2 \cdot \omega_{2'0}, \quad (4.49)$$

gde su:

$$\lambda_1 = \frac{i_{12}}{i_{12} - i_{1'2'}}; \quad \lambda_2 = \frac{i_{1'2'}}{i_{1'2'} - i_{12}}. \quad (4.50)$$

Ugaona brzina  $\omega_{30}$  može se odrediti i pomoću plana brzina (slika 4.19b). Obimna brzina zupčanika 2 je:

$$V_{21} = r_2 \cdot \omega_{20}, \quad (4.51)$$

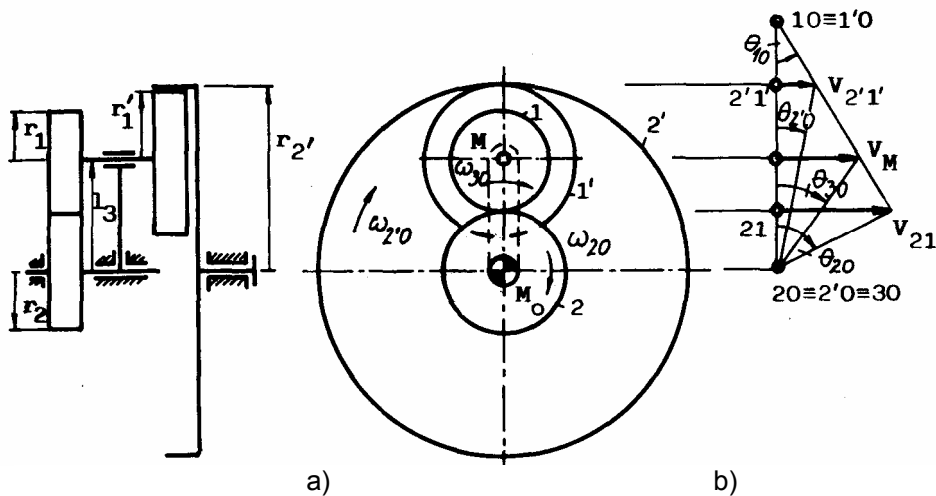
a zupčanika 2':

$$V_{2'1'} = r_{2'} \cdot \omega_{2'0}. \quad (4.52)$$

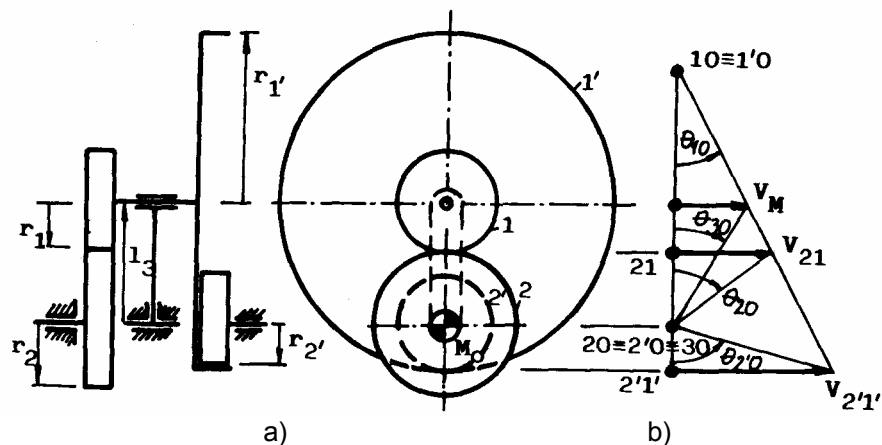
Kako su ovo istovremeno i brzine tačaka na obimu zupčanika 1 odnosno 1', to prava, koja spaja vrhove vektora ovih brzina, definiše trenutni pol  $10 \equiv 1'0$ . Vektor brzine tačke M, centra zupčanika 1 i 1', završava se takođe na  $\theta_{10}$ -liniji. Tačka M pripada i članu 3 pa se spajanjem vrha vektora brzine tačke M sa trenutnim polom  $30$  definiše ugao  $\theta_{30}$ , a time i ugaona brzina  $\omega_{30}$ .

Isti tok analize se može sprovesti i za dvostepene diferencijalne prenosnike dobijene sledećim kombinacijama osnovnih prenosnika:

- diferencijalni prenosnik sa spoljašnjim zupčenjem i prenosnik sa unutrašnjim zupčenjem ( $r_2 > r_1$ ), kombinacija a-b (slika 4.20);
- diferencijalni prenosnik sa spoljašnjim zupčenjem i prenosnik sa unutrašnjim zupčenjem ( $r_1 > r_2$ ), kombinacija a-c (slika 4.21);



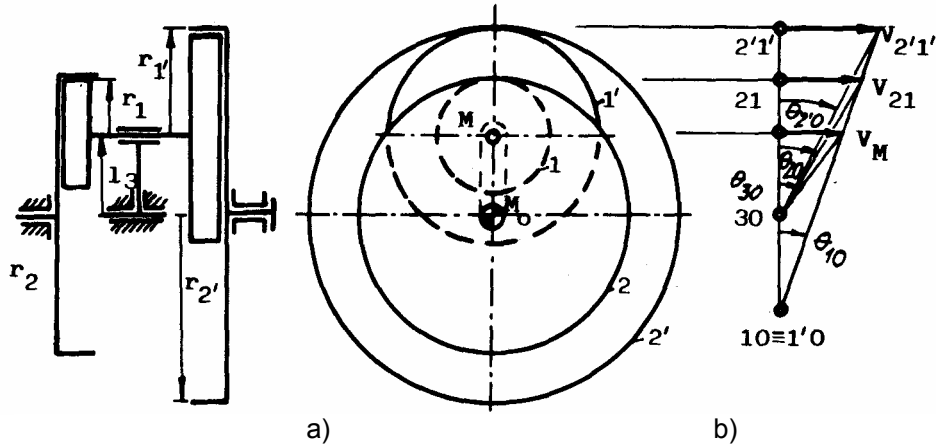
Sl.4.20.



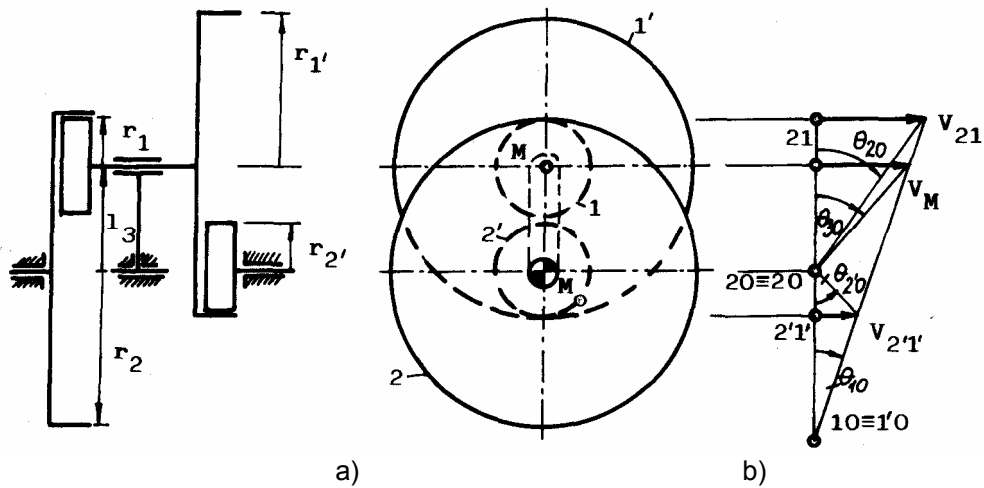
Sl.4.21.

- diferencijalni prenosnik sa unutrašnjim zupčenjem ( $r_2 > r_1$ ) i prenosnik sa unutrašnjim zupčenjem ( $r_2 > r_1$ ), kombinacija **b-b** (slika 4.22);
- diferencijalni prenosnik sa unutrašnjim zupčenjem ( $r_2 > r_1$ ) i prenosnik sa unutrašnjim zupčenjem ( $r_1 > r_2$ ), kombinacija **b-c** (slika 4.23);
- diferencijalni prenosnik sa unutrašnjim zupčenjem ( $r_1 > r_2$ ) i prenosnik sa unutrašnjim zupčenjem ( $r_1 > r_2$ ), kombinacija **c-c** (slika 4.24).

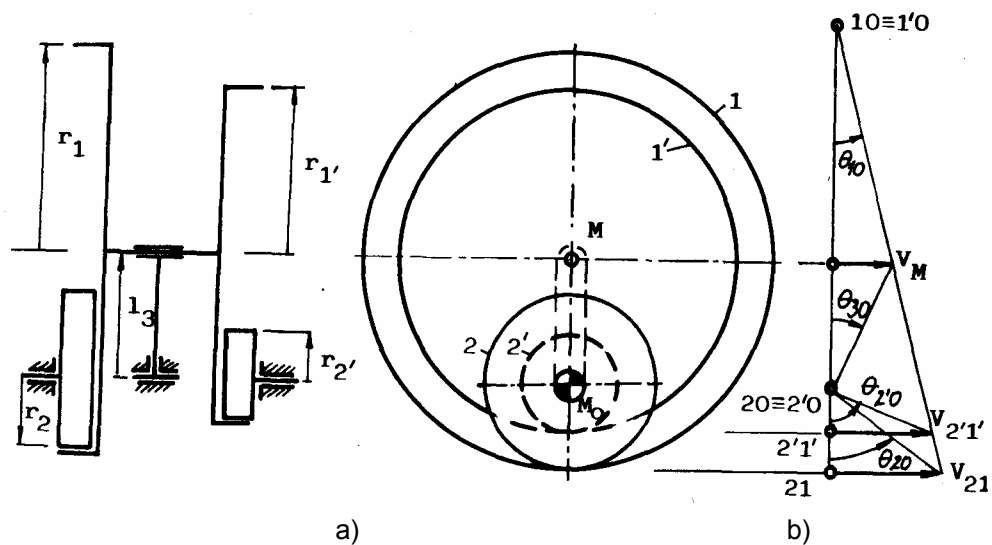
Na slikama 4.20b do 4.24b prikazan je plan brzina za odgovarajuće prenosnike.



Sl.4.22.



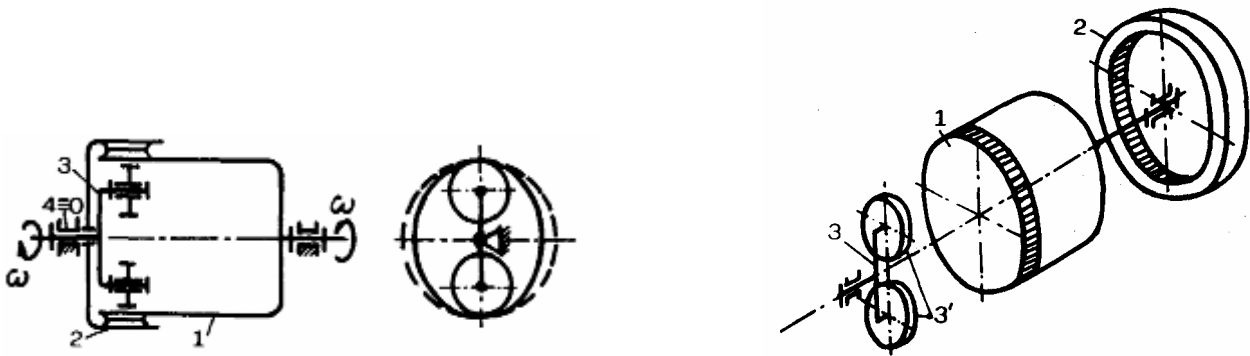
Sl.4.23.



Sl.4.24.

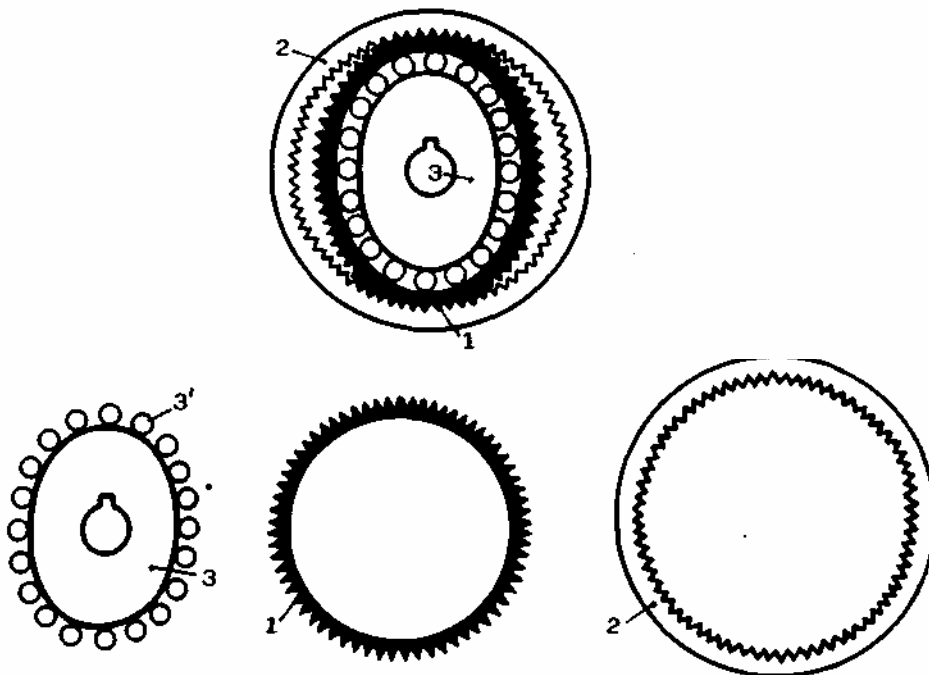
#### 4.4.3. Talasni prenosnik (*Harmonic drive*)

Talasni prenosnik (**slika 4.25**) spada u grupu četvoročlanih mehanizama i sastoji se od elastičnog zupčanika sa spoljašnjim ozubljenjem (1), krutog zupčanika sa unutrašnjim ozubljenjem (2), generatora talasa (3) i postolja (4=0).



Sl.4.25.

Zupčanici 1 i 2 nalaze se u zahvatu u oblasti većeg prečnika generatora talasa. Generator talasa, prikazan na **slici 4.25**, sastoji se od poluge (3) i dva tačka (3'). Drugačije izvođenje generatora talasa, u obliku elipse, prikazano je na slici 4.26. Valjci (3') pretvaraju trenje klizanja između članova 1 i 3 u trenje kotrljanja.

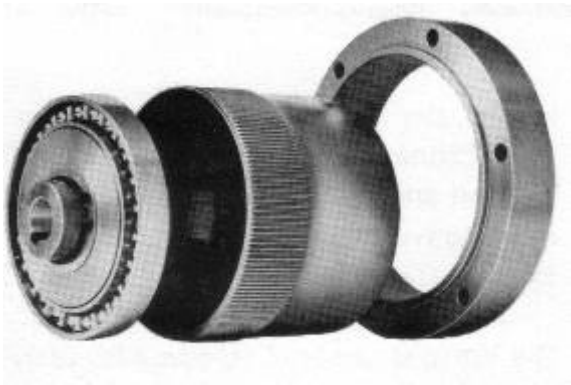


Sl.4.26.

Broj zuba krutog zupčanika ( $z_2$ ) veći je od broja zuba elastičnog zupčanika ( $z_1$ ). Najčešća razlika je  $z_2 - z_1 = 2$ . Podesni korak zupčanika je  $p_1 = p_2$ . Ugaoni korak je prema tome  $\varphi_{01} = 2\pi/z_1$ , odnosno  $\varphi_{02} = 2\pi/z_2$ . Kao posledica razlike broja zuba javlja se relativno kretanje zupčanika 1 i 2. Talasni prenosnik karakteriše vrlo visok prenosni odnos ( $i > 1:420$ ), stepen korisnog dejstva do  $\eta = 0,9$ , mogu se preneti obrtni momenti do  $M = 6000 \text{ Nm}$  i redukovati brojevi obrtaja do  $n_{\max} = 10000 \text{ min}^{-1}$ , a lakši je i manji (kompaktniji) od drugih poznatih reduktora.

Na **slikama 4.27.** i **4.28.** prikazana su neka, komercijalno dostupna izvođenja talasnog prenosnika:

- HDUC na slici 4.27 ( $i = \frac{1}{78} \div \frac{1}{320}$ ,  $M = 6000 \text{ Nm}$ , trajno podmazani, 15% ukupnog broja zuba u zahvatu);
- HDUF na slici 4.28a ( $i = \frac{1}{78} \div \frac{1}{160}$ ,  $M = 340 \text{ Nm}$ );
- SHDUC na slici 4.28b ( $n = 5,3 \div 17,4 \text{ min}^{-1}$ ,  $M = 112 - 158 \text{ Nm}$ ).



Sl.4.27.



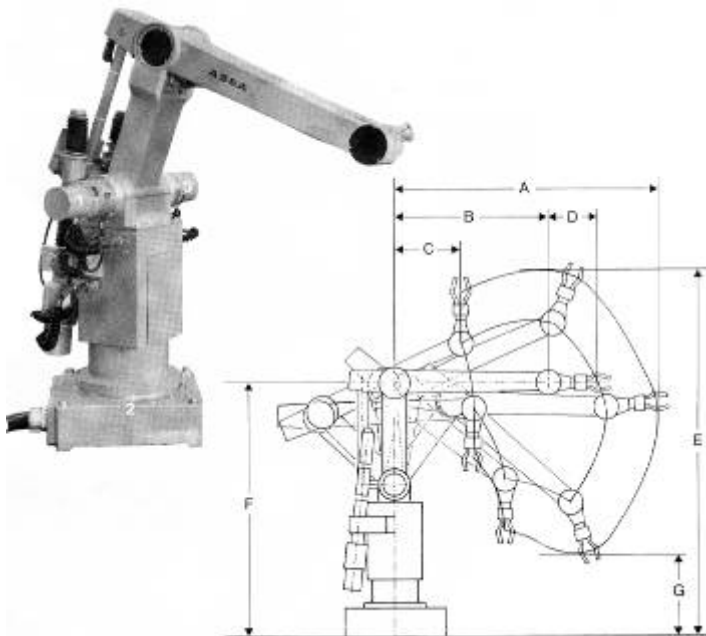
a)



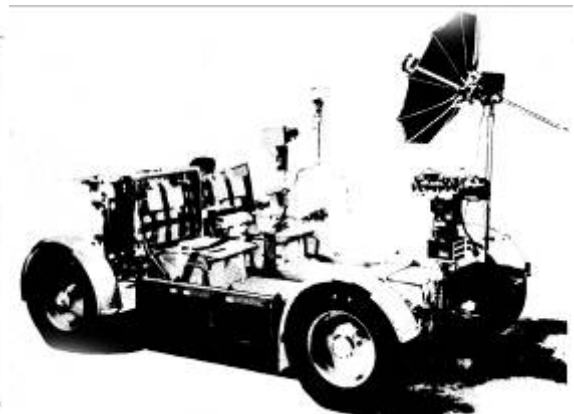
b)

Sl.4.28.

Talasne prenosnike srećemo kod alatnih mašina, tekstilnih mašina, štamparskih mašina, u industriji papira, ali i u robotici (slika 4.29a), raketnoj tehnici, kosmičkim letilicama i satelitima (na slici 4.29b prikazan je lunohod u koji su takodje bili ugrađeni talasni prenosnici).



a)



b)

Sl.4.29.

Talasni prenosnik ima dva stepena slobode kretanja i zbog toga spada u grupu diferencijalnih prenosnika. Složeno kretanje prenosnika može se opisati funkcijom  $\varphi_3(\varphi_1, \varphi_2)$ . Diferenciranjem po vremenu dobija se:

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt}, \quad (4.53)$$

gde su:

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \omega_{30}, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_{10} \quad \text{i} \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_{20} \quad (4.54)$$

ugaone brzine članova prenosnika. Ako član **2** miruje, prenosni odnos članova **3** i **1** je:

$$i_{31}^{(2)} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}, \quad (4.55)$$

a ako član **1** miruje, prenosni odnos članova **3** i **2** je:

$$i_{32}^{(1)} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_2} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}}. \quad (4.56)$$

Ako je zupčanik **2** nepokretan, za jedan obrtaj generatora talasa (**3**) ( $\varphi_3=2\pi$ ) elastični zupčanik (**1**) se okrene u suprotnom smeru za:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{Z_1} \cdot (Z_2 - Z_1), \quad (4.57)$$

pa je:

$$i_{31}^{(2)} = \frac{2\pi}{-\frac{2\pi}{Z_1} \cdot (Z_2 - Z_1)} = -\frac{Z_1}{(Z_2 - Z_1)}. \quad (4.58)$$

U slučaju da je zupčanik **1** nepokretan, za jedan obrtaj generatora talasa (**3**) ( $\varphi_3=2\pi$ ) zupčanik **2** se okrene u istom smeru za ugao:

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{Z_2} \cdot (Z_2 - Z_1), \quad (4.59)$$

odakle sledi:

$$i_{32}^{(1)} = \frac{Z_2}{Z_2 - Z_1}. \quad (4.60)$$

Iz jednačina (4.53) do (4.60) sledi:

$$\omega_{30} = -\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1} \cdot \omega_{10} + \frac{Z_2}{Z_2 - Z_1} \cdot \omega_{20}. \quad (4.61)$$

Uočimo da je:

$$i_{31}^{(2)} + i_{32}^{(1)} = 1. \quad (4.62)$$

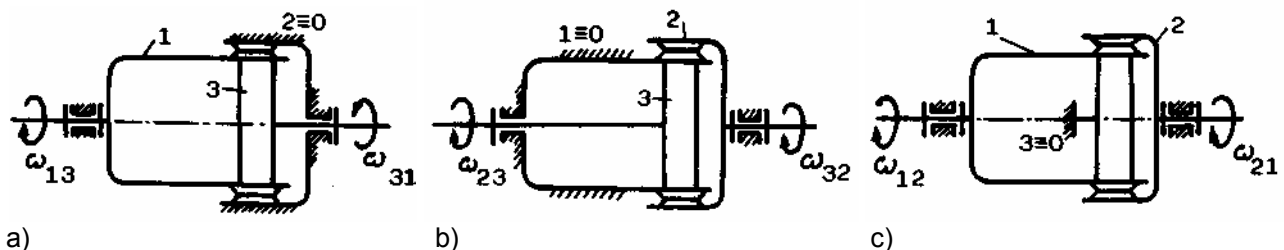
Zaustavljanjem jednog od pokretnih članova dobija se prenosnik sa jednim stepenom slobode kretanja. Različitim izborima nepokretnog i pogonskog člana dobijaju se prenosnici različitih prenosnih odnosa:

a) Član **2** je nepokretan (**slika 4.30a**). Pogonski član (**1**) i vodjeni član (**3**) okreću se u suprotnom smeru. Prenosnik radi kao multiplikator i ima prenosni odnos:

$$i_{13}^{(2)} = -\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1}. \quad (4.63)$$

Kada je član **3** pogonski, a član **1** vodjeni, prenosnik radi kao reduktor i ima prenosni odnos:

$$i_{31}^{(2)} = -\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}. \quad (4.64)$$



SI.4.30.



- b) Član **1** je nepokretan (**slika 4.30b**). Pogonski član (**2**) i vodjeni član (**3**) okreću se u istom smeru. Prenosnik radi kao multiplikator i ima prenosni odnos:

$$i_{23}^{(1)} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2}. \quad (4.65)$$

Kada je član **3** pogonski, a član **2** vodjeni, prenosnik radi kao reduktor i ima prenosni odnos:

$$i_{32}^{(1)} = \frac{Z_2}{Z_2 - Z_1}. \quad (4.66)$$

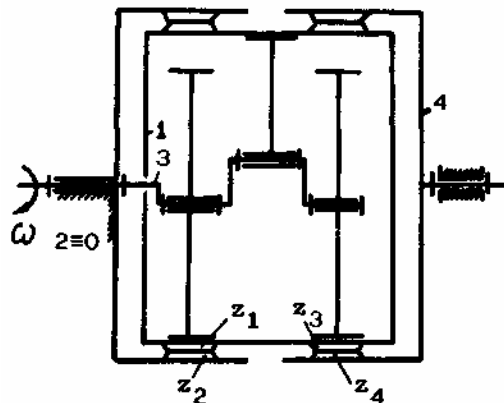
- c) Član **3** je nepokretan (**slika 4.30c**). Pogonski član (**1**) i vodjeni član (**2**) okreću se u istom smeru. Prenosnik radi kao reduktor i ima prenosni odnos:

$$i_{12}^{(3)} = \frac{Z_2}{Z_1}. \quad (4.67)$$

Kada je član **2** pogonski, a vodjeni član **1** vodjeni, prenosnik radi kao multiplikator i ima prenosni odnos:

$$i_{21}^{(3)} = \frac{Z_1}{Z_2}. \quad (4.68)$$

Talasni prenosnik može biti i **dvostepen** (**slika 4.31**). Član **1** izveden je u obliku cilindra, sa dva elastična zupčanika sa spoljašnjim ozubljenjem; broj zuba prvog zupčanika je  $z_1$ , a drugog  $z_3$ . Elastični zupčanici spregnuti su sa krutim zupčanicima sa unutrašnjim ozubljenjem i brojem zuba  $z_2$  odn.  $z_4$ .



Sl.4.31.

Kruti zupčanik (**2**) je nepokretan. Kretanje generatora talasa (**3**) se dvostepeno prenosi do krutog zupčanika (**4**). Prvi stepen prenosa čini pogonski član - generator talasa (**3**), elastični zupčanik sa  $z_1$  zuba i nepokretni član - kruti zupčanik sa  $z_2$  zuba:

$$\omega_{10} = -\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1} \cdot \omega_{30}. \quad (4.69)$$

Drugi stepen je diferencijalni prenosnik čiji su pogonski članovi - generator talasa (**3**) i elastični zupčanik sa  $z_3$  zuba, a vodjeni član - kruti zupčanik sa  $z_4$  zuba. Jednačina (4.61) za ovaj slučaj glasi:

$$\omega_{30} = -\frac{Z_3}{Z_4 - Z_3} \cdot \omega_{10} + \frac{Z_4}{Z_4 - Z_3} \cdot \omega_{40}, \quad (4.70)$$

odakle se, zamenom  $\omega_{10}$  iz jednačine (4.69), dobija:

$$\omega_{40} = \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_4} \cdot \omega_{30}. \quad (4.71)$$

## 5. BREGASTI MECHANIZMI

Bregasti mehanizmi spadaju u grupu tročlanih mehanizama i sastoje se od bregastog para (pogonski i vodjeni član) i postolja. Zbog jednostavnosti izrade i mogućnosti realizacije složenih prenosnih funkcija često se primenjuju za mehanizaciju i automatizaciju procesa proizvodnje.

### 5.1. Vrste bregastih mehanizama

Prenosne funkcije se kod bregastih mehanizama realizuju klizanjem krive  $k_1$  bregastog para po krivoj  $k_2$  (slika 5.1), pri čemu bregasti par vrši transformaciju:

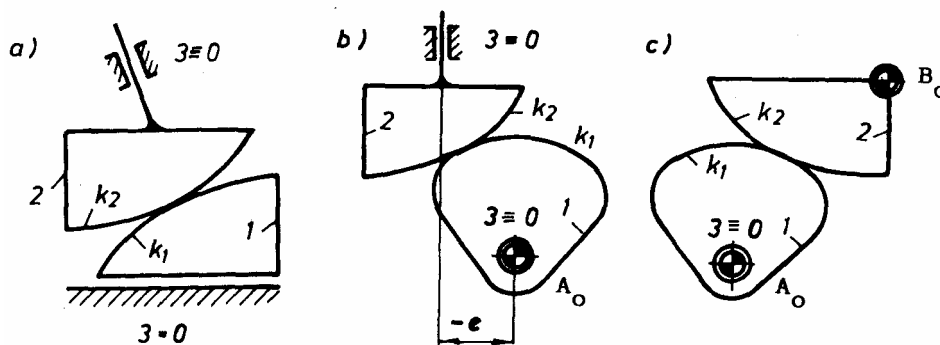
- translatornog u translatorno kretanje,
- rotacionog u translatorno kretanje,
- translatornog u rotaciono kretanje ili
- rotacionog u rotaciono kretanje.

