МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У НИШУ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
Испитни рок ***Децембарски испитни рок (25. децембар) 2008.***
Предметни наставник: ***Проф. др Катица (Стевановић) Хедрих***, *академик* ***Академије наука високих школа и универзитета Украјине, академик Академије нелинеарних наука Москва,члан Научног друштва Србије,*** *члан GAMM, Int. ASME, EuroMech, American Academy of Mechanics, M.C. Chaki Centre for Mathematics and Mathematical Sciences и Tensor Society.*
Предметни асистент: Мг ***Јулијана Симоновић,*** асистент-приправник (на одсуству), мр ***Горан Јаневски,*** асистент

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ПИСМЕНОГ ДЕЛА ИСПИТА ИЗ ПРЕДМЕТА

МЕHANIKA III - ДИНАМИКА

MEHANIKA III - DINAMIKA

PRVI ZADATAK. Materijalna tačka mase m, puštena je početnom brzinom $\vec{v}_0$, u polju Zemljine teže, iz položaja A, na visini h_0, u odnosu na referentni horzont, da se kliza niz HRAPAVU strmu ravan, koja sa horizontom zaklapa ugao α. Koeficijent trenja klizanja niz strmu ravan je μ. Linija ALB, preseka strme ravni i vertikalne ravni, sa slike 1. je u vertikalnoj ravni. Strma ravan se, u tački M, nastavlja u deo cilindrične idealno glatkue površi poluprečnika $R = 6r$, centralnog ugla α, koja se zatim nastavlja u deo horizontalne hrapave ravai, dužine R, a zatim u deo cilindrične površi centralnog ugla π i poluprečnika $R = 6r$, kao što je na slici 1. ptikazano.

a* Koji uslov treba da zadovoljava početna brzina $\vec{v}_0$ materijalne tačke, da bi se klizala po strmoj ravni, zadržavajući svoje položaje, kroz koje prolazi, na toj strmoja ravni, ostajuči sve vreme u toj vertikalnoj ravni?

b * Koliko stepeni slobode kretanja ima materijalna tačka dok se kliza niz strmu ravan, po cilindričnim površima, kao i horzontalnoj ravni, a koliko stepeni kada napusti drugu cilindričnu površ po prolasku kroz položaj B? Obrazloži odgovor.

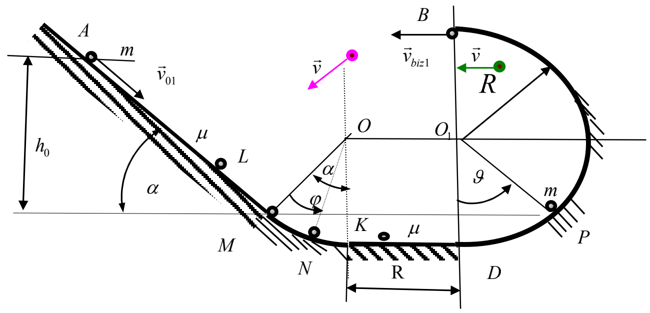
c* Napisati kinetičku i potencijalnu energiju materijalne tačke pri klizanju niz HRAPAVU strmu ravan, po cilidričnim glatkim površima, kao i horizontalnoj hrapavoj ravnu, kao i po napustanju druge cilindrične površi, a u položajima A (početni položaj), L (proizvoljan položaj na strmpj tavnni), N (položaj odredjen uglom φ na cilindričnoj površi), K (na hrapavoj horizontalnoj ravni), P (položaj odredjen uglom ϑ na cilindričnoj površi), B (u krajnjem gornjem položaju na drugoj glatkoj cilindričnoj površi) i D (kada napusti cilindričnu površ). Da li je sistem konzervativan ili nekonzervativan? Obrazloži odgovor. Na osnovu teoreme o promeni ukupne energije sistema napisati odgovarajući matematički iskaz primene promene ukupne mehaničke energije sistema u svim fazama kretanja sistema (po hrapavoj strmoj ravni, po cilindričnoj glatkoj jednoj, odnosno drugoj površi i po napuštanju iste) i obrazloži .

d* Odrediti brzine materijalne tačke, pri njenom prolasku kroz tačku N odredjenu uglom φ na cilindričnoj površi, kao i pri prolasku kroz tačku B, u kojoj napušta cilindričnu površ;

e* Odrediti jednačine kretanja materijalne talke po napuštanju cilindrične površi u tački B. Kolika je maksimalna visina $H_{\max} = ?$ koju će postići materijalna tačka u fazi kretanja po napuštanju cilindrične površi, kao i njen maksimalni domet $D_{\max} = ?$ u toj fazi kretanja.