Transformacija jedne translacije u drugu (slika 5.1a) ostvaruje se tako što se translatorno kretanje pogonskog člana (1), preko krivih  $k_1$  i  $k_2$ , prenosi na vodjeni član (2) koji se takodje kreće translatorno.

Transformacija rotacionog u translatorno kretanje (slika 5.1b) ostvaruje se pomoću bregaste ploče, koja rotira oko nepokretne tačke  $A_0$ , a čija kriva  $k_1$ , preko krive  $k_2$ , deluje na član (2) i pomera ga translatorno. Rastojanje obrtne tačke  $A_0$  od pravca vođice vođenog člana naziva se ekscentricitet ( $e$ ). Za  $e \neq 0$  bregasti mehanizam je ekscentričan, a za  $e=0$  centričan.

Kada pogonski i vodjeni član mehanizma prikazanog na slici 5.1b. zamene uloge, dobija se mehanizam za transformaciju translatornog u rotaciono kretanje.

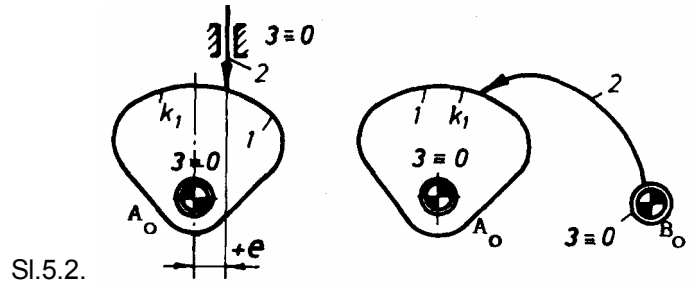
Transformacija jedne rotacije u drugu (slika 5.1c) ostvaruje se tako što se rotaciono kretanje pogonskog člana (1) oko nepokretne tačke  $A_0$ , preko krivih  $k_1$  i  $k_2$ , prenosi na vodjeni član (2) koji rotira oko nepokretne tačke  $B_0$ .



Sl.5.1.

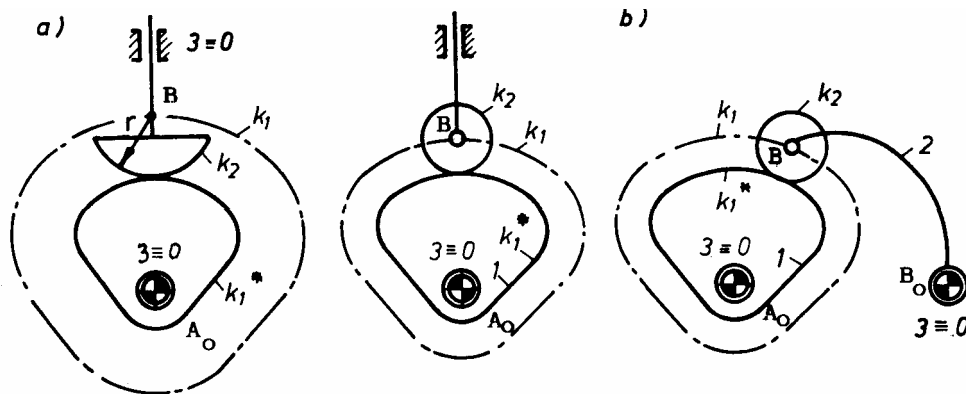
Krive  $k_1$  i  $k_2$  mogu imati različite poluprečnike krivine ( $\rho$ ), a time i različite oblike. Karakteristični su sledeći slučajevi:

- a)  $p_2=0$ ; kriva  $k_2$  degenerira u tačku koja u svakom trenutku dodiruje krivu  $k_1$  (slika 5.2).

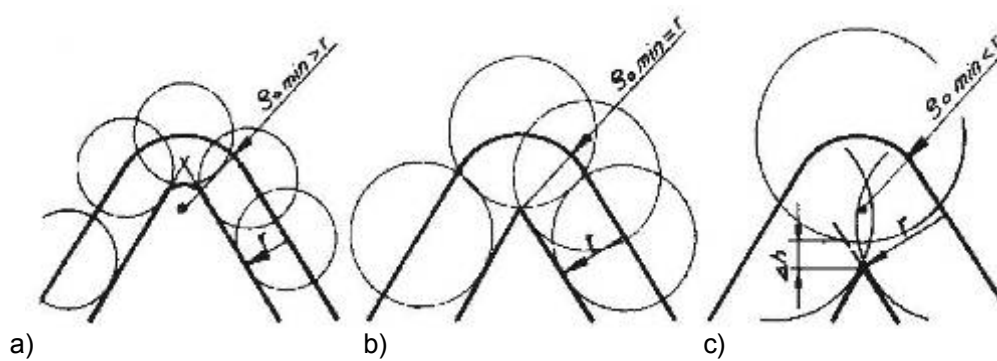


SI.5.2.

- b)  $p_2 = r = \text{const.}$ ; kriva  $k_2$  je kružni luk (slika 5.3a), a kriva  $k_1$  prolazi kroz centar ovog kružnog luka (B). Veza članova 1 i 2 ostvaruje se preko krivih  $k_2$  i  $k_1^*$ . Za realizaciju prenosne funkcije meritorna je kriva  $k_1$ , dok njena ekvidistanta  $k_1^*$  (na rastojanju  $r$ ) definiše oblik bregaste ploče (stvarna kriva). Ukoliko se želi izbeći trenje klizanja između članova 1 i 2, umesto dela kružnog luka (pečurkasti podizač) koristi se točkić koji rotira oko tačke B (slika 5.3b). Poluprečnik točkića ( $r$ ) mora biti manji od minimalnog poluprečnika krivine ( $\rho_{\min}$ ) teorijske krive  $k_1$ . Za  $r = \rho_{\min}$ , kriva  $k_1^*$  ima špic (slika 5.4b), a za  $r > \rho_{\min}$  javlja se gubitak hoda (slika 5.4c).

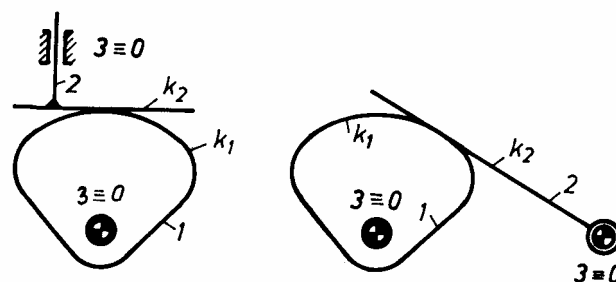


SI.5.3.

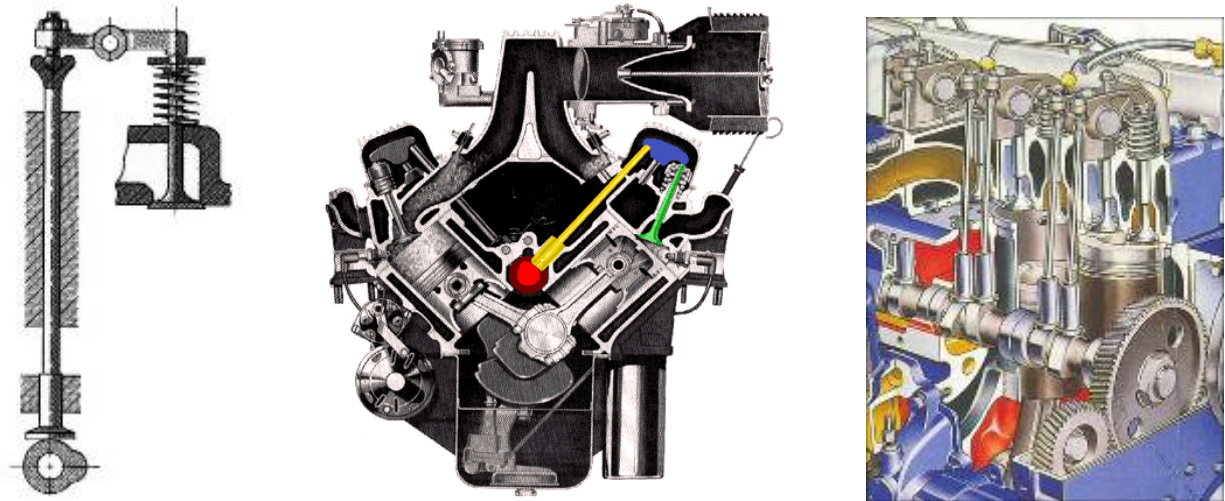


SI.5.4.

- c)  $p_2 \rightarrow \infty$ ; kriva  $k_2$  prelazi u pravu koja u svakom trenutku kretanja tangira krivu  $k_1$  (slika 5.5), što uvodi i odgovarajuća ograničenja za oblik brega, a time i prenosnu funkciju. Tačka dodira menja svoj položaj na krivoj  $k_1$  i pravoj  $k_2$ . Ovakve, **tanjiraste** podizače srećemo npr. kod mehanizama za otvaranje i zatvaranje ventila u motorima SUS (slika 5.6).

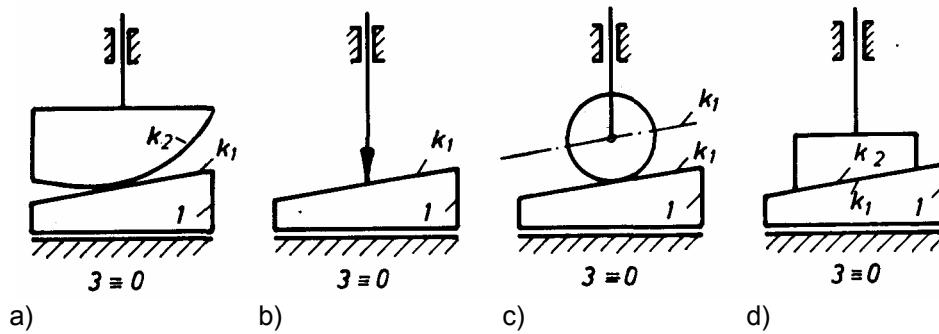


SI.5.5.



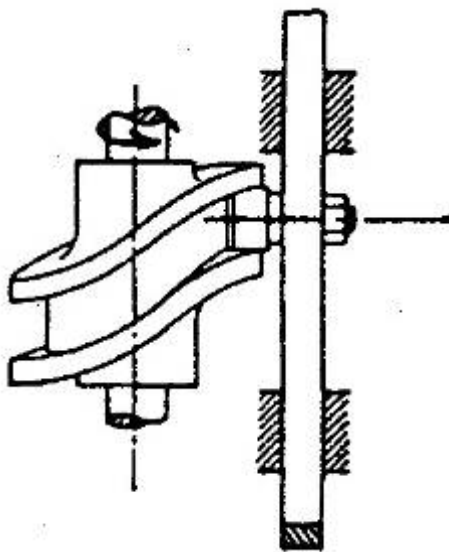
Sl.5.6.

d)  $\rho_1 \rightarrow \infty$ ; kriva  $k_1$  prelazi u pravu (slika 5.7), dok kriva  $k_2$ , pored opšteg oblika (slika 5.7a), može biti tačka ( $\rho_2=0$ , slika 5.7b), krug ( $\rho_2=\text{const.}$ , slika 5.7c) ili prava ( $\rho_2 \rightarrow \infty$ , slika 5.7d).

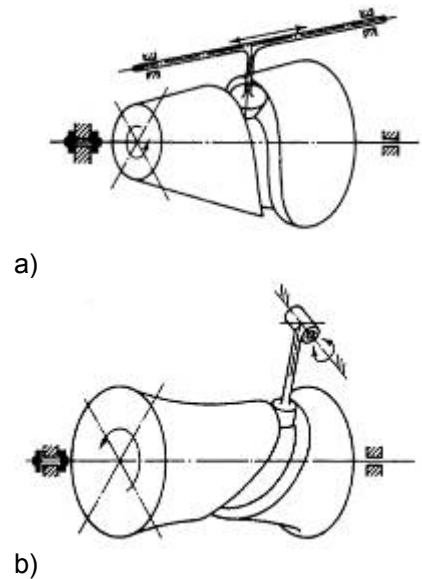


Sl.5.7.

Na slikama 5.8. i 5.9. prikazani su prostorni bregasti mehanizmi za transformaciju rotacionog u translatorno (slike 5.8. i 5.9a), i rotacionog u rotaciono kretanje (slika 5.9b).



Sl.5.8.



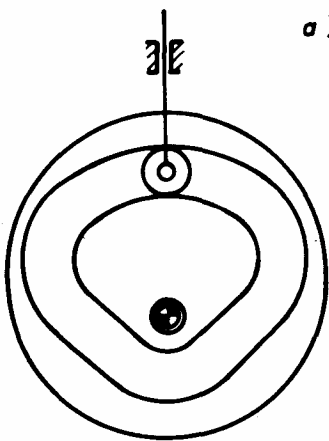
Sl.5.9.

Trajna veza pogonskog sa vodjenim članom može biti ostvarena oblikom (geometrijske ili kinematske veze) ili dejstvom sile (dinamičke veze).

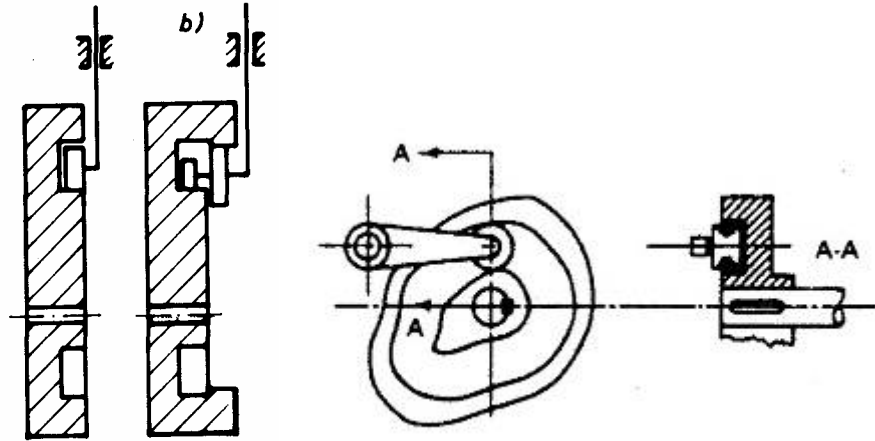
Geometrijske (kinematske) veze ostvaruju se kontaktom:

- točkića i žleba (**slike 5.8, 5.9a. i 5.10.** za transformaciju rotacije u translaciju odn. **slike 5.9b. i 5.11.** za transformaciju rotacije u rotaciju),
- točkića i vođice (**slika 5.12**), ili
- pomoću dva brega čiji profili obezbeđuju konstantno rastojanje između centara točkića (**slika 5.13a** za transformaciju rotacije u translaciju odn. **slika 5.13b** za transformaciju rotacije u rotaciju).

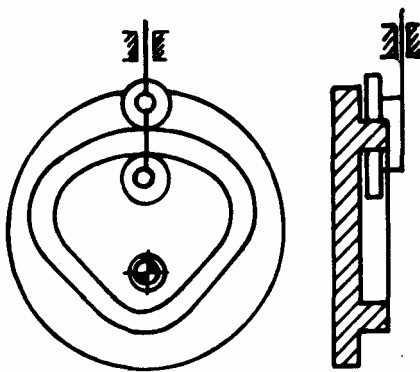
Veza žljeb-točkić, izvedena sa dva točkića (**slika 5.10b**), predstavlja poboljšano rešenje koje otklanja grešku zazora, koji kod rešenja sa jednim točkićem mora da postoji kako bi se obezbedilo nesmetano okretanje točkića.



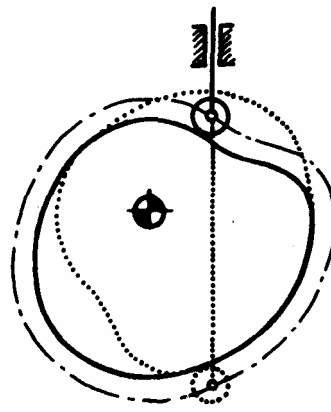
SI.5.10.



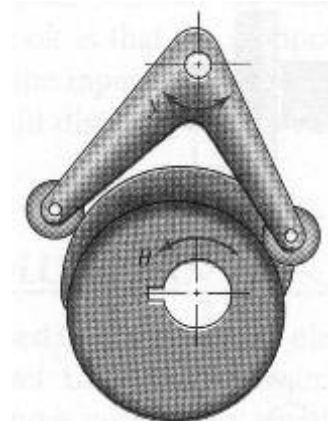
SI.5.11.



SI.5.12.



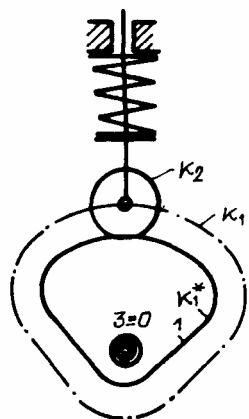
a)



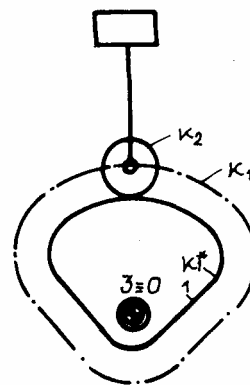
b)

SI.5.13.

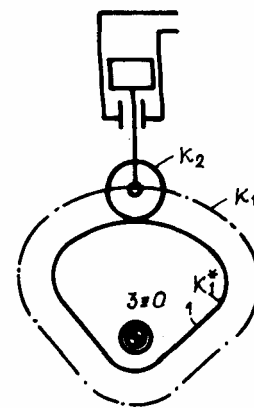
Dinamička veza ostvaruje se dejstvom sile opruge (**slike 5.6 i 5.14a**), težine (**slika 5.14b**) ili pritiska pneumatskog ili hidro-cilindra (**slika 5.14c**).



a)



b)



c)

SI.5.14.

## 5.2. Analiza bregastih mehanizama

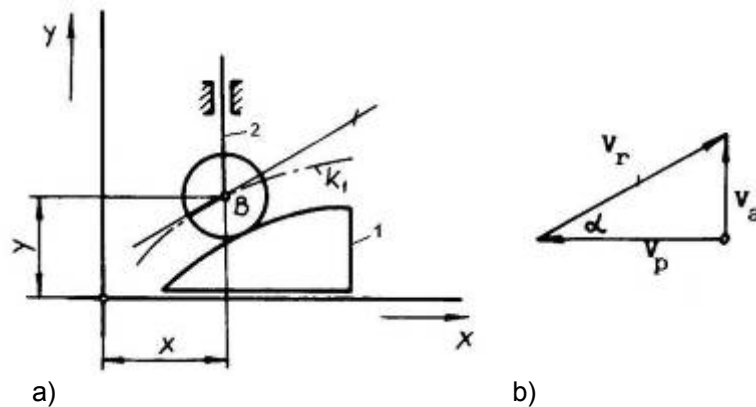
Analiza započinje utvrđivanjem prenosne funkcije bregastog mehanizma u zavisnosti od profila brega i tipa bregastog mehanizma. Iz prenosne funkcije nultoga reda  $\psi(\varphi)$ , odnosno  $s(\varphi)$ , dobija se diferenciranjem prenosna funkcija prvoga reda (1.3):

$$\psi'(\varphi) = \frac{\dot{\psi}}{\omega_{10}}; \quad s'(\varphi) = \frac{\dot{s}}{\omega_{10}}, \quad (5.1)$$

a zatim i prenosna funkcija drugoga reda (1.6):

$$\psi''(\varphi) = \frac{\ddot{\psi}}{\omega_{10}^2}; \quad s''(\varphi) = \frac{\ddot{s}}{\omega_{10}^2}. \quad (5.2)$$

Prenosna funkcija nultoga reda mehanizama za transformaciju **translatorsnog u translatorno kretanje** može biti formulisana kao funkcija  $y(x)$  u usvojenom koordinatnom sistemu  $Oxy$  (slika 5.15a).



Sl.5.15.

Brzina vodjenog člana predstavlja apsolutnu brzinu ( $\vec{v}_a$ ) složenog kretanja članova **1** i **2**:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_p + \vec{v}_r, \quad (5.3)$$

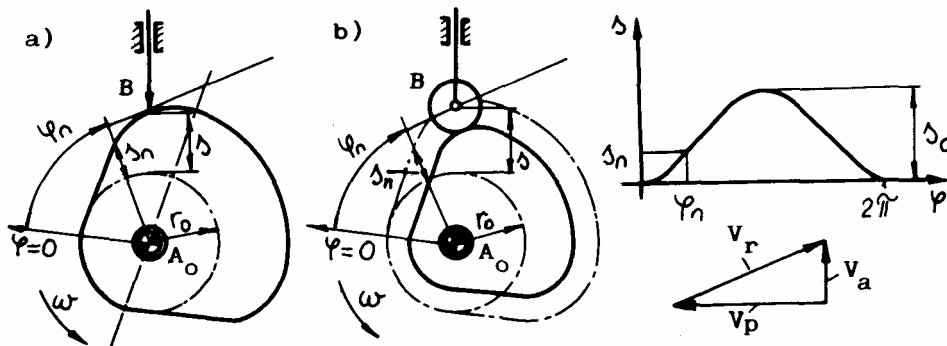
pri čemu je:  $\vec{v}_p$  - prenosna brzina, u ovom slučaju brzina pogonskog člana, a

$\vec{v}_r$  - relativna brzina člana **2** u odnosu na član **1**, čiji se pravac poklapa sa pravcem tangente na krivu  $k_1$  u tački **B**.

Iz trougla brzina (slika 5.15b) sledi:

$$v_a = v_p \cdot \operatorname{tg} \alpha = v_p \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (5.4)$$

Na sličan način određuje se i prenosna funkcija nultoga reda kod mehanizama za transformaciju **rotacionog u translatorno kretanje** (slika 5.16a). Put  $s$  se kod centričnog mehanizma meri od tačke profila brega koja je najbliža centru okretanja  $A_0$ . Rastojanje  $r_0$  predstavlja poluprečnik **osnovnog kruga**. Ugao rotacije meri se u suprotnom smeru od smeru ugaone brzine  $\omega_{10}$ , a kao početak  $\varphi=0$  definiše se tačka profila brega na osnovnom krugu.



Sl.5.16.

Podelom osnovnog kruga na veći broj delova i merenjem odgovarajućih vrednosti puta  $s_n$ , a zatim njihovim nanošenjem (za odgovarajuće vrednosti uglova  $\varphi_n$ ) u koordinatni sistem, dobija se grafik prenosne funkcije nultoga reda (**slika 5.16c**).

Brzina vodjenog člana određuje se na isti način kao i kod prethodnog slučaja, s tim što je ovde prenosna brzina upravna na poteg  $\overline{A_0B}$ , intenziteta:

$$v_p = \overline{A_0B} \cdot \omega_{10}. \quad (5.5)$$

Prenosna funkcija se može dobiti i analitički, transformacijom izraza za profila brega  $r(\varphi)$  u  $s(\varphi)$ :

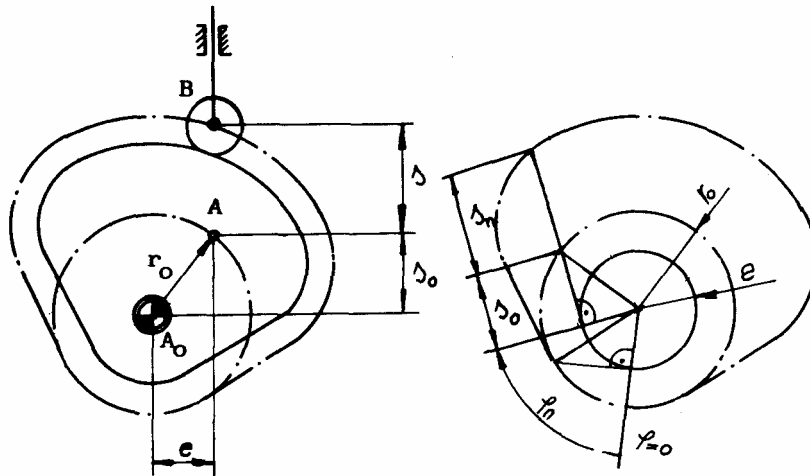
$$s(\varphi) = r(\varphi) - r_0. \quad (5.6)$$

Diferenciranjem ove funkcije dobija se prenosna funkcija prvog  $s'(\varphi)$  i drugog reda  $s''(\varphi)$ , odnosno, brzina i ubrzanje:

$$v_a(\varphi) = \dot{s}(\varphi) = s'(\varphi) \cdot \omega_{10}, \quad (5.7)$$

$$a_a(\varphi) = \ddot{s}(\varphi) = s''(\varphi) \cdot \omega_{10}^2.$$

Kod mehanizma sa točkicom (**slika 5.16b**) analiza se izvodi na isti način, s tim što se sve veličine vezuju za teorijski profil ( $k_1$ ).



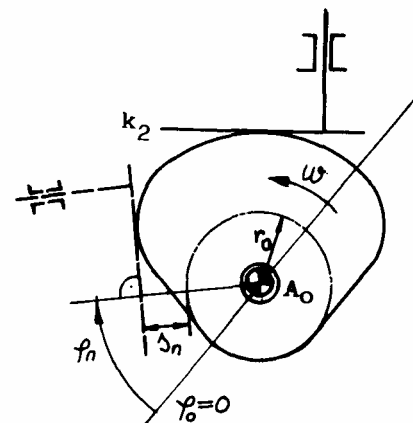
SI.5.17.

Kod ekscentričnog bregastog mehanizma (**slika 5.17**), put se meri od tačke **A**, a vrednost  $s_0$  je određena izrazom:

$$s_0 = \sqrt{r_0^2 - e^2}. \quad (5.8)$$

Kod mehanizma sa ravnim klizačem (**slika 5.18**), put  $s$  se meri od osnovnog kruga do prave  $k_2$  u pravcu normale na  $k_2$ . Prenosna funkcija nultoga reda dobija se na isti način kao i kod prethodnih mehanizama, s tim što se ugao  $\varphi_n$  meri od normale na pravu  $k_2$ . Ova prava je tangenta na profil brega i ima sa njim dodirnu tačku koja ne mora pripadati normali.

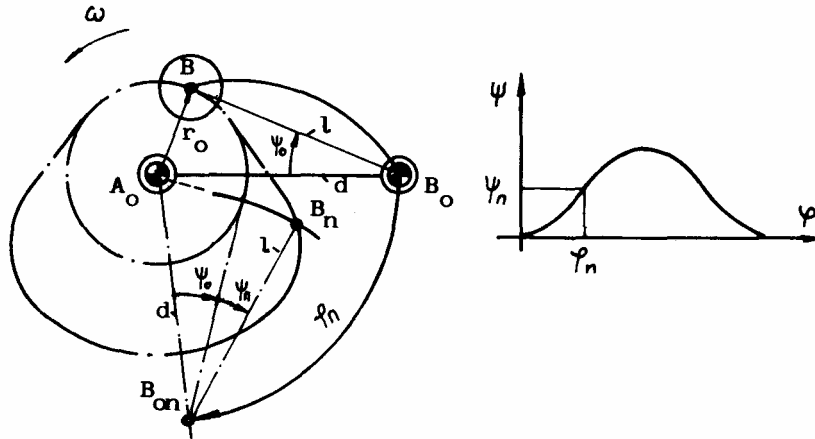
Specifičnost ovoga mehanizma je i to da je ugao između apsolutne i relativne brzine uvek prav.



SI.5.18.

Pri transformaciji **rotacionog u rotaciono kretanje** (slika 5.19) prenosna funkcija je  $\psi(\varphi)$ , a ugao  $\psi$  se meri od najnižeg položaja balansijera, označenog uglom  $\psi_0$ , koji određuju dimenzije mehanizma i osnovnog kruga:

$$\cos \psi_0 = \frac{d^2 + l^2 - r_0^2}{2dl} \quad (5.9)$$



Sl.5.19.

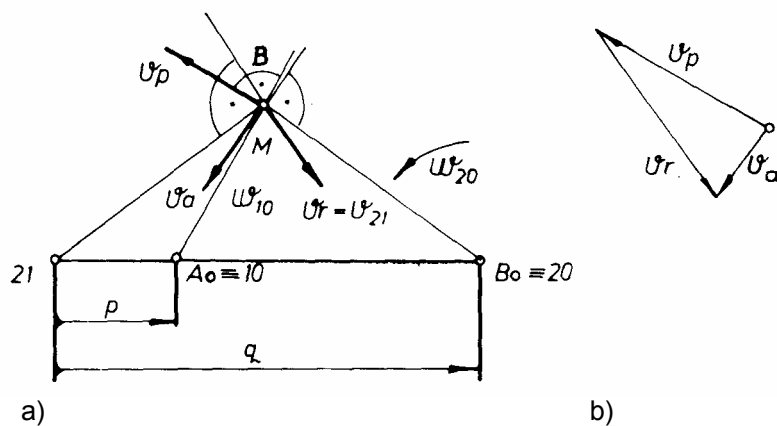
Prenosna funkcija  $\psi(\varphi)$  dobija se zaokretanjem postolja  $\overline{A_0B_0}$  oko tačke  $A_0$  u suprotnom smeru od smera ugaone brzine  $\omega_{10}$ . Za pogonski ugao  $\varphi_n$  dobijamo položaj vodjenog člana  $\psi_n$  nanošenjem dužine balansijera  $l = \overline{B_0B}$  iz tačke  $B_{0n}$  do preseka sa osnovnim krugom i profilom brega  $k_1$ .

Ugaona brzina vodjenog člana može se odrediti i uz pomoć trougla brzina. Prenosna brzina ( $v_p = \overline{A_0B} \cdot \omega_{10}$ ) upravna je na poteg  $\overline{A_0B}$ , apsolutna brzina ( $v_a = \overline{B_0B} \cdot \omega_{20}$ ) upravna je na poteg  $\overline{B_0B}$ , dok se pravac relativne brzine poklapa s pravcem tangente krive  $k_1$  (slika 5.20b). Ugaona brzina vodjenog člana je:

$$\dot{\psi} = \omega_{20} = \frac{v_a}{\overline{B_0B}}$$

Kako je  $A_0 \equiv 10$  i  $B_0 \equiv 20$  to se pol 21 nalazi u preseku pravaca  $\overline{A_0B_0}$  i normale na relativnu brzinu  $v_r = v_{21}$ . Po analogiji sa (2.12) sledi da je prenosni odnos tj. prenosna funkcija prvoga reda:

$$\psi' = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{p}{q} \quad (5.10)$$



Sl.5.20.



### 5.3. Sinteza bregastih mehanizama

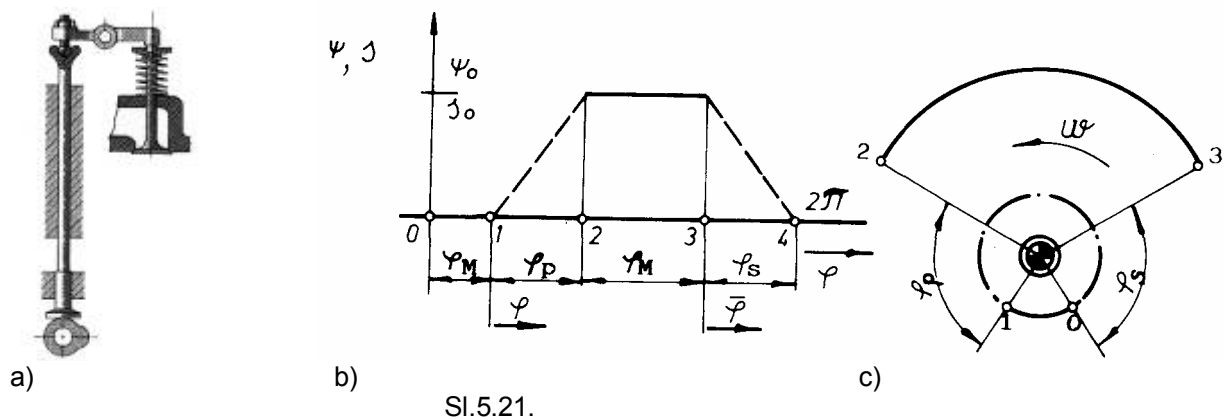
Sinteza bregastih mehanizama obuhvata:

- izbor prenosne funkcije,
- izbor poluprečnika osnovnog kruga  $i$
- konstrukciju profila bregaste ploče.

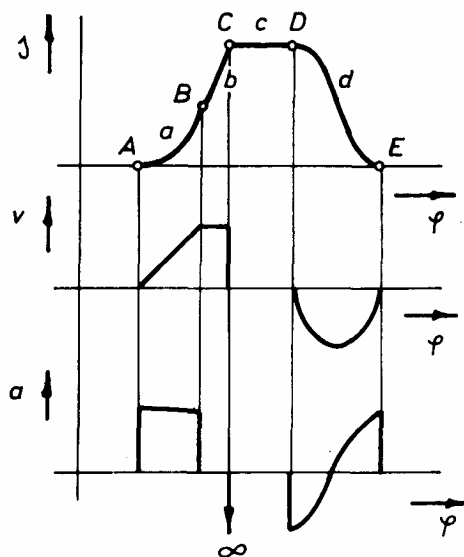
Pored kinematskih i dinamičkih karakteristika, na ove veličine utiču i uslovi rada i mogućnosti ugradnje.

#### 5.3.1. Izbor prenosne funkcije

Realizovanje odgovarajućeg tehnološkog procesa definiše najčešće prenosnu funkciju samo u pojedinim oblastima kretanja, dok se tok prenosne funkcije u preostalim oblastima može slobodno izabrati. Prenosna funkcija mehanizma podizrača ventila, prikazanog na **slici 5.21a**, treba da obezbedi mirovanje vodjenog člana u periodima **0-1** (zatvoren ventil) i **2-3** (otvoren ventil), dok se oblik prenosne funkcije u periodu **1-2** ( $\varphi_p$ ) i **3-4** ( $\varphi_s$ ) može slobodno izabrati (**slika 5.21b,c**). Od izbora ovih prelaznih delova prenosne funkcije, međutim, zavisi kvalitet rada mehanizma.



Na **slici 5.22** prikazana je, primera radi, prenosna funkcija sastavljena od parabole (a), dve prave (b i c) i sinusoide (d), tako da susedni segmenti u svim veznim tačkama, osim u tački **C**, imaju zajedničku tangentu. Diferenciranjem prenosne funkcije dobijaju se dijagrami brzine i ubrzanja. Uočavamo da se na mestu špica u prenosnoj funkciji nultoga reda (tačka **C**) javlja skok u dijagramu brzine, dok se u dijagramu ubrzanja skokovi javljaju u tačkama **A**, **B**, **D** i **E**. Uočavamo, takodje, da skok u dijagramu brzine (tačka **C**) uzrokuje beskonačno veliku vrednost ubrzanja, a time i sile inercije. Posledice ovih pojava su trzaji (**A**, **B**, **D** i **E**) i udari (**C**).



**Normirane prenosne funkcije.** Prenosne funkcije se, radi pojednostavlivanja proračuna i mogućnosti upoređivanja njihovih karakteristika, najčešće formulišu u normiranom obliku. Funkcije tekućih koordinata  $\varphi$  i

$\bar{\varphi}$  (slika 5.21b), kao i prenosne funkcije  $\psi(\varphi)$  odn.  $s(\varphi)$ , normiraju se u odnosu na njihove maksimalne vrednosti:

a) za period podizanja vodjenog člana:

$$\frac{\psi}{\psi_0} = f\left(\frac{\varphi}{\varphi_p}\right); \quad \frac{s}{s_0} = f\left(\frac{\varphi}{\varphi_p}\right), \quad (5.11)$$

gde je:

$$0 < \frac{\varphi}{\varphi_p} < 1; \quad (5.12)$$

b) za period spuštanja vodjenog člana:

$$\frac{\psi}{\psi_0} = 1 - f\left(\frac{\bar{\varphi}}{\varphi_s}\right); \quad \frac{s}{s_0} = 1 - f\left(\frac{\bar{\varphi}}{\varphi_s}\right). \quad (5.13)$$

gde je:

$$0 < \frac{\bar{\varphi}}{\varphi_s} < 1. \quad (5.14)$$

Prethodne formulacije se mogu uopštiti uvodjenjem smene:

$$z = \frac{\varphi}{\varphi_p} = \frac{\bar{\varphi}}{\varphi_s} \quad 0 < z < 1, \quad (5.15)$$

pa obe prenosne funkcije nultoga reda formulišemo kao  $f(z)$ , dok su prenosne funkcije prvog i drugog reda:

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz}; \quad f''(z) = \frac{d^2f(z)}{dz^2}. \quad (5.16)$$

Kao prelazne prenosne funkcije uglavnom se koriste stepene i trigonometrijske funkcije.

**Stepene prenosne funkcije** mogu se izraziti u obliku:

$$f(z) = \sum_{i=0}^n A_i \cdot z^i. \quad (5.17)$$

Oblast primenljivosti pojedinih stepenih funkcija zavisi od najvećeg stepena funkcije. Prelazna prenosna funkcija u obliku stepene funkcije čiji je najveći stepen **paran** broj, sastoji se iz dva nezavisna dela. U oblasti  $0 < z < 0,5$  prenosna funkcija se formuliše jednačinom (5.17), a u oblasti  $0,5 < z < 1$  jednačinom:

$$f(z) = 1 - \sum_{i=0}^n A_i \cdot (1-z)^i. \quad (5.18)$$

Normirana stepena funkcija sa **neparnim** najvećim stepenom može imati dve horizontalne tangente pa se može koristiti kao jedinstvena kriva u celoj oblasti  $0 < z < 1$ .

**Kvadratna parabola (slika 5.23a)**, kao prelazna normirana prenosna funkcija, mora imati dva nezavisna dela. Prvi deo, u oblasti  $0 < z < 0,5$ , postavlja se uz granične uslove:

- 1)  $f(0) = 0$  - početak kretanja,
- 2)  $f'(0) = 0$  - horizontalna tangenta,
- 3)  $f(0,5) = 0,5$  - uslov simetrije.

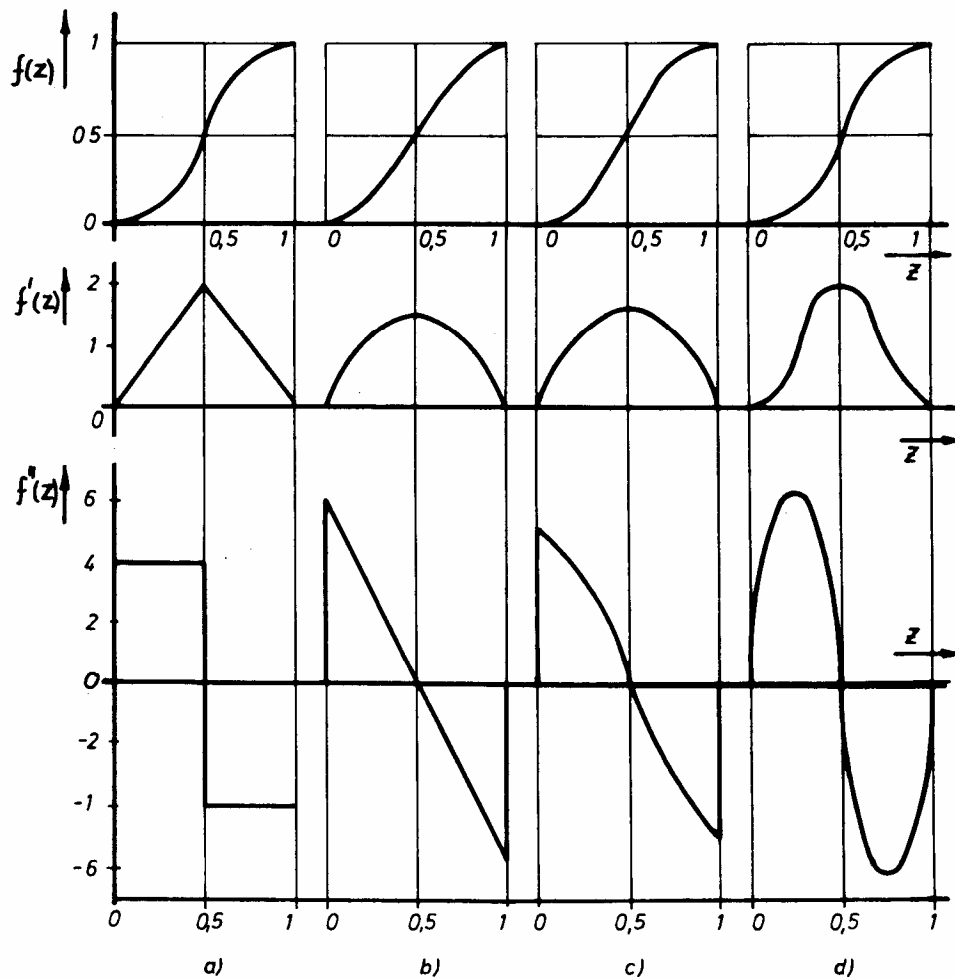
Zamenom prvog uslova u opštem obliku jednačine (5.17):

$$f(z) = A_0 + A_1 \cdot z + A_2 \cdot z^2 \quad (5.19)$$

dobija se koeficijent  $A_0=0$ , iz drugog uslova sledi  $A_1=0$  i konačno, iz trećeg uslova dobija se  $A_2=2$ .

Zamenom ovih koeficijenata u jednačini (5.19), normirana prenosna funkcija nultoga reda dobija oblik:

$$f(z) = 2z^2. \quad (5.20)$$



Sl.5.23.

Prenosne funkcije prvog, drugog i trećeg reda su, u ovom slučaju:

$$f'(z) = 4z, \quad f''(z) = 4, \quad f'''(z) = 0. \quad (5.21)$$

Istim postupkom, ili iz uslova simetričnosti, dobija se za drugu granu, u oblasti  $0,5 < z < 1$ :

$$f(z) = 1 - 2(1-z)^2,$$

kao i:

$$f'(z) = 4(1-z), \quad f''(z) = -4, \quad f'''(z) = 0. \quad (5.22)$$

**Kubna parabola (slika 5.23b)**, kao prelazna normirana prenosna funkcija, dobija se iz opšteg oblika:

$$f(z) = A_0 + A_1 \cdot z + A_2 \cdot z^2 + A_3 \cdot z^3 \quad (5.23)$$

uz granične uslove  $f(0)=0$ ,  $f(1)=1$ ,  $f'(0)=0$  i  $f'(1)=0$ , kao:

$$f(z) = 3z^2 - 2z^3. \quad (5.24)$$

**Trigonometrijske normirane prenosne funkcije** imaju povoljnije karakteristike u odnosu na stepene prenosne funkcije, zahvaljujući graničnim uslovima koje moraju da zadovolje i mogućnostima optimizacije.

**Sinoida (slika 5.23c)** kao prelazna normirana prenosna funkcija:

$$f(z) = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi z) \quad (5.25)$$

dobijena je integracijom željene prenosne funkcije prvoga reda:

$$f'(z) = A_1 \cdot \sin(A_2 \cdot z), \quad (5.26)$$

uz granične uslove  $f(0)=0$ ,  $f'(0)=f'(1)=0$  i  $f(0,5)=0,5$ .

**Bestehorn-ova sinoida (slika 5.23d)** kao prelazna normirana prenosna funkcija:

$$f(z) = z - \frac{1}{2} \sin(2\pi z) \quad (5.27)$$

dobijena je integracijom željene prenosne funkcije drugoga reda:

$$f''(z) = A_1 \cdot \sin(A_2 \cdot z) \quad (5.28)$$

uz granične uslove:  $f(0)=0$ ,  $f(1)=1$ ,  $f'(0)=f'(1)=0$  i  $f''(0)=f''(0,5)=f''(1)=0$ . Jednačina *Bestehorn*-ove sinoida predstavlja razliku prave i sinusne linije.

Za međusobno upoređivanje normiranih prenosnih funkcija, pored grafičkog prikaza (**slika 5.23**), može da posluži i tabelarni prikaz koji sadrži značice maksimalnih vrednosti i to:

- za brzinu -  $C_v = f'_{\max}(z)$ ,
- za ubrzanje -  $C_a = f''_{\max}(z)$ ,
- za trzaj -  $C_j = f'''_{\max}(z)$ ,
- za dinamički pogonski moment -  $C_M = (f'(z) \cdot f''(z))_{\max}$ .

Normirana prenosna funkcija	$C_v$	$C_a$	$C_j$	$C_M$
Kvadratna parabola	2	4	$+\infty$	8
Kubna parabola	1,5	6	$+\infty$	3,46
Sinoida	1,57	4,93	$+\infty$	3,88
<i>Bestehorn</i> -ova sinoida	2	6,28	39,5	8,16

### 5.3.2. Poluprečnik osnovnog kruga

Cilj ove etape sinteze bregastih mehanizama je određivanje dimenzija bregaste ploče tako da minimalni ugao prenosa  $\mu_{\min}$  ne bude ispod dozvoljene vrednosti (odjeljak 3.2.3.).

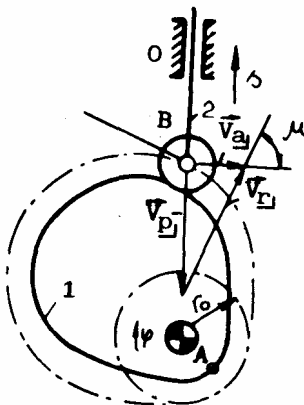
Minimalne dozvoljene vrednosti ugla prenosa  $\mu_{\min \text{ doz}}$  zavise od broja obrtaja bregaste ploče.

Za sporohodne bregaste mehanizme ( $n < 30 \text{ min}^{-1}$ ) je  $\mu_{\min \text{ doz}} > 45^\circ$ , a

za brzohodne bregaste mehanizme ( $n > 30 \text{ min}^{-1}$ ) je  $\mu_{\min \text{ doz}} > 65^\circ$ .

Za period spuštanja vodjenog člana, vrednosti minimalnog ugla prenosa mogu biti manje za  $6-8^\circ$ .

Kod bregastog mehanizma za **transformaciju rotacionog u translatorno kretanje (slika 5.24)** ugao prenosa je (oštar) ugao između tangente profila brega i pravca translacije klizača, odnosno između pravaca relativne i apsolutne brzine.



Sl.5.24.

Sa **slike 5.24** sledi:

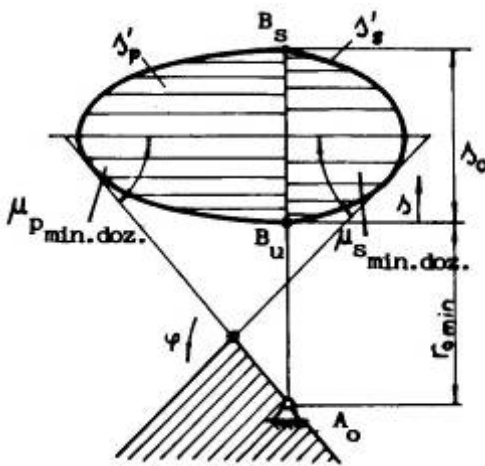
$$\operatorname{tg} \mu = \frac{v_p}{v_a} = \frac{(r_o + s) \cdot \omega_{10}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{r_o + s}{s'} \quad (5.29)$$

odakle se, za poznatu prenosnu funkciju  $s(\varphi)$ , dobija  $r_o(\mu)$  u obliku:

$$r_o \geq s' \cdot \operatorname{tg} \mu - s \quad (5.30)$$

Jednačina (5.30) formuliše vrednost najmanjeg dozvoljenog poluprečnika osnovnog kruga za zadati minimalni ugao prenosa.

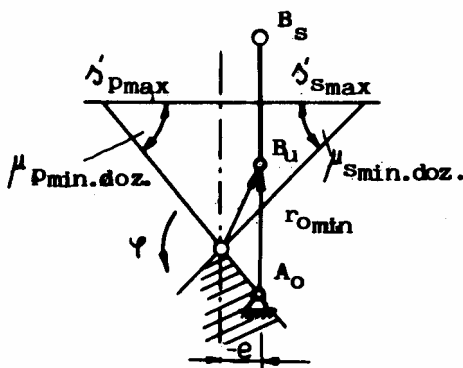
Grafička interpretacija ovog postupka, koja se zbog svoje jednostavnosti i dovoljne tačnosti rešenja češće primenjuje, realizuje se na način prikazan na **slici 5.25**. Na duž  $s_o = \overline{B_o B_s}$ , koja predstavlja hod vodjenog



Sl.5.25.

Kako je za rad mehanizma važan apsolutni minimum prečnika osnovnog kruga, neophodno je da se na istoj slici konstruiše ortogonalni hodograf brzine za period podizanja (index  $p$ ) i period spuštanja vodjenog člana (index  $s$ ). Ispod preseka tangenti na ortogonalni hodograf brzina pod uglom  $\mu_{\min \text{ doz}}$ , dobija se oblast, šrafirano prikazana na **slici 5.25**, u kojoj treba da se nađe obrtna tačka bregaste ploče  $A_0$ . Poluprečnik osnovnog kruga je  $r_0 = A_0 B_u$ , što odgovara jednačinama (5.29) i (5.30).

Sa **slike 5.25** sledi da se najmanja bregasta ploča dobija ako se tačka  $A_0$  poklopi sa presečnom tačkom tangenti. U opštem slučaju, takav mehanizam ima ekscentricitet sa pozitivnim ili negativnim predznakom.



Sl.5.26.

Grafički postupak se može znatno pojednostaviti uvođenjem pretpostavke da će  $\mu = \mu_{\min}$  i  $s' = s'_{\max}$  biti na polovini hoda ( $s_0/2$ ). Uvođenjem ove pretpostavke, jednačina (5.29) dobija oblik:

$$\operatorname{tg} \mu_{\min} = \frac{r_{0\min} + \frac{s_0}{2}}{s'_{\max}} \quad (5.32)$$

Umesto ortogonalnog hodografa, konstrukcija se u ovom slučaju svodi na nanošenje zaokrenute vrednosti  $s'_{\max}$  (za podizanje i spuštanje) na polovini hoda ( $s_0/2$ ), a zatim nanošenje odgovarajućih veličina ugla  $\mu_{\min \text{ doz}}$  (**slika 5.26**).

Iako približan, ovaj skraćeni, **Flocke-ov postupak** daje dovoljno tačne rezultate, obzirom na to da se konstruktivnim uslovima ne traži uvek bregasta ploča minimalnih dimenzija.

Poluprečnik osnovnog kruga bregaste ploče **mehanizma sa ravnim klizačem** određuje se iz uslova da je poluprečnik krivine svih tačaka profila brega pozitivan (**slika 5.27**).

Neka je centar krivine profila brega u tački  $B$  tačka  $B_0$ , a poluprečnik krivine:

$$\rho = \overline{B_0 B} = x + r_0 + s. \quad (5.33)$$

Ubrzanje tačke  $B_0$ , koja se okreće konstantnom ugaonom brzinom  $\omega_{10}$  oko tačke  $A_0$ , je:

$$a_{B_0} = a_{B_{0N}} = \overline{B_0 A_0} \cdot \omega_{10}^2. \quad (5.34)$$

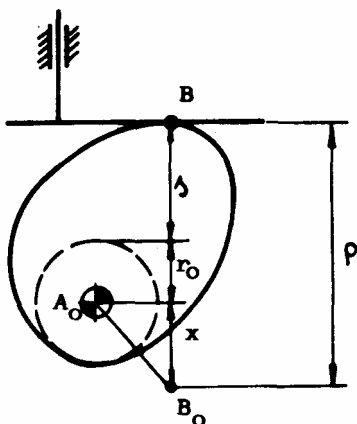
Kako duž  $\overline{B_0 A_0}$  predstavlja u odgovarajućoj razmeri ubrzanje  $a_{B_0}$ , a duž  $x$  projekciju tog ubrzanja na pravac kretanja klizača, sledi da je:

$$\ddot{s} = s'' \cdot \omega_{10}^2 = x \cdot \omega_{10}^2, \quad (5.35)$$

odnosno, duž  $x$  odgovara prenosnoj funkciji drugoga reda  $s''$ .

Iz uslova da je:

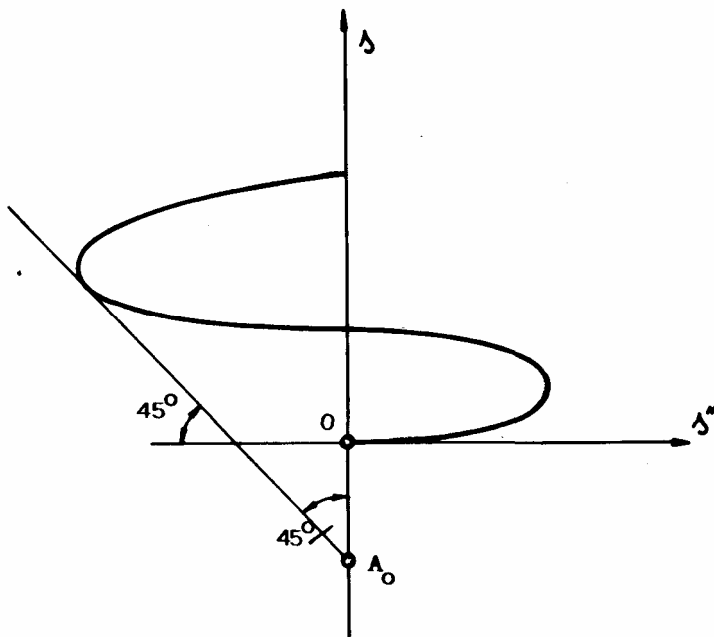
$$\rho = s'' + r_0 + s > 0, \quad (5.36)$$



Sl.5.27.

sledi da je poluprečnik osnovnog kruga:

$$r_o > -(s'' + s). \quad (5.37)$$



Sl.5.28.

Minimalni poluprečnik osnovnog kruga može se dobiti i grafičkim putem, iz dijagrama  $s''(s)$  (slika 5.28).

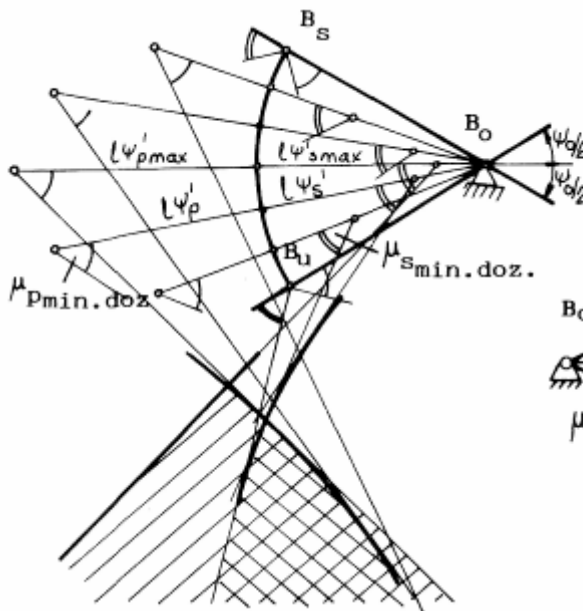
Tačka  $A_0$  se dobija u preseku ose  $s$  i tangente na krivu  $s''(s)$ , koja zaklapa ugao od  $45^\circ$  sa osom  $s$ . Duž  $A_0O$  određuje minimalni poluprečnik osnovnog kruga, čime je zadovoljen uslov:

$$-\frac{s''}{r_o + s} < 1, \quad (5.38)$$

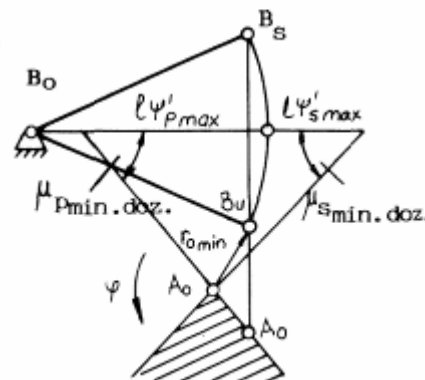
koji proizilazi iz jednačine (5.37).

Osnovne dimenzije mehanizama za **transformaciju rotacionog u rotaciono kretanje** (slika 5.19) su poluprečnik osnovnog kruga ( $r_o$ ), dužina balansirera ( $l$ ) i dužina postolja ( $d$ ).

Uz napomenu da je  $s_o = l \cdot \psi_o \cong \overline{B_u B_s}$ , prethodna razmatranja se mogu primeniti i na ovu grupu mehanizama. Zaokrenute brzine  $s' \cong l \cdot \psi'$  nanose se iz odgovarajućih tačaka na luku  $B_u B_s$  pod uglom  $\psi$  (slika 5.29).



Sl.5.29.



Sl.5.30.

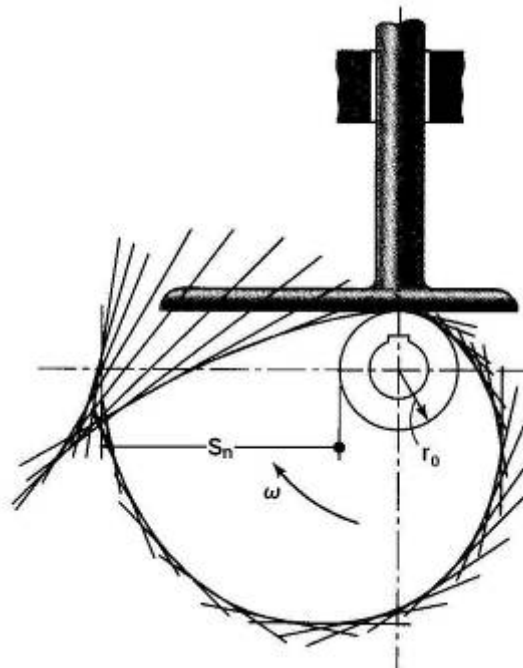
Prave, povučene pod uglom  $\mu_{\min \text{ doz}}$  iz vrhova zaokrenutih brzina  $s'$ , odnosno obvojnice ovako povučenih pravih za period podizanja i period spuštanja, ograničavaju oblast mogućih rešenja.

I u ovom slučaju može se koristiti približan, *Flocke*-ov postupak (slika 5.30), ako se na sredini luka  $B_u B_s$  nanese zaokrenute vrednosti  $l \cdot \psi'_{p \max}$  i  $l \cdot \psi'_{s \max}$  i iz njihovih vrhova povuku prave pod uglom  $\mu_{\min \text{ doz}}$ , koje u ovom slučaju ograničavaju oblast mogućih rešenja.

### 5.3.3. Konstrukcija profila bregaste ploče

Profil brega se konstruiše na osnovu prenosne funkcije  $s(\varphi)$ , odnosno  $\psi(\varphi)$  i usvojenog poluprečnika osnovnog kruga. Profil brega se određuje postupkom koji je inverzan postupcima opisanim pri analizi bregastih mehanizama (**slike 5.16 - 5.19**). Rastojanja  $s_n(\varphi_n)$  iz dijagrama  $s(\varphi)$  nanose se na odgovarajuće pravce od osnovnog kruga, tako što ugao  $\varphi$  raste od početnog ugla ( $s=0$ ) u smeru suprotnom od smeru ugaone brzine. Ako je klizač sa točkićem, ekvidistantna kriva (u odnosu na dobijenu teorijsku krivu), na rastojanju jednakom poluprečniku točkića, predstavlja stvarni profil brega.

Kod bregastog mehanizma sa ravnim klizačem najpre se nanosi veličina  $s_n(\varphi_n)$  od osnovnog kruga, a zatim u krajnjoj tački postavlja normala na ovu duž. Ove normale predstavljaju tangente profila brega čija se kontura dobija kao njihova obvojnica (**slika 5.31**).

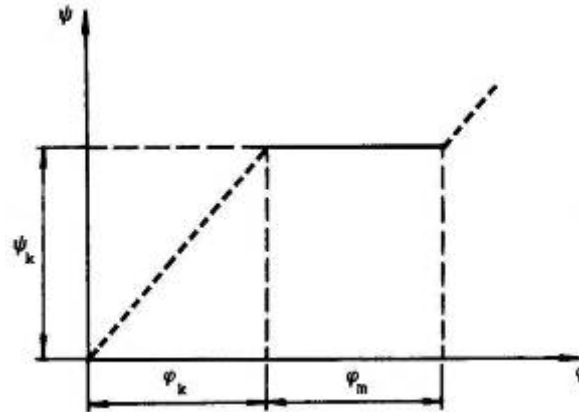


Sl.5.31.

Za bregaste mehanizme kojima se transformiše rotaciono u rotaciono kretanje, najpre se na osnovu dimenzija mehanizma određuje ugao  $\psi_o$  (jednačina 5.9). Zaokretanjem tačke  $B_o$  oko  $A_o$  za ugao  $\varphi_n$ , u smeru suprotnom od smeru ugaone brzine  $\omega_{10}$ , dobija se tačka  $B_{0n}$  (**slika 5.19**). Tačka  $B_n$  profila brega dobija se na pravcu postavljenom kroz  $B_{0n}$ , pod uglom  $\psi_o + \psi_n$  u odnosu na pravac  $A_o B_{0n}$  ( $\psi_n$  je određen prenosnom funkcijom  $\psi(\varphi)$ ), na odstojanju jednakom dužini balansijera  $\overline{B_{0n}B_n}$ .

## 6. MEHANIZMI SA PREKIDNIM KRETANJEM

Mehanizmi sa prekidnim kretanjem (koračni mehanizmi) transformišu kontinuirano progresivno kretanje pogonskog člana u kretanje sa periodom mirovanja, vodjenog člana.



Sl.6.1.

Prenosna funkcija mehanizama sa prekidnim kretanjem (**slika 6.1**) sastoji se iz dva dela, iz:

- perioda kretanja  $\varphi_k$  u kome se vodjeni član kreće po prenosnoj funkciji  $\psi(\varphi)$  i
- perioda mirovanja  $\varphi_m$  u kome vodjeni član miruje ( $\psi = \text{const.}$ ), a pogonski član nastavlja kretanje.

Najrasprostranjeniji ravni mehanizmi sa prekidnim kretanjem su:

- mehanizam sa malteškim krstom,
- mehanizam sa zvezdastim točkom i
- mehanizam sa skakavicom.

Važna karakteristika kod mehanizama sa prekidnim kretanjem je odnos vremena kretanja vodjenog člana ( $t_k$ ) prema ukupnom periodu kretanja ( $t_k + t_m$ ):

$$v = \frac{t_k}{t_k + t_m} \quad (6.1)$$

gde je  $t_m$  - vreme mirovanja vodjenog člana.

Za konstantnu pogonsku ugaonu brzinu ( $\omega_{10} = \text{const.}$ ) je:

$$v = \frac{\varphi_k}{2\pi} \quad (6.2)$$

Upoređivanje kvaliteta različitih koračnih mehanizama zasniva se na uporedjenju njihovih dinamičkih karakteristika koje zavise od oblika prenosne funkcije u fazi kretanja vodjenog člana (kao kod bregastih mehanizama), posebno u prelaznim tačkama ( $\varphi=0$ ,  $\varphi=\varphi_k$ ).

### 6.1. Mehanizam sa malteškim krstom

Mehanizam sa malteškim krstom je razvijen iz kulisnog mehanizma, skraćivanjem kulise (**slika 6.2**) koje je omogućilo da kulisni kamen može izaći iz zahvata kada kulisa dospe u mrtvi položaj.

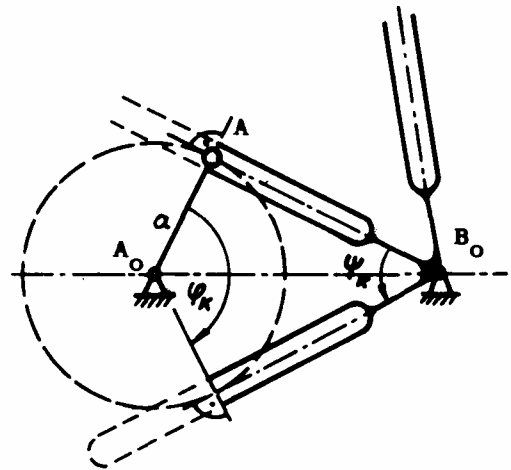
Mehanizam sa malteškim krstom spada u grupu tročlanih mehanizama i sastoji se od pogonskog člana (1), vodjenog člana (2) i postolja (**slika 6.3**); njime se najčešće realizuje koračno kretanje vodjenog člana za  $\psi_k = \pi/2$ .

Rukavac **A** se kreće po krugu poluprečnika  $a = \overline{A_0A}$ , ulazi u prorez vodjenog člana (2) i vrši njegovo okretanje oko tačke **B**. Nakon što rukavac izađe iz zahvata, lučna geometrijska kočnica **CB** obezbedjuje mirovanje vodjenog člana (2).

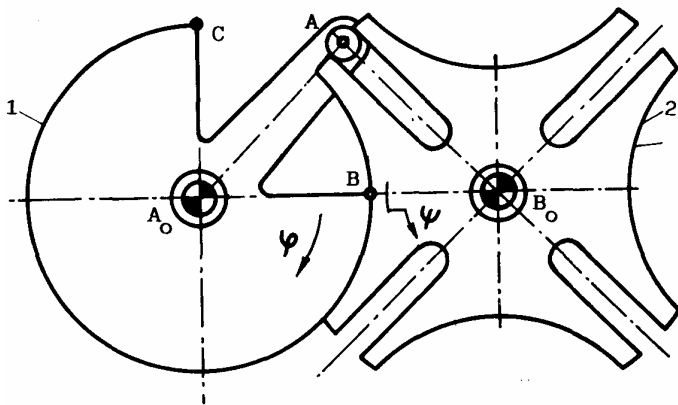


Prenosna funkcija u fazi kretanja vodjenog člana (**slika 6.3b**) odgovara prenosnoj funkciji kulisnog mehanizma (**slika 6.2**) između dva krajnja položaja:

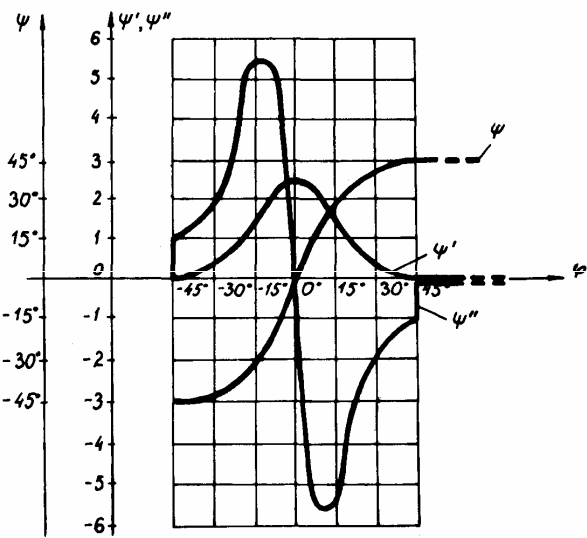
$$\psi = \arctg \frac{a \cdot \sin \varphi}{d - a \cdot \cos \varphi} \quad (6.3)$$



Sl.6.2



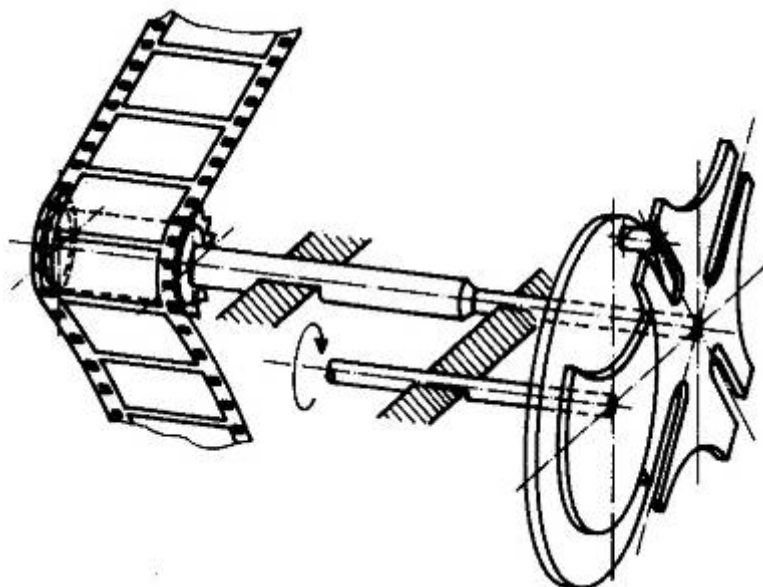
a)



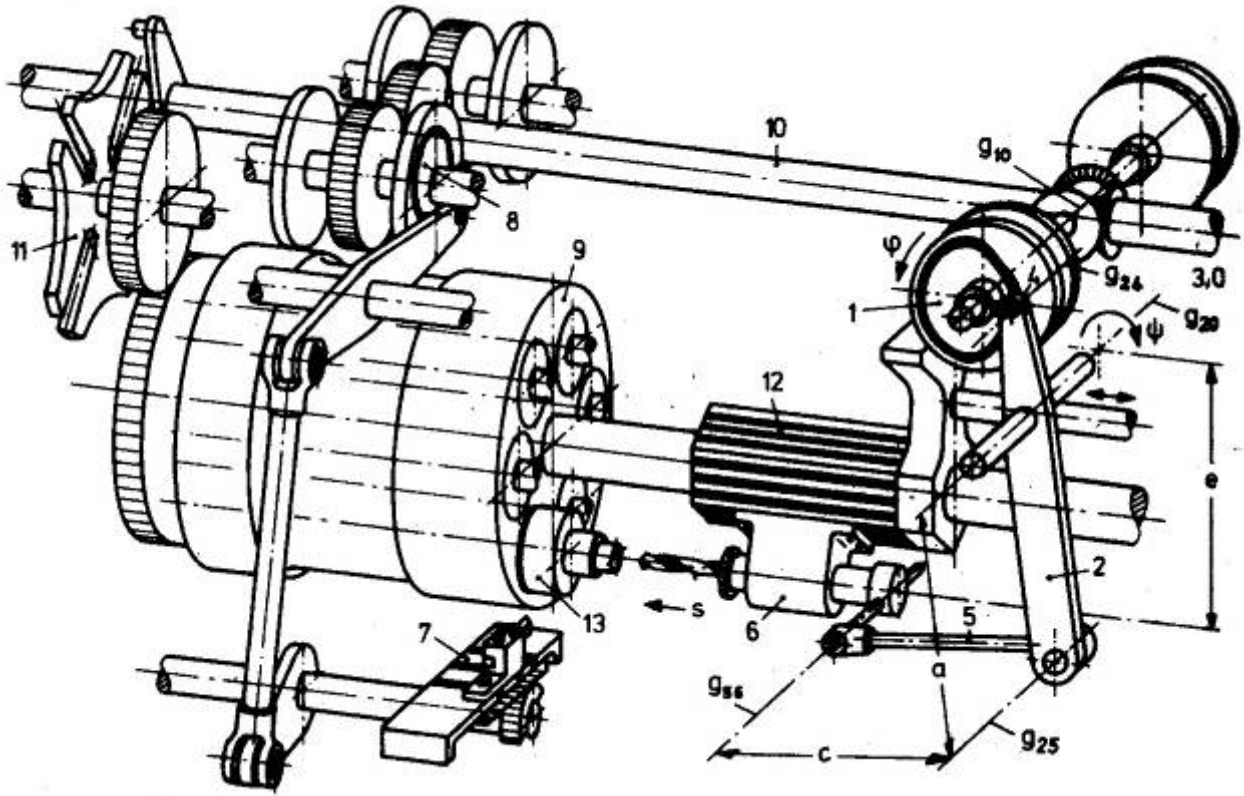
b)

Sl.6.3

Tipični primeri primene mehanizma sa malteškim krstom prikazani su na **slici 6.4.** (pomeranje filmske trake u kinoprojektoru) i **slici 6.5.** (viševretni automat).

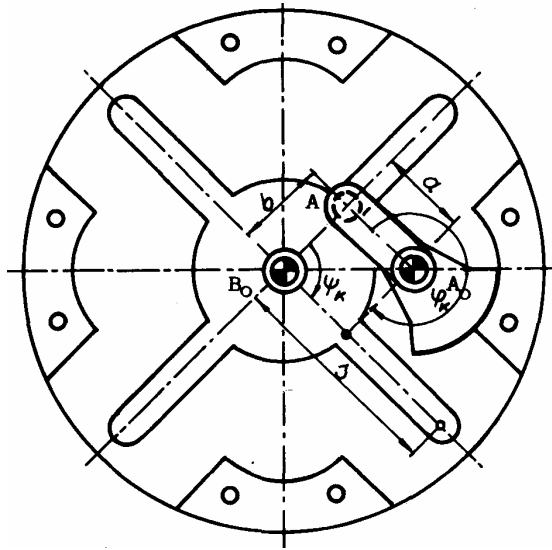


Sl.6.4.

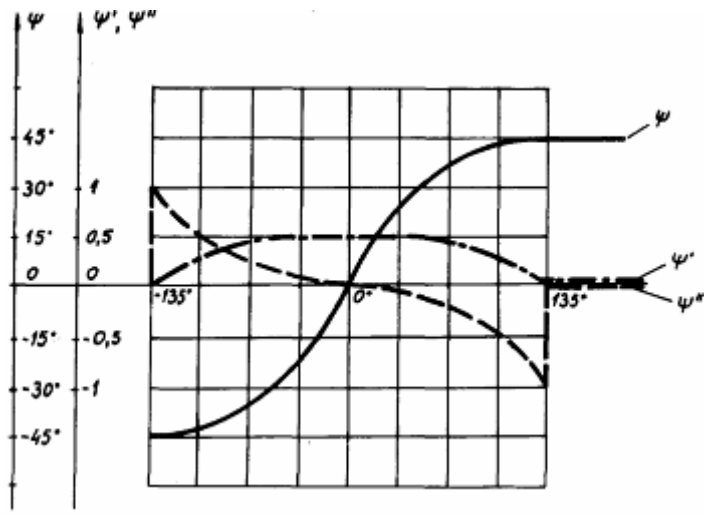


Sl.6.5.

Mehanizam sa **unutrašnjim** malteškim krstom (slika 6.6) razvijen je korišćenjem drugog, odsečenog dela kulise sa slike 6.2.



a)

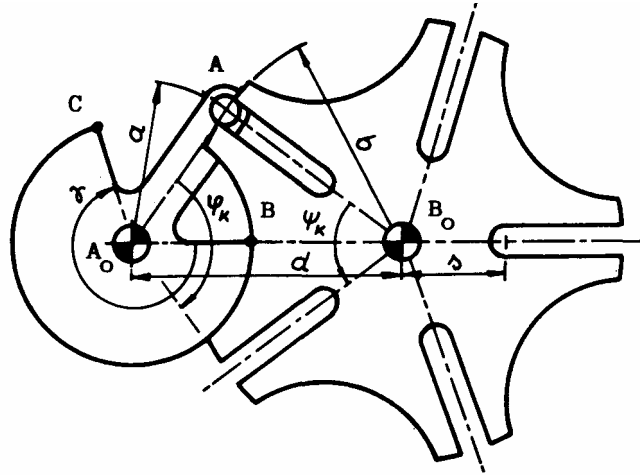


b)

Sl.6.6.

U opštem slučaju, vodjeni član (2) može imati  $n$  proreza - kulisa (na **slici 6.7.** je  $n=5$ ), pri čemu je ugao između dva proreza:

$$\psi_k = \frac{2\pi}{n}. \quad (6.4)$$



Sl.6.7.

Vodjeni član se pomeri za ugao  $\varphi_k$  obrtanjem pogonskog člana za ugao:

$$\varphi_k = \pi - \psi_k = \pi \frac{n-2}{n}. \quad (6.5)$$

Vodjeni član se okrene za pun krug ( $2\pi$ ) za  $n$  obrtaja pogonskog člana, pa se može reći da je prenosni odnos mehanizma jednak  $n$ .

Prenosni odnos se može definisati i kao odnos pomeranja pogonskog i vodjenog člana u fazi kretanja vodjenog člana:

$$\frac{\varphi_k}{\psi_k} = \frac{n-2}{2}. \quad (6.6)$$

Karakteristične dužine pogonskog i vodjenog člana su:

$$a = \overline{A_0A} = d \cdot \sin \frac{\psi_k}{2}, \quad (6.7)$$

i

$$b = \overline{B_0B} = d \cdot \cos \frac{\psi_k}{2},$$

a njihov odnos je:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \frac{\psi_k}{2}. \quad (6.8)$$

Dubina proreza kulise definiše se veličinom  $s$  (**slika 6.7**):

$$s \leq (d-a) = d \cdot \left(1 - \sin \frac{\psi_k}{2}\right), \quad (6.9)$$

a ugao lučne kočnice **CB** je:

$$\gamma = 2\pi - \varphi_k = \pi \frac{n+2}{n}. \quad (6.10)$$

Za **unutrašnji** malteški krst (**slika 6.6**) važi:

$$\psi_k = \frac{2\pi}{n}, \quad (6.11)$$

$$\varphi_k = \pi \frac{n+2}{n},$$

a njihov odnos je:

$$\frac{\varphi_k}{\psi_k} = \frac{n+2}{2}. \quad (6.12)$$

Karakteristične dužine članova su:

$$a = \overline{A_0A} = d \cdot \sin \frac{\psi_k}{2}, \quad (6.13)$$

i

$$b = \overline{B_0B} = d \cdot \cos \frac{\psi_k}{2},$$

a njihov odnos je:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \frac{\psi_k}{2}. \quad (6.14)$$

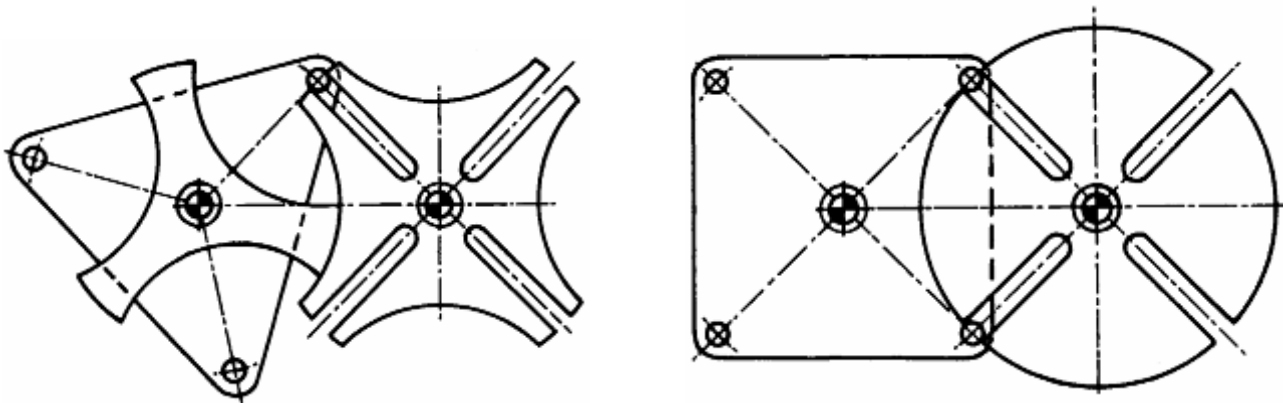
Dubina proreza kulise je:

$$s \geq (d+a) = d \cdot \left(1 + \sin \frac{\psi_k}{2}\right). \quad (6.15)$$

a ugao lučne kočnice:

$$\gamma = \pi \frac{n-2}{n}. \quad (6.16)$$

Broj pogonskih rukavaca može biti i veći. Na **slici 6.8.** prikazan je malteški krst sa 4 proreza i 3 (**slika 6.8a**), odnosno 4 rukavca (**slika 6.8b**).



a)

b)

Sl.6.8.

Vodjeni član mehanizma sa **slike 6.8a.** se za svaku trećinu obrta pogonskog člana okrene za četvrtinu obrta. Ciklus se ponavlja tri puta tokom jednog obrtaja pogonskog člana, pa je time omogućeno smanjenje broja obrtaja pogonskog člana.

Ako je broj ravnomerno raspoređenih rukavaca **m**, odnos vremena kretanja prema vremenu jednog obrta pogonskog člana uvećava se **m** puta. Kako ukupan odnos ne može biti veći od jedinice sledi da je:

$$m \cdot v = \frac{m(n-2)}{2n} \leq 1 \quad (6.17)$$

odnosno,

$$m \leq \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}, \quad (6.18)$$

gde su **m** i **n** celi brojevi.

Ako je na primer **m=4**, za **n=4** (**slika 6.8b**) vreme mirovanja je jednako nuli, a u trenutku kada jedan rukavac izlazi iz zahvata i ugaona brzina vodjenog člana postane nula, sledeći ulazi u zahvat, pa kočnica nije potrebna.

Relativne dimenzije mehanizama sa spoljašnjim malteškim krstom date su u **tabeli 6.1**, a sa unutrašnjim malteškim krstom u **tabeli 6.2**.

Tabela 6.1.

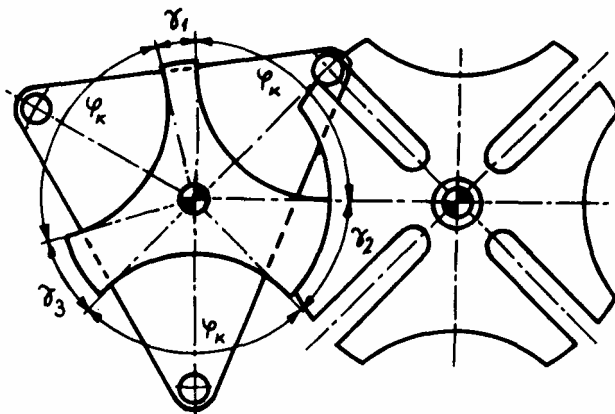
$n$	$\frac{\psi_K}{2}$	$\frac{\varphi_K}{2}$	$\frac{\varphi_K}{\psi_K}$	$\frac{a}{d}$	$\frac{b}{d}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{\delta}{d}$	$\gamma$	$\nu$	$m_{\max}$
3	60°	30°	0,5	0,8660	0,5000	0,5774	0,1339	300°	0,1667	6
4	45°	45°	1	0,7071	0,7071	1,0000	0,2929	270°	0,2500	4
5	36°	54°	1,5	0,5878	0,8090	1,3764	0,4122	252°	0,3000	3
6	30°	60°	2	0,5000	0,8660	1,7320	0,5000	240°	0,3333	3
7	25°43'	64°17'	2,5	0,4339	0,9009	2,0765	0,5661	231°26'	0,3571	2
8	22°30'	67°30'	3	0,3827	0,9239	2,4142	0,6173	225°	0,3750	2
9	20°	70°	3,5	0,3420	0,9397	2,7475	0,6580	220°	0,3889	2
10	18°	72°	4	0,3090	0,9511	3,0777	0,6910	216°	0,4000	2
$\infty$	0°	90°	$\infty$	0	1	$\infty$	1	180°	0,5000	2

Tabela 6.2

$n$	$\frac{\psi_K}{2}$	$\frac{\varphi_K}{2}$	$\frac{\varphi_K}{\psi_K}$	$\frac{a}{d}$	$\frac{b}{d}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{\delta}{d}$	$\gamma$	$\nu$
3	60°	150°	2,5	0,8660	0,5000	0,5774	1,8660	60°	0,8333
4	45°	135°	3	0,7071	0,7071	1,0000	1,7071	90°	0,7500
5	36°	126°	3,5	0,5878	0,8090	1,3764	1,5878	108°	0,7000
6	30°	120°	4	0,5000	0,8660	1,7364	1,5000	120°	0,6667
7	25°43'	115°43'	4,5	0,4339	0,9009	2,0765	1,4339	128°34'	0,6429
8	22°30'	112°30'	5	0,3827	0,9239	2,4142	1,3827	135°	0,6250
9	20°	110°	5,5	0,3420	0,9397	2,7475	1,3420	140°	0,6111
10	18°	108°	6	0,3090	0,9511	3,0777	1,3090	144°	0,6000
$\infty$	0°	90°	$\infty$	0	1	$\infty$	1	180°	0,5000

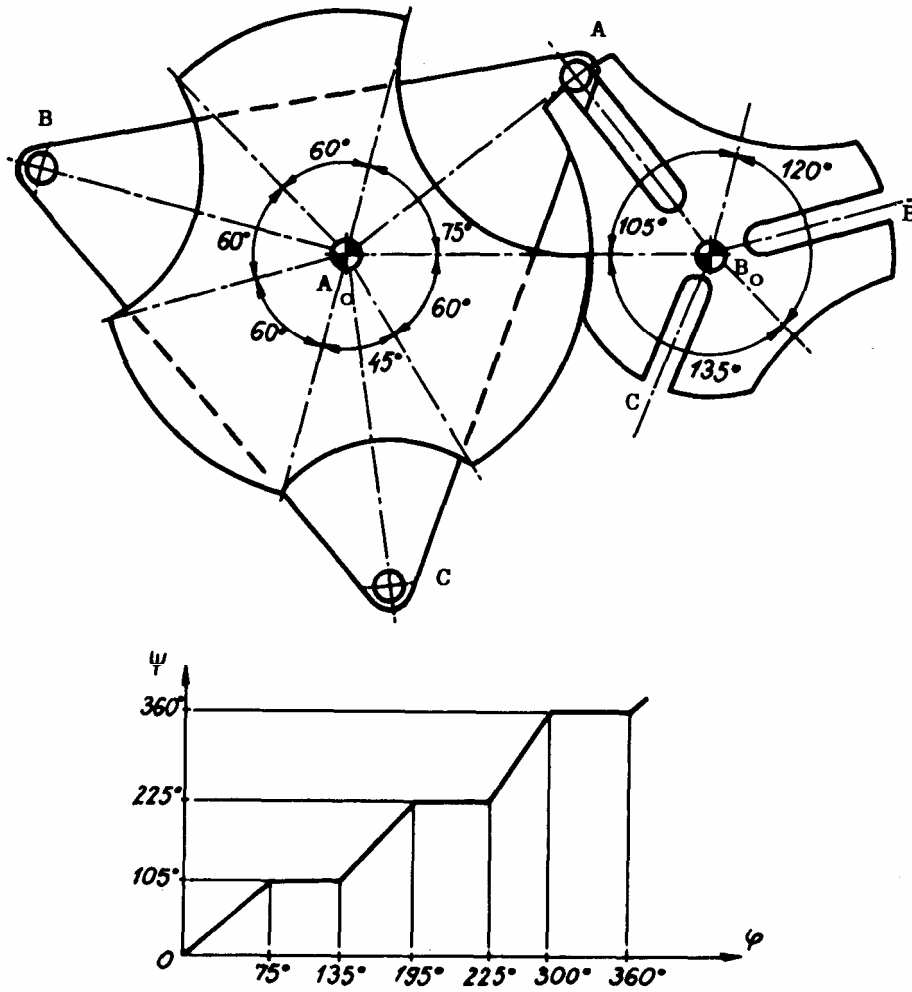
Kod mehanizama sa konstantnim korakom i različitim periodima mirovanja (slika 6.9) pogonski rukavci nisu simetrično raspoređeni, pa zbir uglova lučnih kočnica mora biti:

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i = \pi \left( 2 - \frac{m(n-2)}{n} \right) \quad (6.19)$$



Sl.6.9.

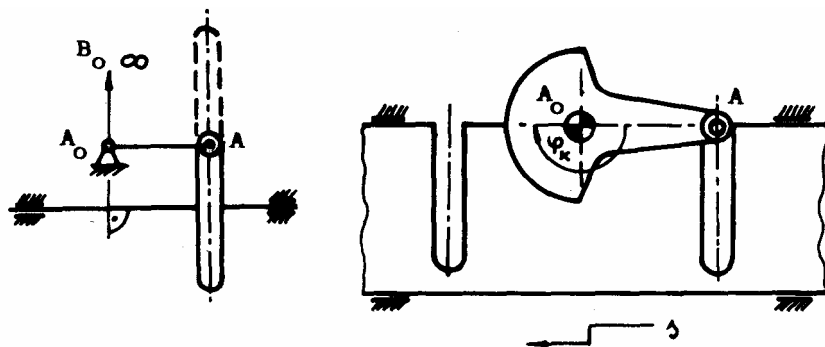
Mehanizam čiji pogonski član ima više rukavaca, a vodjeni član proreze različite dužine (slika 6.10) ima prenosnu funkciju sa promenljivim korakom  $\psi_k$  u toku jednog obrta pogonskog člana.



Sl.6.10.

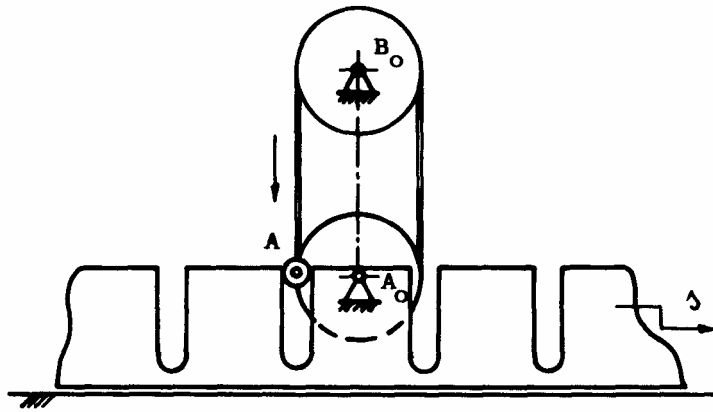
Specijalni slučajevi mehanizma sa malteškim krstom, sa beskonačno velikim brojem perioda ( $n \rightarrow \infty$ ), odnosno beskonačno velikim prečnikom vodjenog člana (slika 6.11) imaju prenosnu funkciju:

$$s = a \cdot (1 - \cos \varphi), \quad s' = a \cdot \sin \varphi, \quad s'' = a \cdot \cos \varphi. \quad (6.20)$$



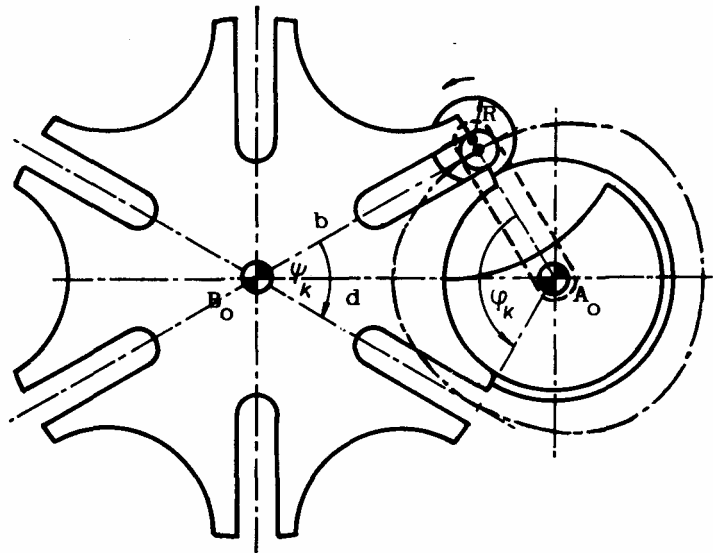
Sl.6.11.

Trajanje perioda mirovanja može se povećati mehanizmom sa trakom za koju je pričvršćen pogonski rukavac (slika 6.12).



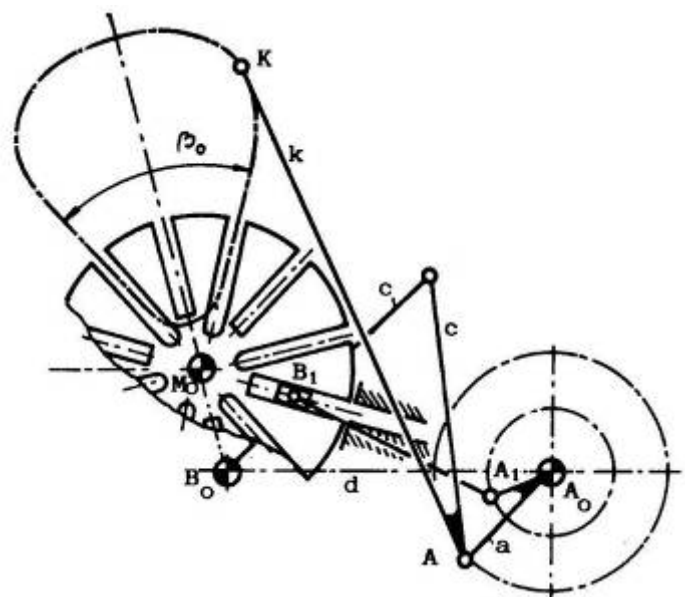
Sl. 6.12.

Za pogon malteškog krsta se umesto kružne putanje može koristiti i trohoida (odjeljak 4.2.2.). Naročito pogodne su putanje *Ball-ove* tačke (slika 4.12) kojima se obezbeđuje postepeno ubrzavanje vodjenog člana (slika 6.13).



Sl. 6.13.

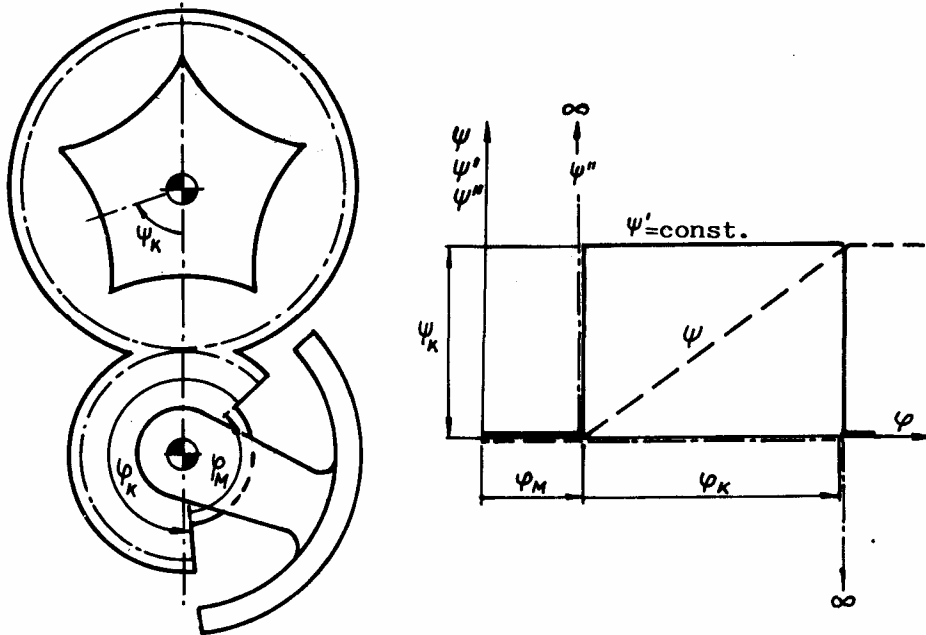
Postepeno ubrzavanje vodjenog člana može se postići i ako se, kao pogonska putanja, koristi simetrična putanja tačaka spojke polužnog četvorougla  $A_0ABB_0$ , sa prevojnim i pravolinijskim delovima, čije tangente zaklapaju ugao  $0 \leq \beta_0 \leq \pi$  (slika 6.14). Klipni mehanizam  $A_0A_1B_1$  vrši funkciju geometrijske kočnice.



Sl. 6.14.

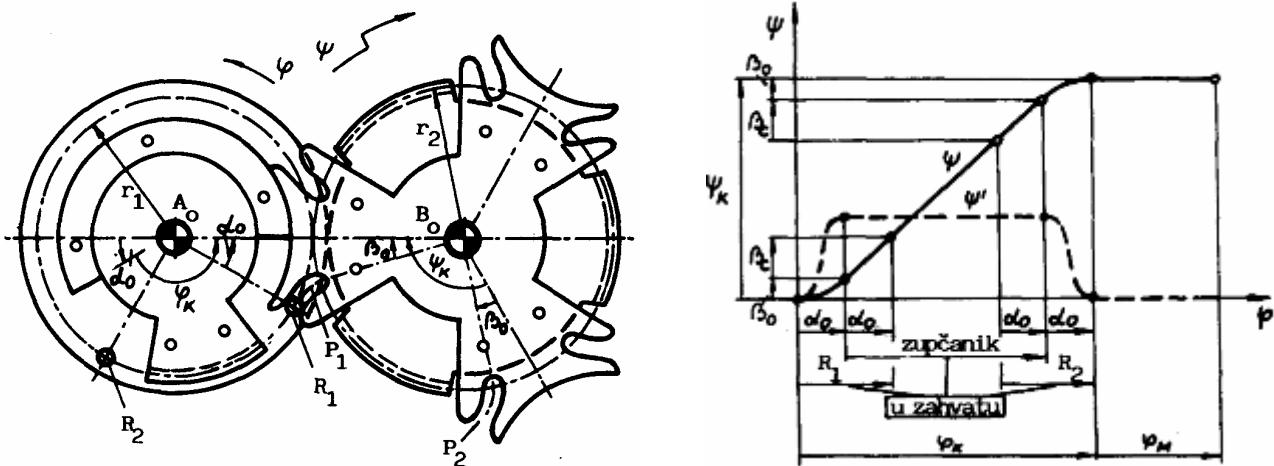
## 6.2. Mehanizam sa zvezdastim točkom

Koračno kretanje se može realizovati i zupčastim parom kod koga je pogonski član segment zupčanika (slika 6.15).



Sl. 6.15.

Prenosna funkcija ovakvog mehanizma bi bila veoma nepovoljna zbog beskonačno velikih ubrzanja pri uspostavljanju i pri prekidu kontakta zupčastog para. Zbog toga se za pokretanje i zaustavljanje vodjenog člana koriste rukavci na pogonskom i odgovarajući prorezi na vodjenom članu (slika 6.16).



Sl. 6.16.

Pre nego što zupčanici ostvare kontakt, rukavac  $R_1$  ulazi u prorez  $P_1$  i ubrzava vodjeni član do ugaone brzine zupčastog para. U sledećoj fazi, pogonski i vodjeni član su u dvostrukoj vezi (rukavac se nalazi u prorezu, a i zupčanici su u zahvatu), a zatim rukavac izlazi iz proreza. Pre kraja kretanja, koje se nadalje odvija preko zupčaste veze, rukavac  $R_2$  ulazi u prorez  $P_2$  i nakon prekida dvostrukog zahvata preuzima ulogu kočnice, postepeno smanjujući brzinu vodjenog člana do nule. Mirovanje je obezbeđeno lučnom geometrijskom kočnicom.

Putanja rukavaca definiše oblik proreza kojim se obezbeđuje nesmetani izlaz iz zahvata rukavca za ubrzanje  $R_1$ , kao i ulaz rukavca za usporenje  $R_2$ . Kako se radi o kotrljanju kruga po krugu, a  $R_1$  i  $R_2$  su na obimu kruga, prorez je oblika cikloide.

Da bi se kretanje odvijalo bez udara u trenutku ulaska i izlaska rukavca iz zahvata, cikloida i krug na kome se nalazi rukavac moraju imati zajedničku tangentu.

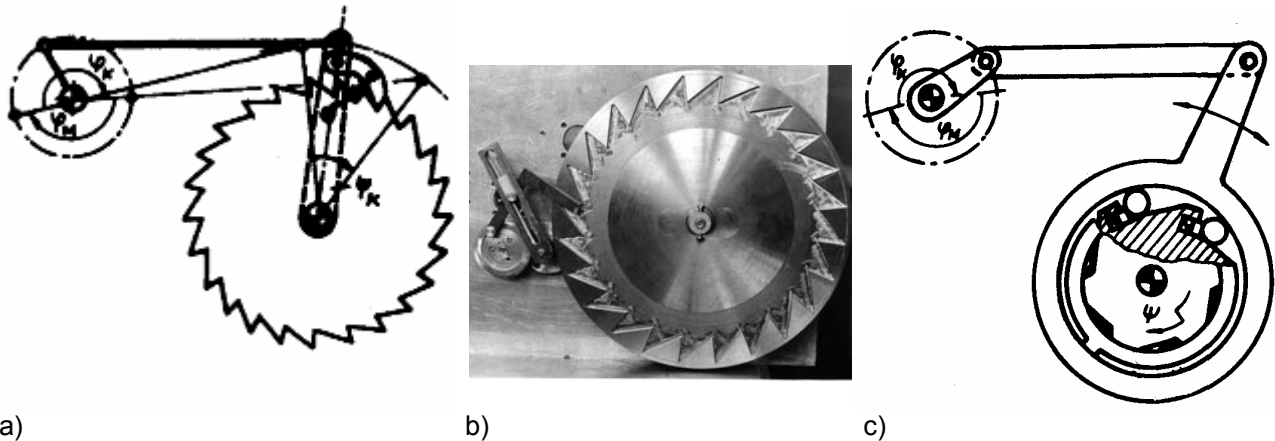


### 6.3. Mehanizmi sa skakavicom

Koračni mehanizmi mogu biti razvijeni i na osnovu mehanizama sa povratnom prenosnom funkcijom (tabela 1.1.). Dodatnim članom, geometrijski ili dinamički, obezbeđuje se jednosmerno kretanje vodjenog člana.

Kao osnovni mehanizam koristi se najčešće jednokrivajni mehanizam (slika 6.17), ali se mogu koristiti i njegove modifikacije - klipni i kulisni mehanizam.

Dodatni član za geometrijsko usmeravanje sastoji se iz testerasto nazubljenog točka koji se može jednosmerno pomerati pomoću skakavice vezane za balansijer (slika 6.17a). Dodatni član može biti nazubljen i sa unutrašnje strane (slika 6.17b).



a)

b)

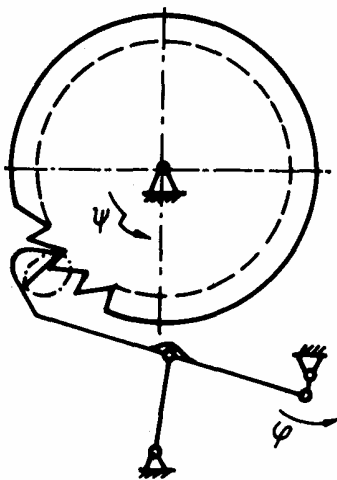
c)

Sl. 6.17.

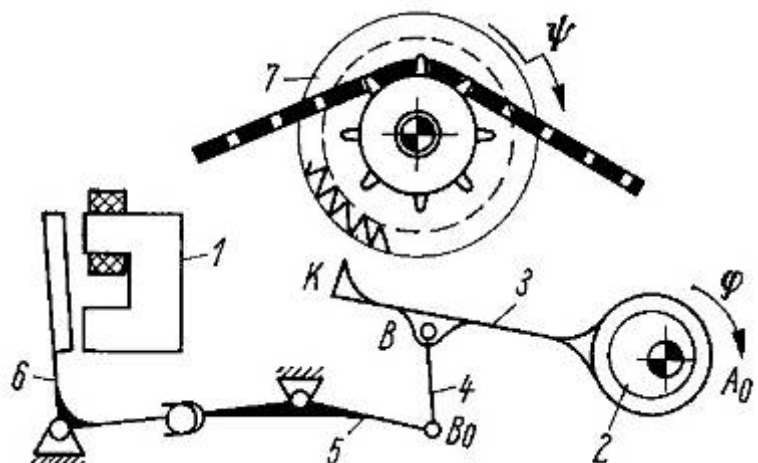
Period kretanja vodjenog člana odgovara pomeranju balansijera izmedju dva mrtva položaja polužnog četvorougla, a vraćanje balansijera u prethodni mrtvi položaj koristi se za period mirovanja. Razvoj ovog tipa mehanizma zasniva se na sintezi mehanizama sa povratnim kretanjem (poglavlje 3.2.1.).

Kod mehanizma sa samokočenjem (slika 6.17c) dodatni član dinamički usmerava kretanje vodjenog člana.

Koračno kretanje se može realizovati i vodjenjem skakavice odgovarajućom putanjom tačke spojke jednokrivajnog mehanizma (slika 6.18). Na slici 6.19. prikazana je primena ovakvog mehanizma za koračno pomeranje perforirane trake.



Sl. 6.18.



Sl. 6.19.

## 7. DINAMIKA MEHANIZAMA

Osnovni zadatak dinamike mehanizama je izučavanje kretanja pod dejstvom sila ili istraživanje uslova pod kojima se može odvijati željeno kretanje.

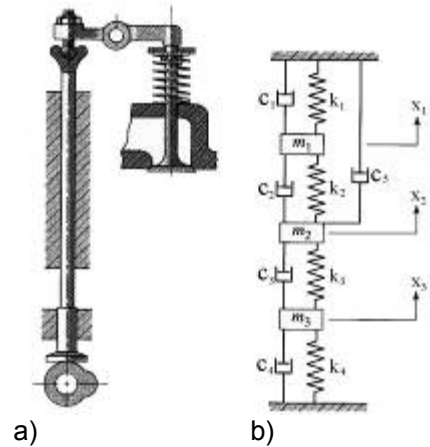
Porastom brzina i težnjom da se visokoproduktivne mašine grade primenom principa lake gradnje, kod svih vrsta mašina se javljaju dinamički problemi i potreba za detaljnom analizom dejstva sila. Većina zadataka i problema se može uopštiti i rešavati nezavisno od toga o kojoj se vrsti mašina radi (odn. u kojoj mašini je ugrađen mehanizam), pri čemu se postupak može podeliti u tri faze:

- \* formiranje dinamičkog modela mašine,
- \* rešavanje postavljenog modela,
- \* analiza rezultata i njihovog uticaja na konstrukciju mašine.

Na bazi konstrukcijske dokumentacije mašine formira se njen **model (slika 7.1)**, odnosno definišu se **elementi modela**:

- \* mase, odn. momenti inercije, kao akumulatori kinetičke energije,
- \* elastični elementi i opruge, kao akumulatori potencijalne energije,
- \* prigušivači, kao elementi koji troše mehaničku energiju, pretvarajući je u toplotnu,
- \* pobuda, odnosno elementi za dovod energije

kao i njihova uloga u energetske tokovima.



Sl.7.1.

Po utvrđivanju strukture modela definišu se **parametri modela**, odnosno veličine koje se javljaju u diferencijalnim jednačinama, uzrokovane uticajem masa, elastičnih elemenata, prigušivača i pobude. Ovaj deo procesa modeliranja sadrži najveće nesigurnosti cele dinamike mašina, pre svega zbog utvrđivanja karakteristika elastičnosti i prigušenja. Pri određivanju ovih parametara se zbog toga najčešće koriste eksperimentalni rezultati i stečena iskustva.

Model mehanizma u velikoj meri zavisi i od toga da li ga čine kruta ili elastična tela i da li se mase opruga mogu zanemariti, odnosno da li se može razmatrati diskretizovana struktura ili kontinuum. Pri rešavanju mnogih praktičnih problema moguće je zanemariti elastičnost i članove mehanizma smatrati krutim pošto promene dimenzija članova mehanizma, koje nastaju usled dejstva sila, dovode do zanemarljivo malih odstupanja prenosne funkcije mehanizma  $\psi(\varphi)$ . Osim toga, promene dimenzija članova javljaju se po pravilu u formi oscilacija, pa ukoliko su te oscilacije u podkritičnoj oblasti, onda je svrsishodno da se kao prvo, upotrebljivo približenje pretpostavi da su članovi kruti.

Modeli (diferencijalne jednačine kretanja) čak i najjednostavnijih četvoročlanih mehanizama su nelinearni i veoma složeni pa njihovo rešavanje nije moguće standardnim postupcima. Umesto ranije često korišćenih grafičkih postupaka danas se više koriste numeričke metode, posebno one sa automatskom procedurom.

Dok je prva faza, **postavljanje modela**, zadatak inženjera, druga, njegovo **rešavanje**, može se poveriti matematičarima, a treća, najslabija, **interpretacija rezultata**, zahteva inženjersko iskustvo. Pored analize rezultata i njihovog povratnog dejstva na konstrukciju, u ovoj fazi vrši se i provera adekvatnosti postavljenog modela.

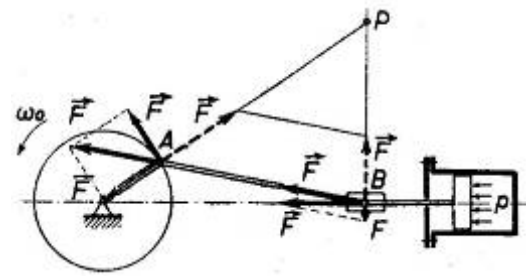
Svi **zadaci dinamike mehanizama** mogu se svrstati u dve oblasti koje nazivamo:

- \* dinamička analiza i
- \* dinamička sinteza.

**Dinamička analiza** se bavi sledećim problemima:

- \* određivanje toka kretanja mehanizma poznatih dimenzija i masa na koji deluju zadate sile,
- \* određivanje dodatne sile kojom se obezbeđuje željeno kretanje mehanizma, poznatih dimenzija i masa, na koji deluju zadate sile,
- \* određivanje sile čijim se delovanjem u određenoj tački uspostavlja ravnoteža sa zadatim silama koje deluju na mehanizam poznatih dimenzija.

Nakon rešavanja ovih zadataka, vrši se kinetostatička analiza mehanizma. **Kinetostatika** se bavi određivanjem sila u zglobovima mehanizma na osnovu kojih se dimenzionišu članovi i zglobovi mehanizma (**slika 7.2**).



SI.7.2.

**Dinamička sinteza** obuhvata metode kojima se definišu parametri mehanizma kako bi ispunjavao zadate dinamičke uslove. Zadaci dinamičke sinteze, koji najčešće proizilaze iz problema praktične primene mašina, su:

- \* rešavanje dinamičkih problema pokretanja i zaustavljanja mašine,
- \* rešavanje problema neravnomernosti hoda pogonskog člana mašine, koji se javlja kao posledica nelinearnosti prenosne funkcije (dimenzionisanje zamajca),
- \* uravnoteženje mehanizama (optimalnim rasporedom masa pokretnih delova) u cilju smanjenja sila koje deluju na postolje,
- \* uravnoteženje rotora, itd.

### 7.1. Sile i momenti

Sile i momenti koji deluju na mehanizam mogu se podeliti na:

- a) sile i momente koji vrše pozitivan rad - **pogonske sile**,
- b) sile i momente koji vrše negativan rad - **tehnoške sile i sile otpora** i
- c) sile i momente koji vrše i pozitivan i negativan rad, a čiji je ukupan učinak jednak nuli (sile težine i sile opruga).

Sve sile i momenti čine polje sila koje može biti konzervativno, autonomno i heteronomno.

Kod **konzervativnog** polja sile zavise od položaja mehanizma  $F(q)$ ,

kod **autonomnog** polja sile zavise od položaja i brzine  $F(q, \dot{q})$ , dok

kod **heteronomnog** polja sile zavise kako od položaja i brzine, tako i od vremena  $F(q, \dot{q}, t)$ .

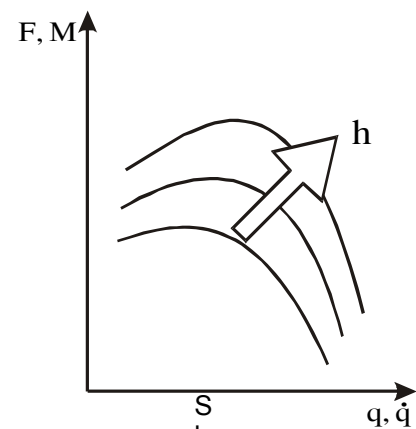
Kao posledica kretanja javljaju se inercijalne sile koje ne ulaze u polje sila, i sile u zglobovima mehanizma koje ne vrše rad, ali utiču na sile trenja koje vrše negativan rad.

#### 7.1.1. Pogonske sile i momenti

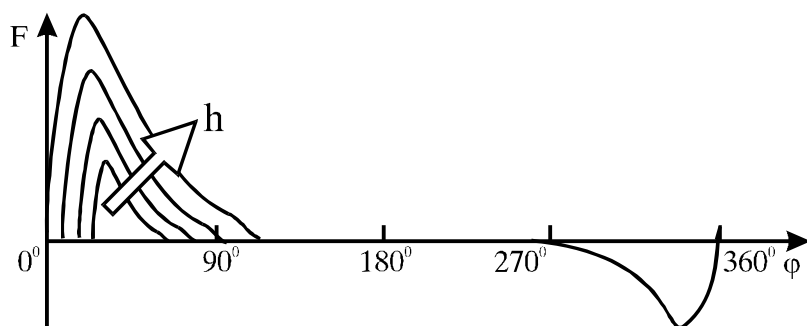
Pogonske sile i momenti se sa pogonskih mašina prenose na pogonski član mehanizma i vrše pozitivan rad:

$$\sum A > 0. \quad (7.1)$$

Zavisnost pogonske sile (momenta) od položaja mehanizma, odnosno brzine, predstavlja **mehaničku karakteristiku** pogonske mašine. Režim i način rada pogonske mašine zavisi od količine i vrste energije koja se u pogonskoj mašini pretvara u mehaničku energiju. Veličina kojom se utiče na količinu energije, odnosno režim rada, predstavlja parametar regulacije (**h**). Karakteristika pogonske mašine može se predstaviti familijom krivih (**slika 7.3**).



.7.3.



Sl.7.4.

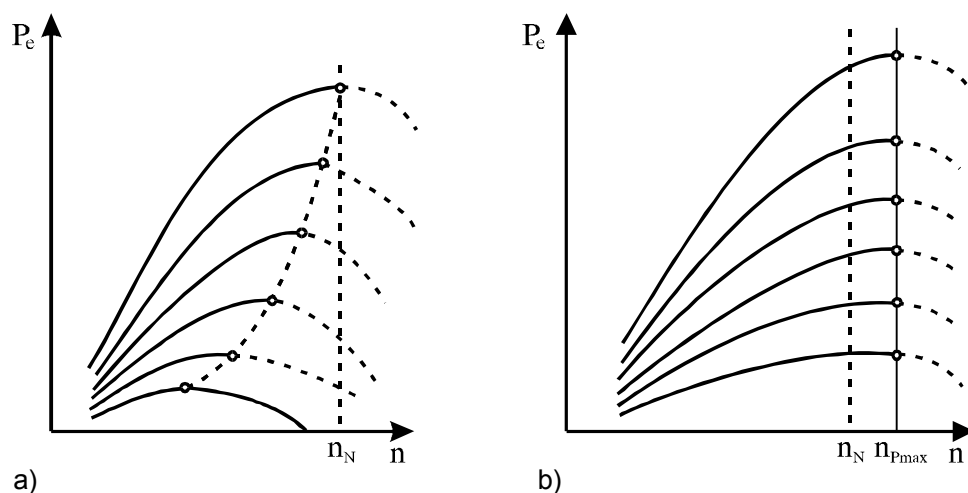
Na **slici 7.4.** prikazana je karakteristika jednocilindričnog dvotaktnog motora  $F(\varphi)$ . Sila  $F$  zavisi od položaja mehanizma i periodično je promenljiva sa periodom  $2\pi$ . Kod četvorotaktnih motora se radni ciklus obavlja za dva obrta krivaje, pa je period  $4\pi$ . Promenom količine goriva utiče se na režim rada motora; karakteristika motora je familija krivih (**slika 7.4**) sa količinom goriva kao parametrom regulacije ( $h$ ).

Uobičajeno je da proizvođači motora sa unutrašnjim sagorevanjem daju podatke o nominalnoj snazi i nominalnom broju obrtaja pri kome se ta nominalna snaga razvija. U ovom, nominalnom režimu rada motor može da radi trajno, bez smetnji. Motor može kratkotrajno da razvije i nešto veću - maksimalnu snagu.

U zavisnosti od uslova eksploatacije definisane su i druge karakteristike motora, a najčešće se koriste brzinska i karakteristika opterećenja.

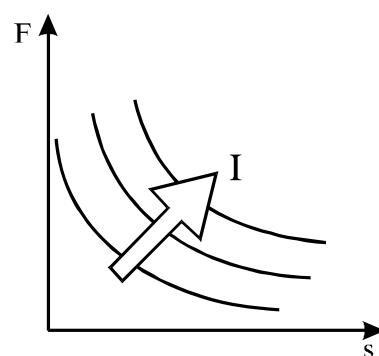
Kod **brzinske karakteristike** su sve veličine date u funkciji srednje brzine klipa ili broja obrtaja krivaje.

Brzinska karakteristika snage  $P(n)$  definiše se eksperimentalno. Na **slici 7.5.** data je brzinska karakteristika snage pri punom (spoljna karakteristika) i parcijalnom opterećenju za oto- (a) i dizel-motor (b). Maksimalna snaga pri punom i parcijalnom opterećenju kod dizel motora je uvek pri istom broju obrtaja, dok kod oto-motora taj broj opada sa smanjenjem opterećenja.



Sl.7.5.

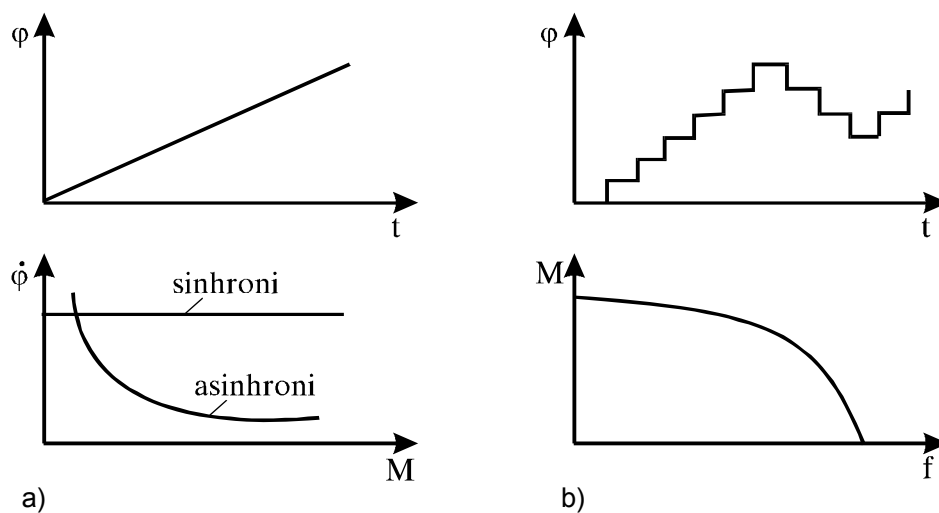
Kod elektromehaničkih pogona, pogonska sila, odnosno moment, zavise od položaja i brzine, odnosno frekvencije. Na **slici 7.6.** prikazana je karakteristika magneta  $F(s)$  gde  $s$  definiše položaj magneta, a jačina struje ( $I$ ) predstavlja parametar regulacije.



Sl.7.6.

Moment asinhronih motora, za kontinuirano rotaciono kretanje, zavisi od brzine, za razliku od momenta sinhronih motora koji ne zavisi od brzine (**slika 7.7a**).

Karakteristika koračnih motora (rotaciono kretanje) je funkcija frekvencije kretanja (**slika 7.7b**).



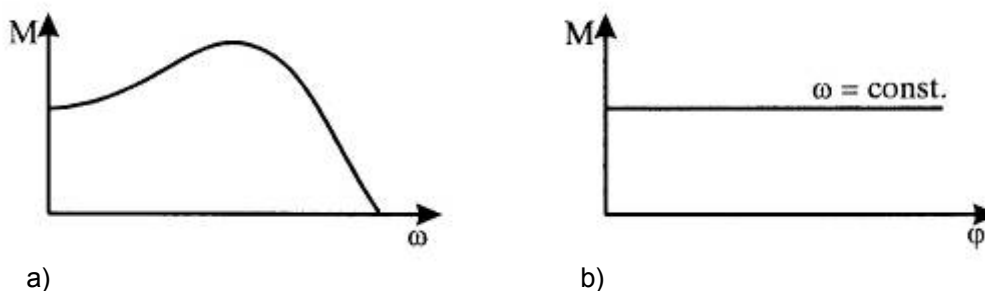
Sl.7.7.

### 7.1.2. Tehnološke sile i momenti

Tehnološke sile i momenti predstavljaju razlog projektovanja mašine, odnosno mehanizma, pa se nazivaju i koristan otpor. Karakteristika tehnološkog otpora zavisi od vrste mašine i tehnološkog procesa. Rad tehnoloških sile i momenata je negativan:

$$\sum A < 0. \quad (7.2)$$

Kod elektromotora, ventilatora, centrifugalnih pumpi i drugih rotacionih mašina, veličine sile i momenta zavise od brzine (**slika 7.8a**). Pri konstantnoj ugaonoj brzini konstantne su i veličine sile i momenta (**slika 7.8b**).

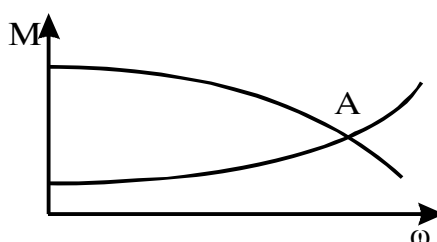


Sl.7.8.

Karakteristike mašina koje sadrže mehanizme sa nelinearnom prenosnom funkcijom predstavljaju zbir:

- karakteristike koja zavisi od masa, dimenzija i strukture mehanizma i
- karakteristike korisnog otpora uzrokovanog tehnološkim procesom.

Na **slici 7.9** prikazana je zajednička karakteristika na kojoj se grafik pogonske i sile tehnološkog otpora seku u tački A koja predstavlja optimum za rad mašine.



Sl.7.9.

### 7.1.3. Sile i momenti u zglobovima

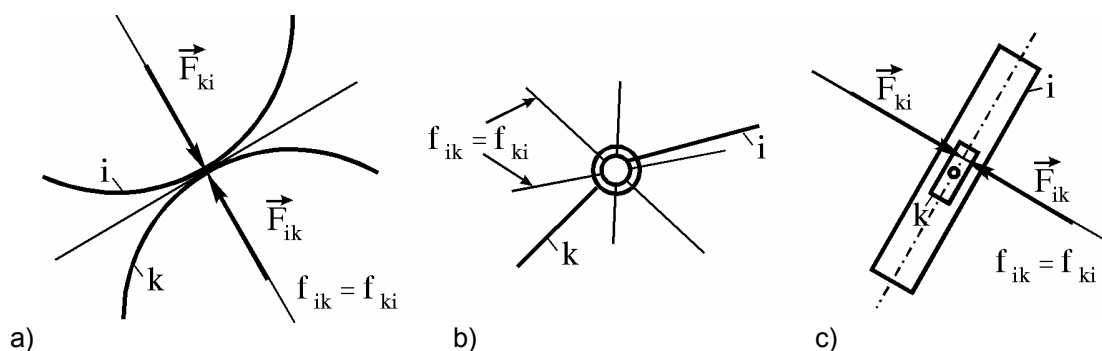
Sile (momenti) u zglobovima mehanizama spadaju u grupu unutrašnjih sila. U opštem slučaju, sila  $\vec{F}_{ik}$  koja deluje na telo  $i$  sa tela  $k$  jednaka je sili  $\vec{F}_{ki}$  koja se sa tela  $i$  prenosi na telo  $k$ :

$$\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0. \quad (7.3)$$

U slučaju idealne veze (nema trenja), pravac dejstva sila  $f_{ik} \equiv f_{ki}$  je normala na površinu (liniju) dodira pa se ove sile nazivaju **normalnim silama** i označavaju sa  $F_N$ . Njihov rad je:

$$\sum A_N = 0. \quad (7.4)$$

Kod viših kinematskih parova sa linijskim dodirom (**slika 7.10a**) sila je raspoređena po liniji dodira, a pri dodiru u tački, sila deluje u tački dodira, dok je njen intenzitet nepoznat.

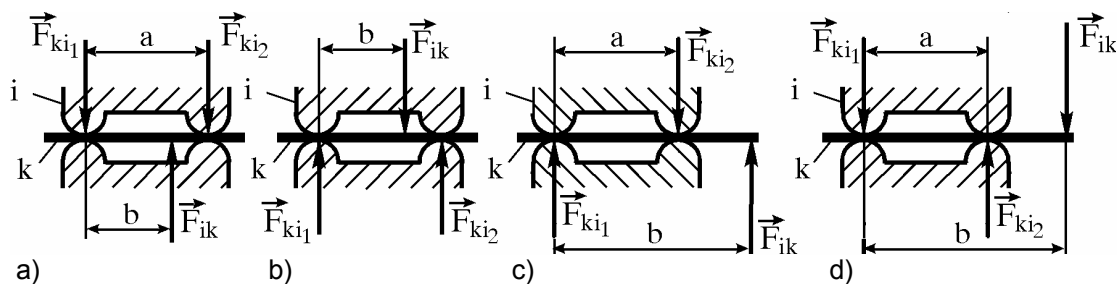


Sl.7.10.

Kod nižih kinematskih parova sile veze deluju po površini. Sila veze rotacionog para prolazi kroz centar zgloba (**slika 7.10b**), a njen pravac  $f_{ik} \equiv f_{ki}$  i intenzitet  $F_N$  zavise od rasporeda i intenziteta spoljašnjih sila.

Kod prizmatičnih parova (**slika 7.10c**) pravac dejstva sila  $f_{ik} \equiv f_{ki}$  normalan je na osu klizanja dok su napadna tačka i intenzitet sile nepoznati. Od rasporeda i intenziteta spoljašnjih sila i momenata zavise kontaktna mesta, a sa njima i kontaktne sile između članova kinematskog para.

Za slučaj kada je klizač duži od vodjice (**slika 7.11**), smer normalnih sila zavisi od pravca i smera dejstva redukovane sile koja zamenjuje sve sile i momente koji sa člana  $k$  deluju na član  $i$ .



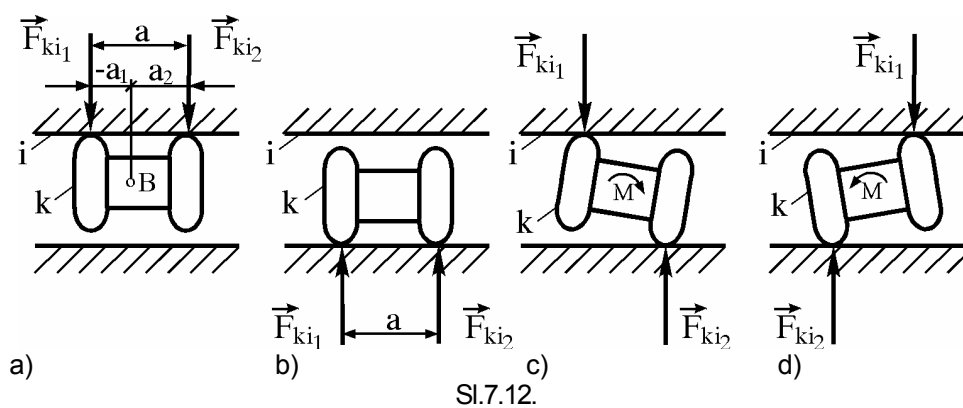
Sl.7.11.

Ako je rastojanje  $b < a$ , sile u kontaktnim pravcima su paralelne, istog smera (**slika 7.11a,b**), pri čemu je:

$$\vec{F}_{ik} = \vec{F}_{ki1} + \vec{F}_{ki2}, \quad (7.5)$$

dok su za  $b > a$ , sile u kontaktnim pravcima suprotno usmerene (**slika 7.11c,d**):

$$\vec{F}_{ik} = \vec{F}_{ki1} - \vec{F}_{ki2}. \quad (7.6)$$



Za slučaj kada je klizač (klip) kraći od vodjice (**slika 7.12**), moguće su takodje četiri kombinacije kontaktnih sila.

Ako redukovana normalna sila  $F_N$  deluje na rastojanju:

$$e = \frac{M}{F_N} \quad (7.7)$$

od zglobne tačke **B** tako da je ispunjen uslov:

$$-a_1 < e < a_2, \quad (7.8)$$

kontakt se ostvaruje sa gornje (**slika 7.12a**), odnosno donje strane klizača (**slika 7.12b**), što zavisi od smera redukovane sile  $F_N$ . Ukoliko je  $e > a_2$  (**slika 7.12c**), odnosno  $e < -a_1$  (**slika 7.12d**) kontakt se ostvaruje sa različitih strana klizača.

Za slučaj sa **slike 7.12a.** i **slike 7.12b.** važi jednakost:

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}, \quad (7.9)$$

dok se kontaktne sile u slučajevima sa **slike 7.12c.** i **slike 7.12d.** određuju iz sume momenata za odgovarajuće kontaktne tačke.

## 7.2. Kinetostatika

Metodama kinetostatike definišu se uslovi ravnoteže sila u mehanizmu i na osnovu njih sile koje opterećuju članove i zglobove mehanizma. Kako je mehanizam u ravnoteži ako su svi njegovi članovi u ravnoteži, uslovi ravnoteže sila u mehanizmu izražavaju se sa tri nezavisne skalarne jednačine za svaki član mehanizma:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}\quad (7.10)$$

gde su sa  $X$  i  $Y$  označene projekcije sila na odgovarajuće koordinatne ose.

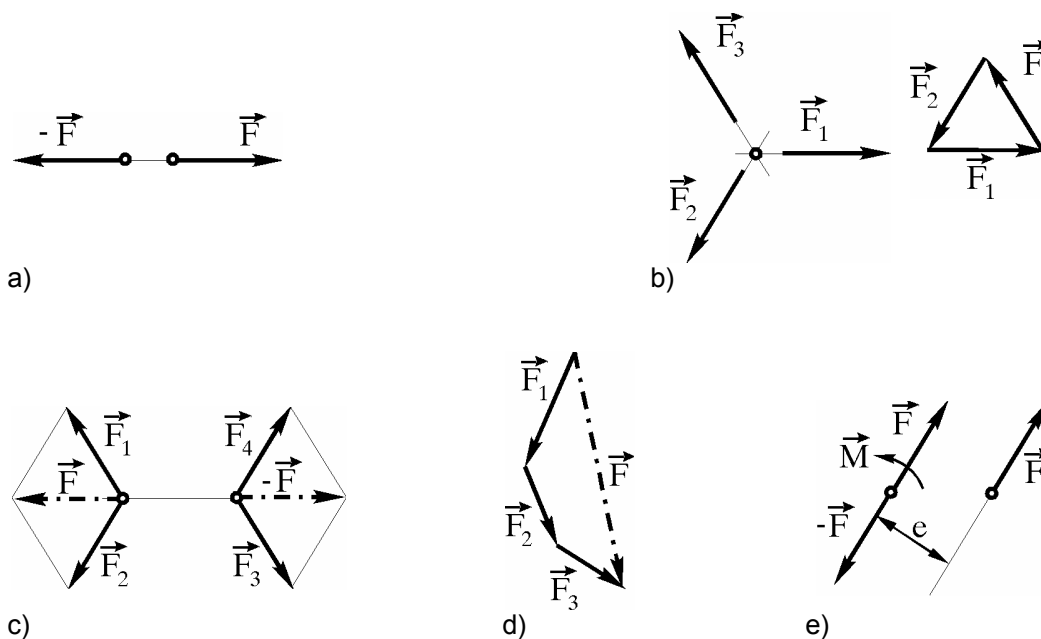
Analiza uslova ravnoteže sila vrši se pod pretpostavkom da su članovi mehanizma kruta tela, što znači da se rastojanja izmedju tačaka tela pod dejstvom sila ne menjaju i da se napadna tačka sile može proizvoljno pomerati duž napadne linije sile.

Uslovi ravnoteže definišu se na osnovu aksioma statike i u zavisnosti od broja sila mogu se formulirati dodatnim uslovima (**slika 7.13**):

- dve sile su u ravnoteži ako su istog intenziteta i pravca, a suprotnog smera (**slika 7.13a**),
- tri sile su u ravnoteži ako formiraju zatvoren poligon sila, a napadne linije sila se seku u jednoj tački (**slika 7.13b**),
- četiri sile su u ravnoteži ako rezultante po dve sile prolaze kroz presečne tačke linija dejstva tih sila, a istog su intenziteta i suprotnog smera (**slika 7.13c**).

Napomenimo još da se dejstvo većeg broja sila može zameniti dejstvom rezultante (**slika 7.13d**), dok se dejstva momenta  $M$  i sile  $F$  (**slika 7.13e**) mogu zameniti dejstvom sile  $F$  na rastojanju:

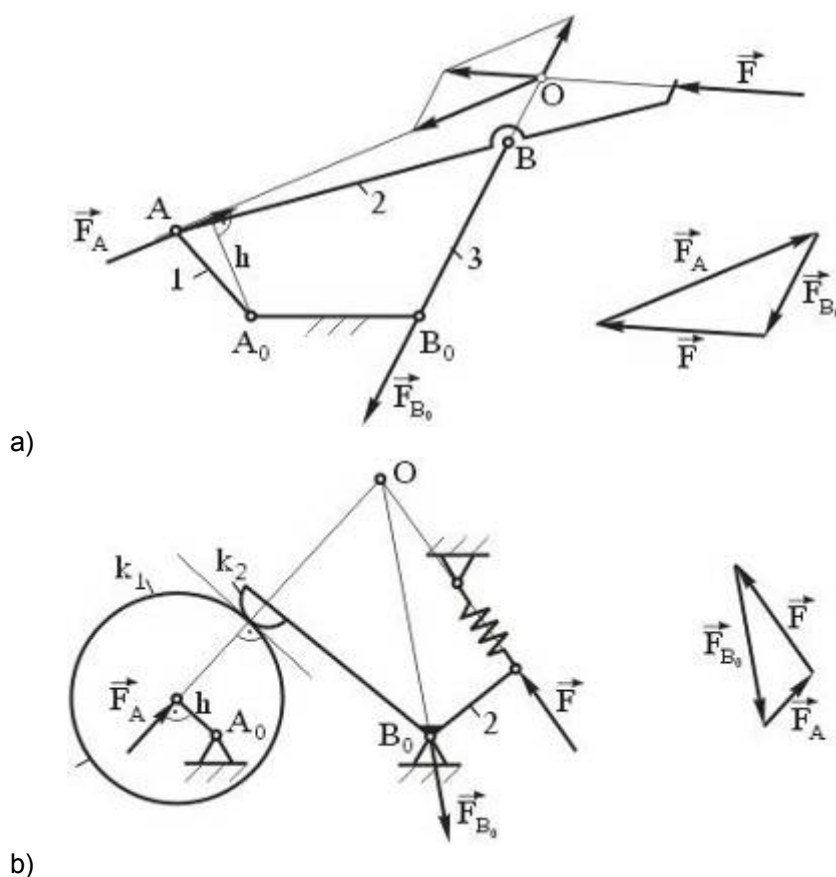
$$e = \frac{M}{F}. \quad (7.11)$$



Sl.7.13.

Ako na mehanizam pored pogonske sile deluje još samo jedna sila, uslovi ravnoteže mogu biti postavljeni za mehanizam u celini. Na polužni četvorougao sa **slike 7.14a**, pored pogonske sile, koja deluje na krivaju (1), deluje i sila  $\vec{F}$  na spojku (2). Kako na član 3 ne deluju spoljašnje sile, sa spojke se, preko zgloba  $B$ , prenosi





Sl.7.14.

sila u pravcu štapa 3, koja u tački  $B_0$  izaziva reakciju  $\vec{F}_{B_0}$ . Kroz presečnu tačku  $O$  napadnih linija sila  $\vec{F}$  i  $\vec{F}_{B_0}$  mora proći i napadna linija sile  $\vec{F}_A$  koja se sa pogonskog člana prenosi na spojku. Intenziteti sila  $\vec{F}_A$  i  $\vec{F}_{B_0}$  određuju se poligonom (trougлом) sila, a pogonski moment proizvodom:

$$M = F_A \cdot h. \quad (7.12)$$

Kod mehanizma na **slici 7.14b**, presečna tačka  $O$  napadnih linija sila koje deluju na član 2 nalazi se u preseku zajedničke normale krivih  $k_1$  i  $k_2$  i ose opruge. Napadna linija sile  $\vec{F}_{B_0}$ , u zglobu  $B_0$ , prolazi kroz tačku  $O$ . Pogonski moment se i u ovom slučaju može formulisati relacijom (7.12).

Ako na mehanizam deluje veći broj sila, preporučuje se metoda razdvajanja mehanizma na kinematske lance koji ispunjavaju uslove statičke određenosti (broj nepoznatih reakcija jednak je broju jednačina).

Za svaki član kinematskog lanca mogu se postaviti tri skalarna uslova ravnoteže sila (7.10). Kako je u rotacionom zglobu, sa jednim relativnim stepenom slobode kretanja, poznata napadna tačka reakcije dok su intenzitet i pravac nepoznati, u prizmatičnom zglobu poznat pravac dok su napadna tačka i intenzitet nepoznati, a u zglobovima sa dva relativna stepena slobode kretanja poznat pravac i napadna tačka, to se uslov statičke određenosti može formulisati izrazom:

$$3m = 2z_1 + z_2, \quad (7.13)$$

gde je:

$m = n - 1$  broj pokretnih članova,

$z_1$  - broj zglobova sa  $f = 1$  i

$z_2$  - broj zglobova sa  $f = 2$ .

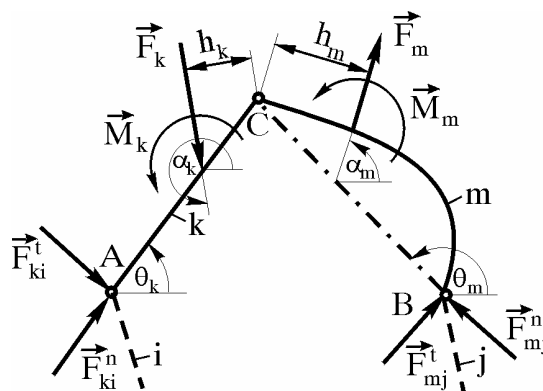
Ovaj uslov ispunjavaju *Assur*-ove grupe (**slika 2.1**), kod kojih je stepen slobode kretanja grupe:

$$F = 3(n - 1) - 2z_1 - z_2 = 0, \quad (7.14)$$

osim kod grupe prve klase koja ima jedan stepen slobode kretanja i koja će biti posebno razmatrana.

### 7.2.1. Grupa druge klase

Članovi  $k$  i  $m$  grupe druge klase medjusobno su vezani zglibom  $C$ , a sa članovima  $i$ , odnosno  $j$ , zglibom  $A$ , odnosno  $B$  (slika 7.15).



Sl.7.15.

Neka na član  $k$  deluje glavni vektor spoljašnjih sila  $\vec{F}_k$ , na rastojanju  $\vec{r}_k$  od tačke  $C$ , i glavni moment  $\vec{M}_k$ , a na član  $m$  glavni vektor  $\vec{F}_m$ , na rastojanju  $\vec{r}_m$ , i glavni moment  $\vec{M}_m$ . Razložimo silu u zglibu  $A$  na komponentu u pravcu  $\overline{AC}$  ( $\vec{F}_{ki}^n$ ) i na komponentu upravnu na taj pravac ( $\vec{F}_{ki}^t$ ) i analogno tome silu u zglibu  $B$  na komponente  $\vec{F}_{mj}^n$  i  $\vec{F}_{mj}^t$ . Iz uslova da je suma momenata za tačku  $C$  jednaka nuli sledi:

$$\vec{F}_{ki}^t \times \vec{l}_k + \vec{M}_k + \vec{F}_k \times \vec{r}_k = 0$$

$$i \quad (7.15)$$

$$\vec{F}_{mj}^t \times \vec{l}_m + \vec{M}_m + \vec{F}_m \times \vec{r}_m = 0,$$

odn. u skalarnom obliku:

$$F_{ki}^t \cdot l_k + M_k + F_k \cdot h_k = 0$$

$$i \quad (7.16)$$

$$F_{mj}^t \cdot l_m + M_m + F_m \cdot h_m = 0.$$

gde je:

$$h_k = r_k \cdot \sin(\theta_k - \alpha_k)$$

$$h_m = r_m \cdot \sin(\theta_m - \alpha_m).$$

$$(7.17)$$

Iz jednačine (7.16) dobija se:

$$F_{ki}^t = -\frac{1}{l_k}(M_k + F_k \cdot h_k)$$

$$i \quad (7.18)$$

$$F_{mj}^t = -\frac{1}{l_m}(M_m + F_m \cdot h_m).$$

Iz uslova da je glavni vektor sila koje deluju na grupu jednak nuli:

$$\vec{F}_{ki} + \vec{F}_k + \vec{F}_m + \vec{F}_{mj} = 0,$$

$$(7.19)$$

dobija se, projektovanjem na x-, odnosno y-osu:

$$F_{ki}^t \cos(\theta_k - \frac{\pi}{2}) + F_{ki}^n \cos \theta_k + F_k \cos \alpha_k + F_m \cos \alpha_m + F_{mj}^t \cos(\theta_m - \frac{\pi}{2}) + F_{mj}^n \cos \theta_m = 0$$

$$(7.20)$$

$$F_{ki}^t \sin(\theta_k - \frac{\pi}{2}) + F_{ki}^n \sin \theta_k + F_k \sin \alpha_k + F_m \sin \alpha_m + F_{mj}^t \sin(\theta_m - \frac{\pi}{2}) + F_{mj}^n \sin \theta_m = 0,$$

odakle sledi:

$$F_{ki}^n = \frac{\begin{vmatrix} A & \cos \theta_m \\ B & \sin \theta_m \end{vmatrix}}{C}$$

i

$$F_{mj}^n = \frac{\begin{vmatrix} \cos \theta_k & A \\ \sin \theta_k & B \end{vmatrix}}{C},$$

gde je:

$$A = F_{ki}^t \sin \theta_k + F_k \cos \alpha_k + F_{mj}^t \sin \theta_m + F_m \cos \alpha_m$$

$$B = -F_{ki}^t \cos \theta_k + F_k \sin \alpha_k - F_{mj}^t \cos \theta_m + F_m \sin \alpha_m$$

$$C = \begin{vmatrix} \cos \theta_k & \cos \theta_m \\ \sin \theta_k & \sin \theta_m \end{vmatrix} = \sin(\theta_m - \theta_k).$$

Oslobadjanjem veze članova **k** i **m** može se odrediti sila u zglobu **C**, iz uslova da je glavni vektor sila koje deluju na član **k** (ili **m**) jednak nuli:

$$\vec{F}_{ki} + \vec{F}_k + \vec{F}_{km} = 0.$$

Projekcije sile u zglobu **C** na koordinatne ose biće:

$$F_{km}^x = -\left(F_{ki}^t \cos\left(\theta_k - \frac{\pi}{2}\right) + F_{ki}^n \cos \theta_k + F_k \cos \alpha_k\right)$$

i

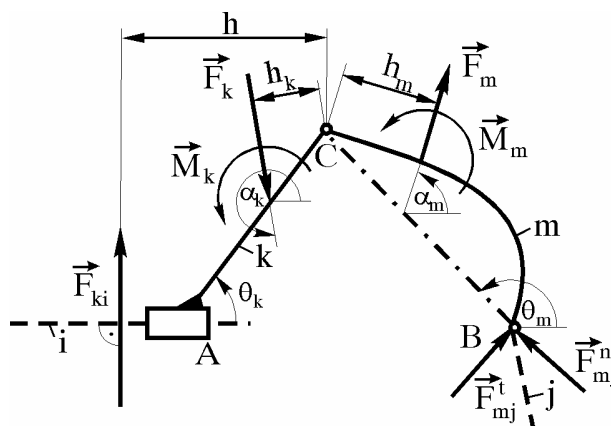
$$F_{km}^y = -\left(F_{ki}^t \sin\left(\theta_k - \frac{\pi}{2}\right) + F_{ki}^n \sin \theta_k + F_k \sin \alpha_k\right),$$

odakle je:

$$F_{km} = \sqrt{(F_{km}^x)^2 + (F_{km}^y)^2}$$

i

$$\vec{F}_{km} = -\vec{F}_{mk}.$$



Sl.7.16.

Za slučaj modifikacije rotacionog zgloba u prizmatični (zglob **A** na **slici 7.16**), sila  $\vec{F}_{ki}$  deluje upravno na pravac klizanja, na rastojanju:

$$h = \frac{M_k + F_k \cdot r_k \sin(\theta_k - \alpha_k)}{F_{ki}}$$

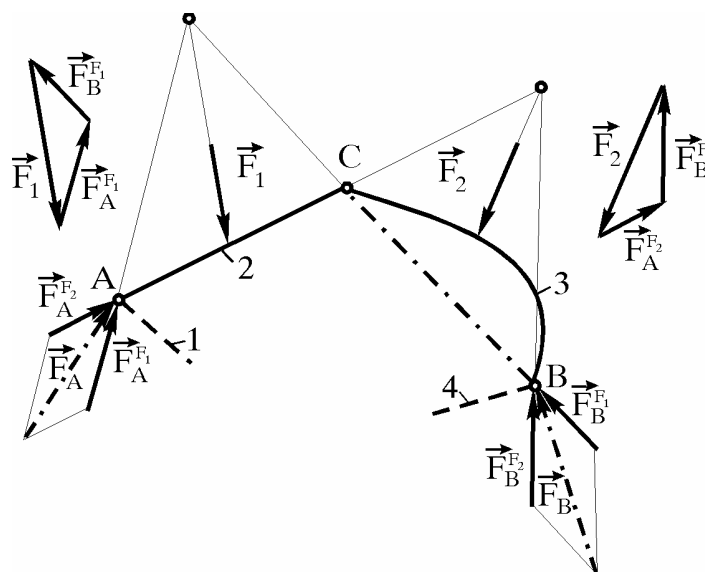
od tačke **C**.

Ukoliko na članove grupe druge klase ne deluju momenti spoljašnjih sila, sile u zglobovima mogu se odrediti i grafičkim postupkom:

- metodom superpozicije ili
- metodom verižnog poligona.

**Metod superpozicije** se zasniva na superponiranju sila u zglobovima dobijenih kao posledica dejstva glavnog vektora spoljašnjih sila koje deluju na član 2 ( $\vec{F}_1$ ) i sila dobijenih kao posledica dejstva glavnog vektora spoljašnjih sila koje deluju na član 3 ( $\vec{F}_2$ ).

Ako kod grupe druge klase na **slici 7.17.** zanemarimo najpre silu  $\vec{F}_2$ , napadna linija sile u zglobu **C** ( $\vec{F}_{23}^{F_1}$ ), kao posledica dejstva sile  $\vec{F}_1$ , poklapaće se sa pravcem spojne duži zglobova člana 3 ( $\overline{CB}$ ). Na član 2 deluju sile  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_{23}^{F_1}$  ( $= \vec{F}_C^{F_1}$ ) i  $\vec{F}_{21}^{F_1}$  ( $= \vec{F}_A^{F_1}$ ). Ove tri sile biće u ravnoteži ako se njihove napadne linije seku u istoj tački i ako formiraju zatvoreni poligon (trougao) sila. Ovi uslovi ravnoteže sila određuju nepoznate vektore sila  $\vec{F}_{23}^{F_1}$  i  $\vec{F}_{21}^{F_1}$ . Pošto smo zanemarili silu  $\vec{F}_2$ , na član 3 ne deluju spoljašnje sile pa se sila  $\vec{F}_{32}^{F_1} = -\vec{F}_{23}^{F_1}$  prenosi duž pravca  $\overline{CB}$  i u zglobu **B** izaziva reakciju  $\vec{F}_B^{F_1} = \vec{F}_{23}^{F_1}$ .



SI.7.17.

Na isti način, zanemarivanjem sile  $\vec{F}_1$ , mogu se odrediti sile u zglobovima koje su posledica dejstva sile  $\vec{F}_2$ :  $\vec{F}_B^{F_2}$  i  $\vec{F}_A^{F_2} = \vec{F}_{32}^{F_2}$ .

Superponiranjem sila dobijenih kao posledice dejstva sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  dobijaju se rezultujuće sile u zglobovima:

$$i \quad \begin{aligned} \vec{F}_A &= \vec{F}_A^{F_1} + \vec{F}_A^{F_2} \\ \vec{F}_B &= \vec{F}_B^{F_1} + \vec{F}_B^{F_2} . \end{aligned} \quad (7.28)$$

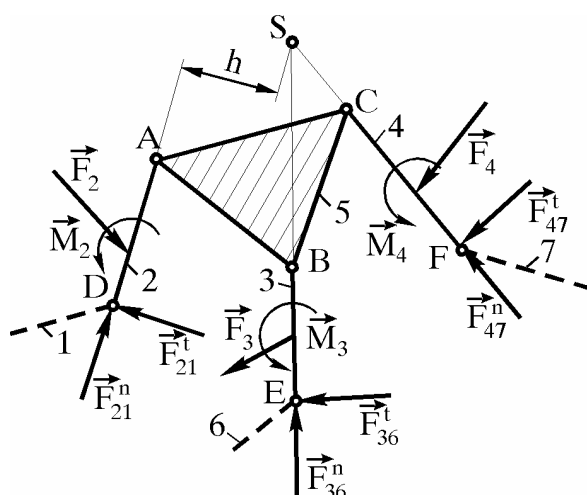
### 7.2.2. Grupa treće klase

Oslobadjanjem veza u unutrašnjim zglobovima grupe treće klase (**A**, **B** i **C** na **slici 7.18**), mogu se iz uslova da suma momenata na svakom od spoljašnjih članova za odgovarajući unutrašnji zglob bude jednaka nuli:

$$\begin{aligned} \sum M_A^{(2)} &= 0 \\ \sum M_B^{(3)} &= 0 \\ \sum M_C^{(4)} &= 0 \end{aligned} \quad (7.29)$$

odrediti tangencijalne komponente sila  $F_{21}^t$ ,  $F_{36}^t$  i  $F_{47}^t$ . Iz uslova da suma svih momenata za tačku Assur-a (**S**) bude jednaka nuli:

$$\sum M_S^{(2,3,4,5)} = 0 \quad (7.30)$$



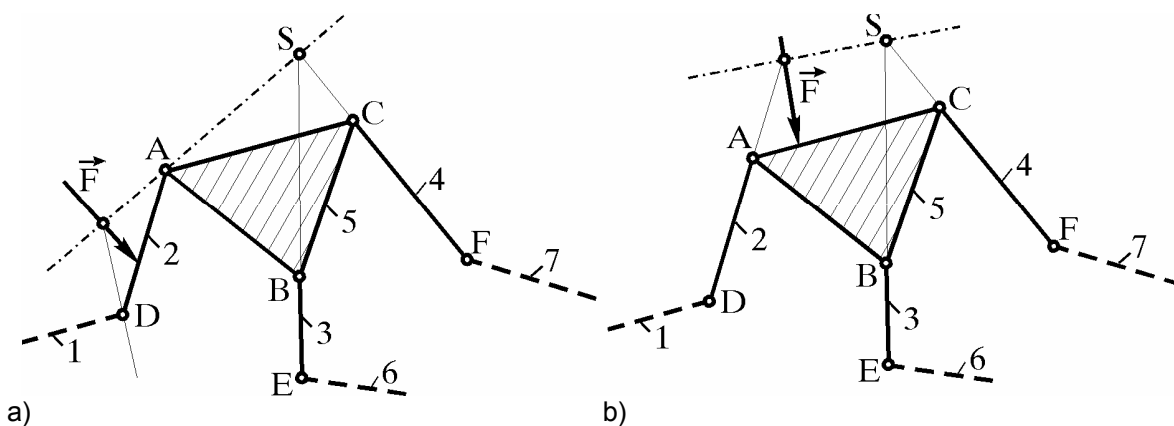
SI.7.18.

može se potom odrediti i normalna komponenta sile  $F_{21}^n$ . Preostale dve normalne komponente  $F_{47}^n$  i  $F_{36}^n$  određujemo iz uslova da je suma svih sila koje deluju na ovu grupu treće klase jednaka nuli:

$$\sum \vec{F}_i^{(2,3,4,5)} = 0, \quad (7.31)$$

a sile u zglobovima **A**, **B** i **C** iz uslova ravnoteže sila za članove **2**, **3** i **4**.

Ukoliko na članove grupe treće klase ne deluju momenti spoljašnjih sila, sile u zglobovima mogu se odrediti i grafičkim postupkom. Ako glavni vektor spoljašnjih sila deluje na neki od spoljašnjih (binarnih) članova grupe (član **2** na slici 7.19a), napadna linija sile u unutrašnjem zglobu toga člana **A** ( $\vec{F}_{25}$ ) prolazi kroz tačku Assur-a **S** (presečna tačka dva preostala spoljašnja člana **3** i **4**). Iz uslova ravnoteže sila za član **2** mogu se odrediti sile u zglobovima **D** i **A** ( $\vec{F}_{21}$  i  $\vec{F}_{25}$ ). Zatim se iz uslova ravnoteže sila za član **5**, pošto je poznat vektor sile  $\vec{F}_{52} = -\vec{F}_{25}$  i pravci vektora sile  $\vec{F}_{53}$  (u pravcu člana **3**) i  $\vec{F}_{54}$  (u pravcu člana **4**), određuju i sile u zglobovima **B** i **C**.



SI.7.19.

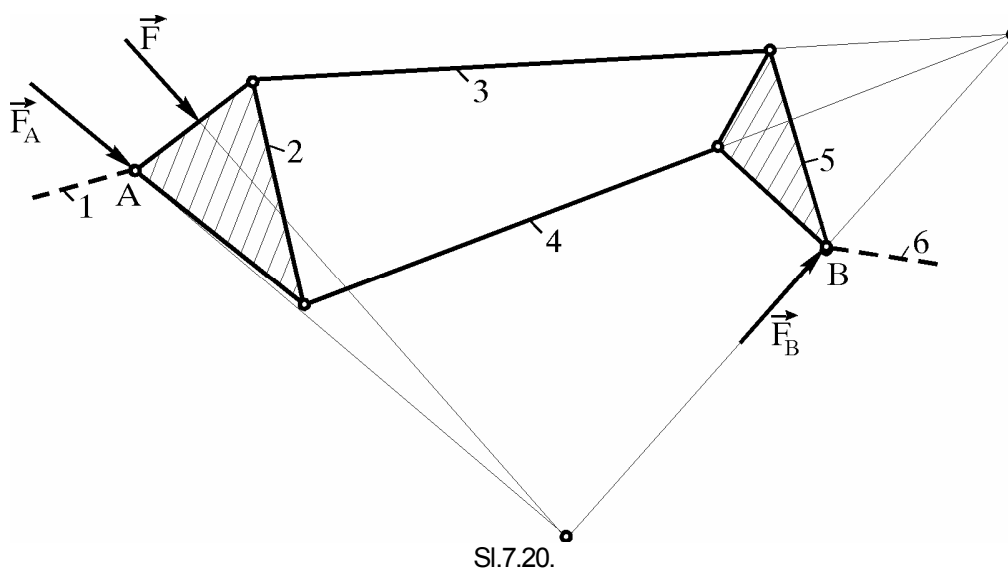
Ukoliko glavni vektor spoljašnjih sila deluje na unutrašnji (ternarni) član grupe (član **5** na slici 7.19b), na ovaj član deluju četiri sile:  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}_{52}$ ,  $\vec{F}_{53}$  i  $\vec{F}_{54}$ . Pošto na spoljašnje članove grupe ne deluju spoljašnje sile, napadne linije sile u unutrašnjim zglobovima  $\vec{F}_{52}$ ,  $\vec{F}_{53}$  i  $\vec{F}_{54}$  biće u pravcima članova **2**, **3** i **4** respektivno. Četiri sile koje deluju na član **5** biće u ravnoteži ako su rezultante po dve sile ( $\vec{F}$  i  $\vec{F}_{52}$ , odn.  $\vec{F}_{53}$  i  $\vec{F}_{54}$ ) istog pravca i intenziteta, a suprotnog smera. Pravac dejstva ovih rezultanti treba da se poklapa sa Kulmanovom (*Culmann*) pravom koja prolazi kroz presečne tačke pomenutih parova sila. Stoga se najpre formira zatvoreni poligon (trougao) sile  $\vec{F}$  i  $\vec{F}_{52}$  (u pravcu člana **2**) i rezultante u pravcu Kulmanove prave, a pošto se odredi ova rezultanta i trougao sile koje se seku u tački **S** ( $\vec{F}_{53}$ ,  $\vec{F}_{54}$  i sile koja uravnotežava prethodno pomenutu rezultantu).

### 7.2.3. Grupa četvrte klase

Ukoliko na članove grupe četvrte klase ne deluju momenti spoljašnjih sila, a glavni vektor spoljašnjih sila deluje na spoljašnji član grupe (član **2** na **slici 7.20**), sile u zglobovima mogu se odrediti grafičkim postupkom. Na član **5** ove grupe deluju tri sile:  $\vec{F}_{53}$  (u pravcu člana **3**),  $\vec{F}_{54}$  (u pravcu člana **4**) i sila  $\vec{F}_B = \vec{F}_{56}$ . Ove tri sile biće u ravnoteži ako se njihove napadne linije seku u istoj tački što određuje pravac napadne linije sile  $\vec{F}_B$ . Na član **2** deluju četiri sile:  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}_{21}(=\vec{F}_A)$ ,  $\vec{F}_{23}$  i  $\vec{F}_{24}$ , pri čemu se sile  $\vec{F}_{23}$  i  $\vec{F}_{24}$  mogu zameniti njihovom rezultantom:

$$\vec{F}_{23} + \vec{F}_{24} = \vec{F}_{35} + \vec{F}_{45} = -\vec{F}_{53} - \vec{F}_{54} = \vec{F}_B \quad (7.32)$$

kojoj je prethodno određen pravac napadne linije. Sile koje deluju na član **2**:  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}_A$  i  $\vec{F}_B (= \vec{F}_{23} + \vec{F}_{24})$  biće u ravnoteži ako se njihove napadne linije seku u istoj tački što određuje pravac napadne linije sile  $\vec{F}_A$ . Pošto je poznat vektor sile  $\vec{F}$  i pravci vektora sile  $\vec{F}_A$  i  $\vec{F}_B$ , najpre se formira zatvoreni poligon (trougao) ovih sila, a potom i trougao sile  $\vec{F}_B$ ,  $\vec{F}_{53}$  i  $\vec{F}_{54}$ .



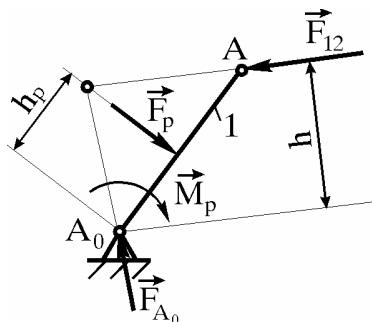
Sl.7.20.

### 7.2.4. Grupa prve klase

Na pogonski član (grupa prve klase) deluje rezultanta svih sila i momenata koji deluju na mehanizam ( $\vec{F}_{12}$  na **slici 7.21**). Potrebno je uvesti silu  $\vec{F}_p$  ili moment  $\vec{M}_p$  koji će da uravnoteže ovu rezultantu. Ako se uravnotežavanje rezultante vrši silom  $\vec{F}_p$ , iz uslova ravnoteže sila za član **1** (pravci napadnih linija triju sila seku se u istoj tački, a sile formiraju zatvoreni trougao) mogu se odrediti sila  $\vec{F}_p$  i sila u zglobu  $\mathbf{A}_0$  ( $\vec{F}_{A_0}$ ).

Ukoliko se uravnotežavanje rezultante vrši momentom  $\vec{M}_p$ , veličina momenta određuje se iz uslova da suma momenata koji deluju na član **1**, za tačku  $\mathbf{A}_0$ , bude jednaka nuli:

$$M_p = F_{12} \cdot h. \quad (7.33)$$



Sl.7.21.

### 7.3. Sile i momenti inercije

Kod neravnomernog kretanja tela, kao reakcija na ubrzano ili usporeno kretanje javljaju se, pored dosad razmatranih, i dinamičke sile - **sile inercije**. Uslovi ravnoteže takvog tela mogu se definisati metodama statike. U svakoj tački mase  $dm_i$  deluje sila:

$$d\vec{F}_i = -\vec{a}_i \cdot dm_i \quad (7.34)$$

gde je  $\vec{a}_i$  ubrzanje mase  $dm_i$ .

Dejstvo inercijalnih sila člana mehanizma koji se može smatrati krutim svodi se na glavni vektor inercijalnih sila:

$$\vec{F}_j = \int_m d\vec{F}_i \quad (7.35)$$

i glavni moment inercijalnih sila za težišnu tačku:

$$\vec{M}_j = -\vec{\varepsilon} \int_m \rho^2 dm_i = -\vec{\varepsilon} \cdot J_s \quad (7.36)$$

gde je:  $J_s = \int_m \rho^2 dm_i$  - moment inercije masa u odnosu na težišnu tačku, a

$\vec{\varepsilon}$  - ugaono ubrzanje člana mehanizma.

Dinamički problemi se formalno mogu, uvodjenjem inercijalnih sila, svesti na statičke. Sistem inercijalnih sila se može razmatrati preko glavnog vektora i glavnog momenta kada se traže reakcije u vezama kinematičkih parova, dok je za određivanje dinamičkih naprezanja neophodna analiza inercijalnih sila, kontinualno raspoređenih duž člana mehanizma.

#### 7.3.1. Translatorno kretanje

Ubrzanja svih tačaka krutog tela koje se kreće translatorno (**slika 7.22**) medjusobno su jednaka pa je inercijalna sila:

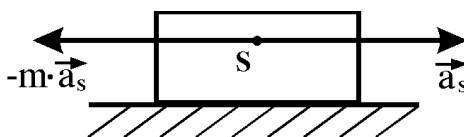
$$\vec{F}_j = -\int_m \vec{a}_i \cdot dm_i = -\vec{a}_i \int_m dm_i \quad (7.37)$$

rasporedjena na isti način kao i masa tela. Ukupno dejstvo inercijalnih sila u ovom slučaju svodi se na glavni vektor:

$$\vec{F}_j = -\vec{a}_s \cdot m \quad (7.38)$$

gde je:  $\vec{a}_s = \vec{a}_i$  - ubrzanje težišta, a

$m = \int_m dm_i$  - ukupna masa tela.



SI.7.22.

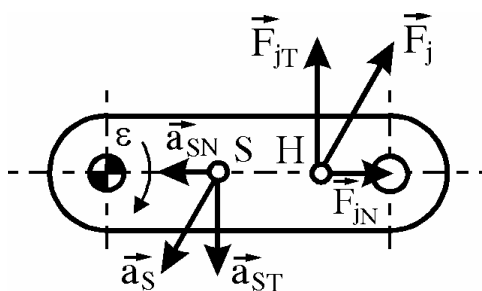
#### 7.3.2. Rotaciono kretanje

Pri rotaciji krutog tela oko nepomične ose (**slika 7.23**) sila inercije mase  $dm_i$  može se razložiti na tangencijalnu:

$$d\vec{F}_{jT} = -dm(\vec{\rho} \times \vec{\varepsilon}) \quad (7.39)$$

i normalnu komponentu:

$$d\vec{F}_{jN} = -dm \cdot \vec{\rho} \cdot \omega^2. \quad (7.40)$$



SI.7.23.

Zbir tangencijalne:

$$\vec{F}_{jT} = \vec{\varepsilon} \times \int_m dm_i \vec{\rho}_i = m \cdot \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_s = -m \vec{a}_{sT} \quad (7.41)$$

i normalne komponente rezultujuće sile inercije:

$$\vec{F}_{jN} = -\omega^2 \int_m dm_i \vec{\rho}_i = -m \cdot \vec{\rho}_s \cdot \omega^2 = -m \vec{a}_{sN} \quad (7.42)$$

predstavlja ukupnu silu inercije člana:

$$\vec{F}_j = \vec{F}_{jT} + \vec{F}_{jN} = -m \vec{a}_s. \quad (7.43)$$

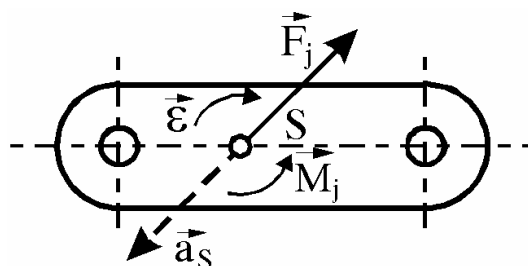
### 7.3.3. Napadna tačka rezultujuće sile inercije člana

Kako je, u opštem slučaju, kretanje mehanizma složeno iz translacije i rotacije, uticaj inercijalnih sila svodi se na silu u težištu člana:

$$\vec{F}_j = -m \cdot \vec{a}_s \quad (7.44)$$

i moment od inercijalnih sila (slika 7.24):

$$\vec{M}_j = -J_s \cdot \vec{\varepsilon}. \quad (7.45)$$



SI.7.24.

Dinamički moment inercije može se formulisati i u obliku:

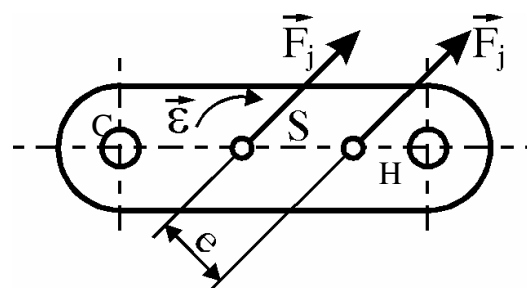
$$J_s = m \cdot i_s^2 \quad (7.46)$$

gde je:  $i_s$  - poluprečnik dinamičkog momenta inercije.

Inercijalna sila  $\vec{F}_j$  i moment  $\vec{M}_j$  mogu se složiti u jednu silu koja deluje na rastojanju:

$$e = \frac{M_j}{F_j} = \frac{-m \cdot i_s^2 \cdot \varepsilon}{-m \cdot a_s} = \frac{i_s^2 \cdot \varepsilon}{a_s} \quad (7.47)$$

od težišta (S), paralelno sili  $\vec{F}_j$ , istog intenziteta, čiji moment u odnosu na težište (S) odgovara momentu  $\vec{M}_j$  (slika 7.25).



SI.7.25.



Ako ploča rotira oko nepokretne tačke **C** (slika 7.26), ubrzanje težišta je:

$$a_s = \overline{CS} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (7.48)$$

odakle, za odstojanje rezultujuće sile inercije (7.47), sledi izraz:

$$e = \frac{i_s^2 \cdot \varepsilon}{\overline{CS} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \quad (7.49)$$

koji, uvođenjem smene:

$$\sin \psi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{a_{ST}}{a_s} \quad (7.50)$$

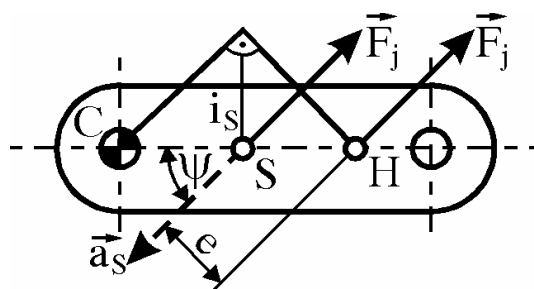
dobija oblik:

$$e = \overline{SH} \cdot \sin \psi = \overline{SH} \cdot \frac{a_{ST}}{a_s}. \quad (7.51)$$

Iz prethodnih jednačina sledi da je:

$$\overline{SH} \cdot \overline{CS} = i_s^2. \quad (7.52)$$

Tačka **H** predstavlja centar oscilovanja (*Huygens-ov centar*), koji se, na osnovu jednačine (7.52), može i grafički odrediti, konstruisanjem srednje geometrijske proporcionalne (slika 7.26).

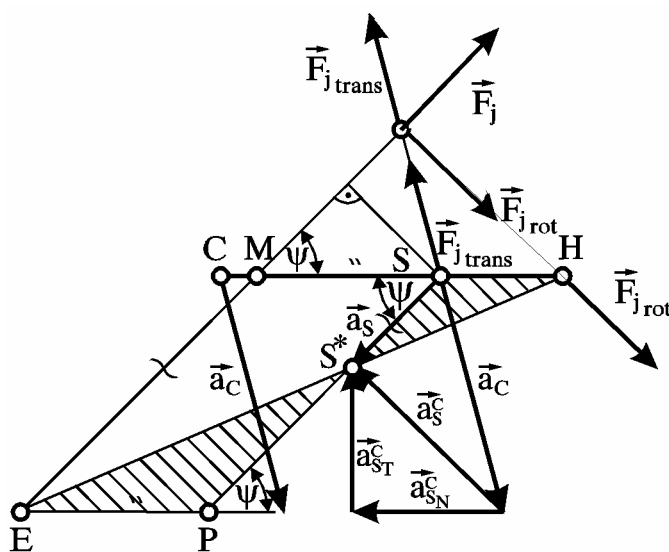


Sl.7.26.

Ukoliko je tačka **C** pokretna (slika 7.27) i ima ubrzanje  $\vec{a}_c$ , iz jednačina (7.47) i (7.52) dobija se:

$$e = \frac{i_s^2 \cdot a_{ST}^c}{a_s \cdot \overline{CS}} = \overline{SH} \cdot \frac{a_{ST}^c}{a_s}. \quad (7.53)$$

Rastojanje **e** se može odrediti i grafički, konstrukcijom *Tolle-a* (slika 7.27).



Sl.7.27.

Neka su na pokretnom štapu poznate tačke **C**, **S** i **H**, kao i ubrzanja  $\vec{a}_C$  i  $\vec{a}_S$ . Prava povučena kroz **H** i vrh ubrzanja  $\vec{a}_S$  seče pravu paralelnu pravoj  $\overline{CS}$ , povučenu kroz vrh ubrzanja  $\vec{a}_C$ , u tački **E**. Kroz tačku **E** prolazi sila inercije  $\vec{F}_j$ , paralelno ubrzanju  $\vec{a}_S$ .

**Dokaz:** Iz sličnosti trouglova:

$$\Delta EPS^* \sim \Delta SS^*H \sim \Delta EMH$$

sledi:

$$\frac{\overline{MS}}{\overline{SH}} = \frac{\overline{ES^*}}{\overline{S^*H}} = \frac{\overline{PS^*}}{\overline{SS^*}} = \frac{a_{ST}^C}{a_S \cdot \sin \psi} \quad (7.54)$$

odakle je:

$$e = \overline{MS} \cdot \sin \psi = \overline{SH} \cdot \frac{a_{ST}^C}{a_S} \quad (7.55)$$

što odgovara jednačini (7.53).

Sila inercije se može predstaviti i preko rotacione i translatorne komponente:

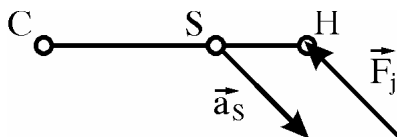
$$\vec{F}_j = \vec{F}_{j\text{trans}} + \vec{F}_{j\text{rot}} \quad (7.56)$$

gde je:  $\vec{F}_{j\text{trans}} = -m \cdot \vec{a}_C$  i deluje u težištu, a

$\vec{F}_{j\text{rot}} = -m \cdot \vec{a}_S^C$  i deluje u centru oscilovanja.

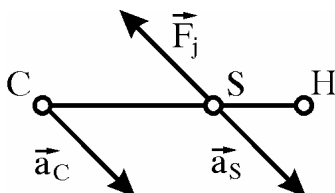
### Specijalni slučajevi

Za slučaj kada je  $a_C = 0$  i  $a_S \neq 0$ , tj. kada je tačka **C** nepokretna ili je pol ubrzanja, rezultujuća sila inercije prolazi kroz centar oscilovanja (**slika 7.28**).



SI.7.28.

Za slučaj kada je  $a_S = a_C$ , tj. kada štap vrši translatorno kretanje, rezultujuća sila inercije prolazi kroz težište **S** (**slika 7.29**).



SI.7.29.

Za slučaj kada je  $a_S = 0$  i  $a_C \neq 0$  (rotacija oko težišne tačke), postoji samo moment od inercijalnih sila, definisan jednačinom (7.45), koji može biti zamenjen spregom sila.

#### 7.4. Metod ekvivalentnih masa

Dejstvo inercijalnih sila člana može se zameniti dejstvom inercijalnih sila diskretno raspoređenih masa u pojedinim tačkama člana (**slika 7.30**). Da bi pri nekom kretanju, inercijalne sile i momenti za oba sistema bili jednaki, potrebno je da oba sistema imaju istu masu, istu težišnu tačku i iste masene inercijalne momente za težišnu osu, odnosno, moraju biti ispunjeni sledeći uslovi:

$$\sum_{i=1}^n m_i = m \quad (7.57)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i = 0 \quad (7.58)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 = J_S = m \cdot i^2 \quad (7.59)$$

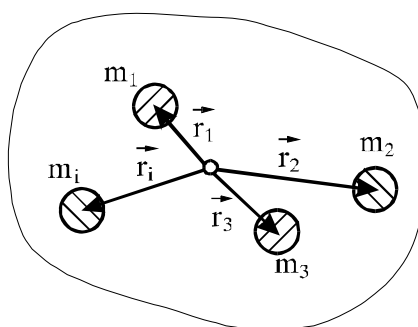
gde je:  $m$  - ukupna masa člana mehanizma,

$m_i$  - diskretna masa,

$r_i$  - rastojanje mase od težišta  $i$

$J_S$  - maseni inercijalni moment za težišnu osu.

Jednačine (7.57) i (7.58) predstavljaju statičke uslove, a zajedno sa jednačinom (7.59) čine dinamičke uslove. U skladu sa tim može se govoriti o statičkoj, odnosno, dinamičkoj zameni masa.



Sl.7.30.

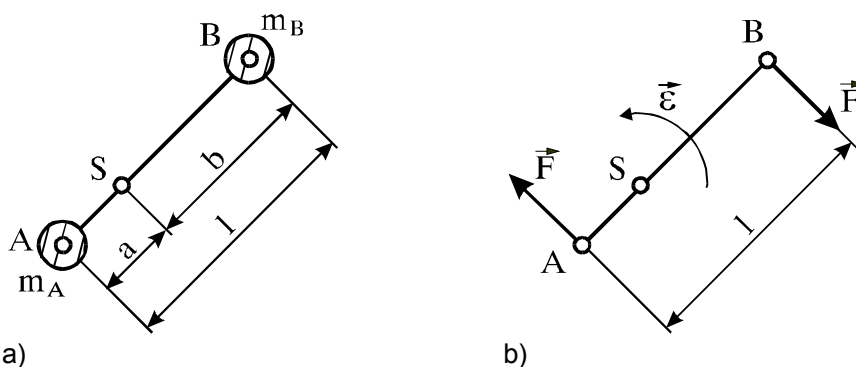
##### 7.4.1. Statička zamena masa

Diskretne mase se najčešće postavljaju u zglobnim tačkama mehanizma. Ako se dejstvo inercijalnih sila zamenjuje dejstvom dveju masa koncentrisanih u tačkama **A** i **B** (**slika 7.31a**), onda se statički uslovi, obzirom da je  $r_1 = a$  i  $r_2 = b$ , mogu formulisati izrazima:

$$m_A + m_B = m \quad (7.60)$$

$$m_A \cdot a - m_B \cdot b = 0 \quad (7.61)$$

odakle sledi da je:



Sl.7.31.

$$m_A = \frac{m \cdot b}{l} \quad \text{i} \quad m_B = \frac{m \cdot a}{l}. \quad (7.62), (7.63)$$

Moment inercijalnih sila masa  $m_A$  i  $m_B$  iznosi:

$$\vec{M}_1 = -(m_A \cdot a^2 + m_B \cdot b^2) \cdot \vec{\varepsilon} \quad (7.64)$$

dok je moment inercijalnih sila štapa:

$$\vec{M} = -m \cdot i^2 \cdot \vec{\varepsilon}. \quad (7.65)$$

Razlika ova dva momenta može se predstaviti spregom (**slika 7.31b**):

$$M = M_1 + F \cdot l \quad (7.66)$$

odnosno, kao:

$$-m \cdot i^2 \cdot \varepsilon = -(m_A \cdot a^2 + m_B \cdot b^2) \cdot \varepsilon + F \cdot l \quad (7.67)$$

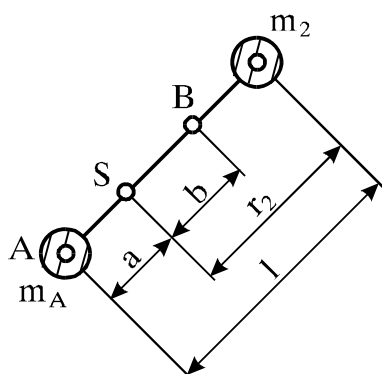
odakle je:

$$F = -\frac{m \cdot \varepsilon \cdot (i^2 - a \cdot b)}{l}. \quad (7.68)$$

## 7.4.2. Dinamička zamena masa

### Dve mase

Dinamički uslovi definisani su jednačinama koje, za slučaj zamene dvema diskretnim masama, imaju četiri nepoznate, što znači da se jedna od njih može slobodno izabrati. Neka je jedna od masa u zglobnoj tački **A** (**slika 7.32**).



Sl.7.32.

Dinamički uslovi se u tom slučaju mogu formulisati izrazima:

$$m_A + m_2 = m \quad (7.69)$$

$$m_A \cdot a - m_2 \cdot r_2 = 0 \quad (7.70)$$

$$m_A \cdot a^2 + m_2 \cdot r_2^2 = m \cdot i^2. \quad (7.71)$$

Kako je:

$$m_A = m \cdot \frac{r_2}{l} \quad (7.72)$$

i

$$m_2 = m \cdot \frac{a}{l} \quad (7.73)$$

iz jednačine (7.71) sledi:

$$r_2 = \frac{i^2}{a} \quad (7.74)$$

nakon čega se dobija:

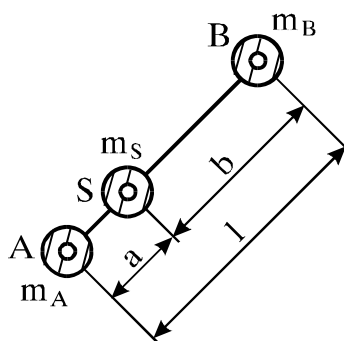
$$m_A = \frac{m \cdot i^2}{a^2 + i^2} \quad (7.75)$$

i

$$m_B = \frac{m \cdot a^2}{a^2 + i^2} \quad (7.76)$$

### Tri mase

Dinamička zamena masa može se izvršiti i trima masama i to tako da se diskretne mase postave u tačke **A**, **B** i **S** (slika 7.33).



Sl.7.33.

Dinamički uslovi se mogu formulisati izrazima:

$$m_A + m_S + m_B = m \quad (7.77)$$

$$m_A \cdot a - m_B \cdot b = 0 \quad (7.78)$$

$$m_A \cdot a^2 + m_B \cdot b^2 = m \cdot i^2 \quad (7.79)$$

Iz jednačine (7.78) sledi:

$$m_A = m_B \cdot \frac{b}{a} \quad (7.80)$$

Smenom u jednačini (7.79) dobija se:

$$m_A = \frac{m \cdot i^2}{l \cdot a} \quad (7.81)$$

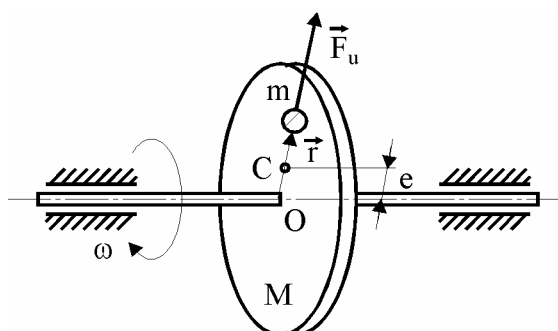
$$m_B = \frac{m \cdot i^2}{l \cdot b} \quad (7.82)$$

Iz jednačine (7.77), zamenom vrednosti za  $m_A$  i  $m_B$ , dobija se da je:

$$m_S = m \cdot \frac{a \cdot b - i^2}{a \cdot b} \quad (7.83)$$

## 7.5. Uravnoteženje rotora

Delovi mašine koji vrše obrtno kretanje nazivaju se rotorima. Osa obrtanja rotora prolazi uvek kroz središta njegovih rukavaca. Ukoliko je rotor potpuno uravnotežen, osa obrtanja je istovremeno jedna od glavnih centralnih osa inercije rotora. U tom slučaju, rotor ne prenosi kinetičke pritiske na ležišta, niti izaziva vibracije.



Sl.7.34.

Ako se na uravnoteženi rotor ukupne mase  $M$ , koji se okreće ugaonom brzinom  $\omega$ , postavi višak mase  $m$  na rastojanju  $r$  od ose obrtanja (slika 7.34), nastupa neuravnoteženost rotora, koja se izražava veličinom:

$$U = m \cdot r \cdot \omega^2 \quad (7.84)$$

Ona na rotoru izaziva pojavu inercijalne centrifugalne sile  $F_u$ , intenziteta:

$$F_u = U \cdot \omega^2 = m \cdot r \cdot \omega^2, \quad (7.85)$$

i dovodi do pomeranja težišta rotora u smeru mase  $m$  (iz tačke  $O$  na osi obrtanja u tačku  $C$ ) za rastojanje:

$$e = \frac{m}{M} \cdot r \left[ \frac{\text{gmm}}{\text{kg}} \equiv \mu\text{m} \right]. \quad (7.86)$$

Ekscentricitet težišta ( $e$ ) pokazuje specifičnu neuravnoteženost tj. neuravnoteženost rotora po jedinici njegove mase. Ovako definisana veličina omogućava upoređivanje neuravnoteženosti rotora različitih masa.

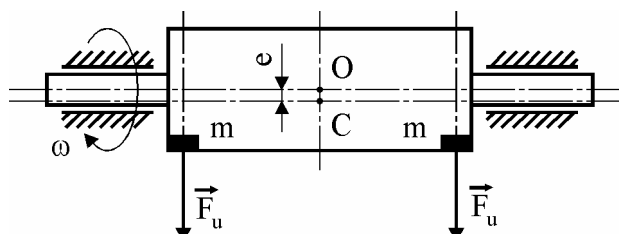
Neuravnoteženost rotora može biti:

- statička,
- dinamička ili
- statičko-dinamička.

U slučaju statičke neuravnoteženosti rotora (slika 7.35), glavna centralna osa inercije paralelno je pomerena u odnosu na osu obrtanja rotora, za rastojanje koje odgovara ekscentricitetu težišta ( $e$ ). Ova vrsta neuravnoteženosti najčešće se javlja kod rotora u obliku diska. Njena vrednost se definiše na već opisani način:

$$U_s = m \cdot r \cdot \omega^2 \quad (7.87)$$

Ispravljanje statičke neuravnoteženosti rotora vrši se u jednoj korekcijskoj ravni, koja obično prolazi kroz njegovo težište.

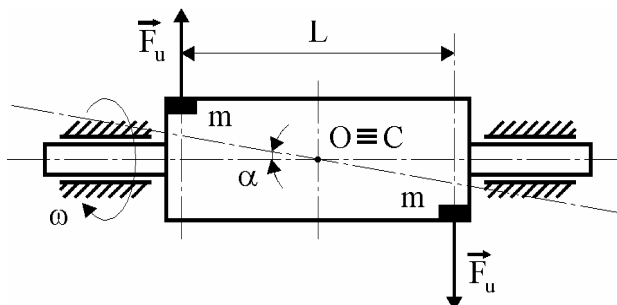


Sl.7.35.

U slučaju dinamičke neuravnoteženosti rotora (**slika 7.36**), težište rotora **C** se i dalje nalazi na osi obrtanja, ali je glavna centralna osa inercije zaokrenuta u odnosu na osu obrtanja za ugao  $\alpha$ . Veličina dinamičke neuravnoteženosti se izražava kao:

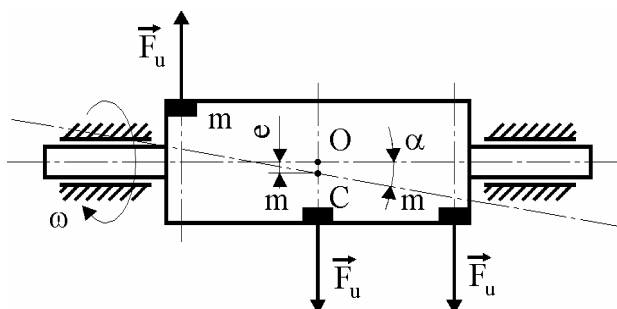
$$U_d = m \cdot r \cdot L \text{ [gmm}^2\text{]} \quad (7.88)$$

pri čemu je **L** - krak sprega neuravnoteženih sila  $F_u$ , koji nastaje kao posledica postojanja viškova mase (**m**).



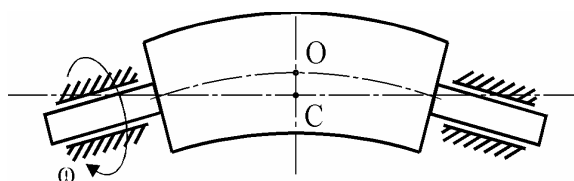
SI.7.36.

Statičko-dinamička ili složena neuravnoteženost rotora (**slika 7.37**) predstavlja kombinaciju prethodne dve vrste neuravnoteženosti. Kod složene neuravnoteženosti, težište rotora **C** je pomeren sa ose obrtanja za ekscentricitet **e**, dok istovremeno glavna centralna osa inercije zaklapa ugao  $\alpha$  sa osom obrtanja rotora. Ispravljanje dinamičke i statičko-dinamičke neuravnoteženosti rotora vrši se u dve korekcijske ravni.



SI.7.37.

Posebno složen slučaj neuravnoteženosti javlja se kod elastičnih rotora, koji se tokom obrtanja savijaju (**slika 7.38**). Ispravljanje ovakve neuravnoteženosti sprovodi se korekcijom u najmanje tri korekcijske ravni.



SI.7.38.

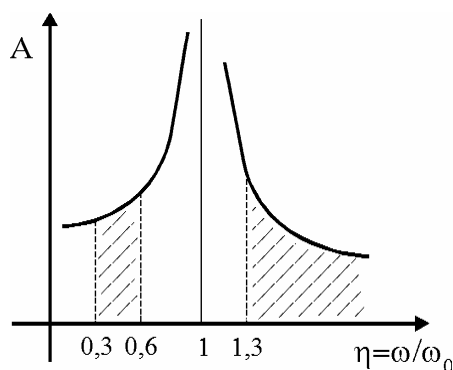
Uzroci neuravnoteženosti rotora mogu biti različiti. Dominiraju:

- nehomogenost materijala rotora (pojava šupljina, šljake, uključaka i drugih grešaka koje nastaju pri livenju, valjanju, izvlačenju itd.),
- netačnost mehaničke i termičke obrade, greške centriranja, nepravilnost oblika rotora (ovalnost, koničnost, iskrivljenost, čeonno bacanje itd.),
- elastična deformabilnost rotora u blizini kritičnih brzina,
- termička deformabilnost rotora usled nehomogenog temperaturnog polja itd.

Kao posledica neuravnoteženosti rotora dolazi do pojave kinetičkih pritisaka i vibracija, koji izazivaju ubrzano trošenje vitalnih sklopova mašine, naročito ležišta i rukavaca. Istovremeno se smanjuje tačnost rada alatnih mašina. Neuravnoteženost rotora proizvodi takodje buku i vibracije, čiji je uticaj na susedne objekte, čoveka i okolinu krajnje negativan.

Zbog svih navedenih razloga neophodno je sprovesti uravnoteženje rotora. Pod postupkom uravnoteženja podrazumeva se postizanje takve raspodele masa na rotoru, pri kojoj će kinetički pritisci na ležišta i vibracije mašine biti u dozvoljenim granicama. Postupak uravnoteženja rotora obuhvata merenje veličine i položaja neuravnoteženosti i potom njeno korigovanje.

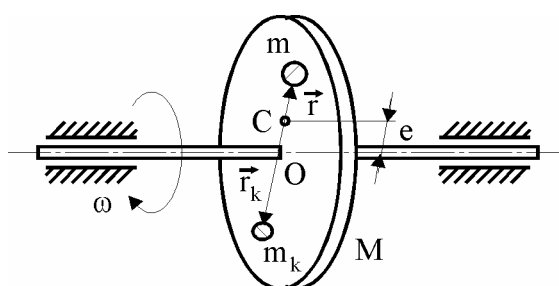
Veličina neuravnoteženosti rotora utvrđuje se merenjem amplitude oscilovanja ležišta (**slika 7.39**). Amplituda (**A**) meri se pri ugaonoj brzini rotora ( $\omega$ ) čija je vrednost dovoljno veća od sopstvene kružne frekvence ( $\omega_0$ ). Na ovaj način smanjuje se uticaj koji bi ugaona brzina rotora ( $\omega$ ) mogla da ima na vrednost amplitude (**A**). Amplituda se, takodje, može meriti i pri znatno manjim ugaonim brzinama rotora, ali ne i pri suviše malim, jer je u tom slučaju teško izmeriti amplitudu (**A**), pošto ona može biti suviše mala.



Sl.7.39.

Ispravljanje neuravnoteženosti rotora vrši se u odgovarajućoj korekcijskoj ravni, dodavanjem korekcijske mase ( $m_k$ ) na radijusu korekcije ( $r_k$ ) suprotno strani viška mase ( $m$ ) u odnosu na položaj ose obrtanja, ili oduzimanjem korekcijske mase ( $m_k$ ) na radijusu korekcije ( $r_k$ ) sa strane viška mase ( $m$ ) u odnosu na položaj ose obrtanja (**slika 7.40**). Izbor pomenutih korekcijskih veličina vrši se na osnovu relacije:

$$m_k \cdot r_k = m \cdot r = M \cdot e. \quad (7.89)$$



Sl.7.40.

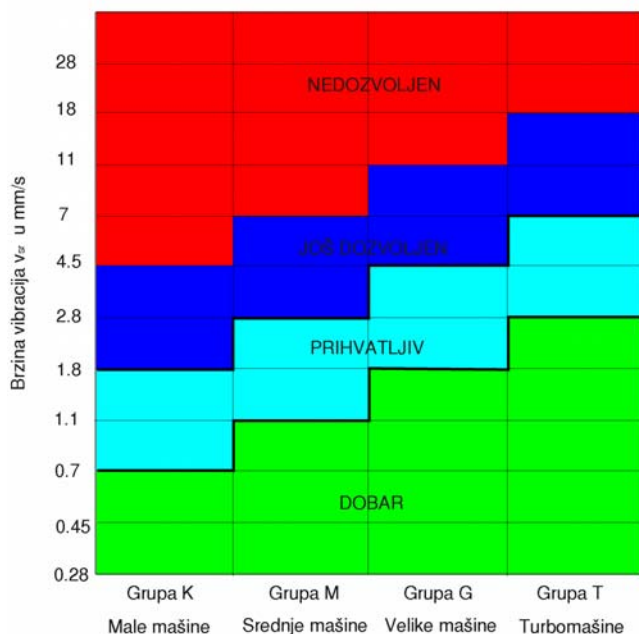
Uravnoteženje danas predstavlja redovnu i obaveznu operaciju kojoj mora da bude podvrgnut sklop rotora svake mašine posle procesa izrade, a pre konačne montaže. Takodje, prilikom servisiranja i tokom eksploatacije mašina svaki rotor treba uravnotežiti ukoliko je servisiranje vršeno zamenom ili ponovnom obradom nekih elemenata sklopa, kao i ukoliko je u toku eksploatacije došlo do habanja delova.

Za ocenu stanja postrojenja sa obrtnim masama usvojeni su kriterijumi bazirani na merenju apsolutnih vibracija ležišta na spoljašnjoj površini mašine (kućišta ležajeva ili nosači kućišta ležajeva). Standardom ISO/IS 2372 (**slika 7.41**) mašine su podeljene u nekoliko grupa (tačno je specificirano koja mašina pripada kojoj grupi), a kao kriterijum intenziteta vibracija uzeta je srednja brzina vibracija u frekventnom opsegu od 10 do 1.000 Hz.

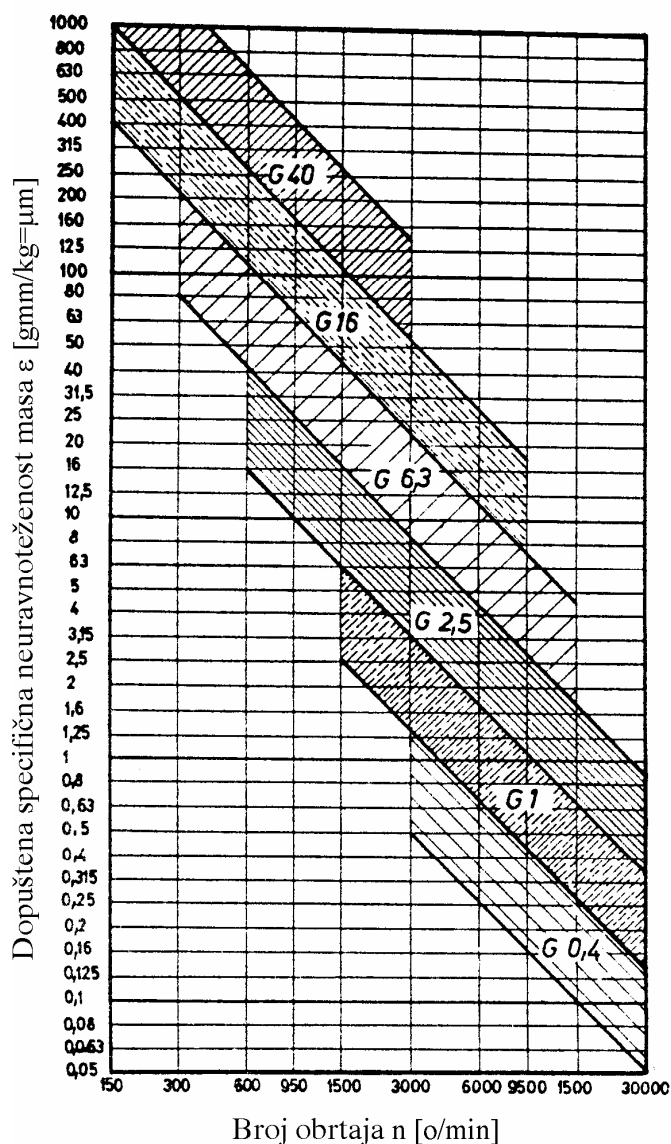
Za izbor dozvoljene zaostale neuravnoteženosti, posle postupka korekcije, potrebno je poznavati namenu rotora, broj obrtaja, masu sklopa rotora, položaj korekcijskih i oslonih ravni, radijuse korekcije i ostale konstrukcijske podatke. Pošto inercijalna sila neuravnoteženosti ( $F_u$ ) zavisi od kvadrata ugaone brzine rotora ( $\omega^2$ ), očigledno je da dozvoljena zaostala neuravnoteženost treba da bude što manja ukoliko je ugaona brzina rotora ( $\omega$ ) veća. Ova činjenica posebno dobija na težini ako se uzme u obzir stalna težnja pri gradnji mašina za povećanjem brzohodosti, odnosno za povećanjem broja obrtaja njihovih rotora  $n = \pi\omega/30$  [o/min]. Zbog toga su svi rotori mašina, na osnovu dugogodišnjeg iskustva i brojnih eksperimenata, podeljeni u šest klasa tačnosti, prema propisima VDI 2060, koji služe kao preporuke (**slika 7.42**).



Apsolutne brzine vibracija prema ISO 2372 (VDI 2056)



SI.7.41.



SI.7.42.

G40:

- automobil ski točkovi
- bandaši (felne), itd.

G16:

- rotori prenosnika,
- delovi zglobnih vretena sporohodnih mašina, itd.

G6,3:

- kardanska i zglobna vratila specijalnih zahteva,
- delovi mašina alatki,
- ventilatori,
- centrifugalni doboši,
- radilice četvero i više cilindričnih motora,
- zamajci,
- rotori normalnih elektromotora, itd.

G2,5:

- rotori parnih i gasnih mašina,
- turbokompresora, turbogeneratora,
- delovi prenosnika alatnih mašina,
- rotori srednjih i velikih elektromotora sa naročitim zahtevima,
- rotori malih elektromotora, itd.

G1:

- rotori turboreaktivnih mašina,
- delovi pogona magnetofona,
- brusilica i prenosnika fine mehanike,
- rotori mikromotora sa naročitim zahtevima, itd.

G0,4:

- vretena najfinijih brusilica,
- tocila,
- rotori žiroskopa, itd.

**LITERATURA**

- [1] Živković,Ž., Teorija mašina i mehanizama - Kinematika, Mašinski fakultet, Niš, 1992.
- [2] Živković,Ž., Teorija mašina i mehanizama - Dinamika, autorizovana predavanja, Katedra za precizno mašinstvo i automatiku, Mašinski fakultet u Nišu, 1999.
- [3] Autorenkollektiv (Editor Volmer,J.), Getriebetechnik, VEB Verlag Technik, Berlin, 1976.
- [4] Bögelsack,G., Christen,G., Mechanismen-technik, 1,2,3. Lehrbrief, VEB Verlag Technik, Berlin, 1977.
- [5] Dittrich,G., Braune,R., Getriebetechnik in Beispielen, R.Oldenburger Verlag München Wien, 1978.
- [6] Erdman,G.A.,Sandor,N.G., Mechanism Design - Analysis and Synthesis, Prentice Hall, New Jersey,1997.
- [7] Norton, L. N., Design of Machinery - An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines, McGraw-Hill, New York, 2001.
- [8] Uicker,J., Pennock,G., Shigley,J., Theory of Machines and Mechanisms, Oxford University Press, 2003.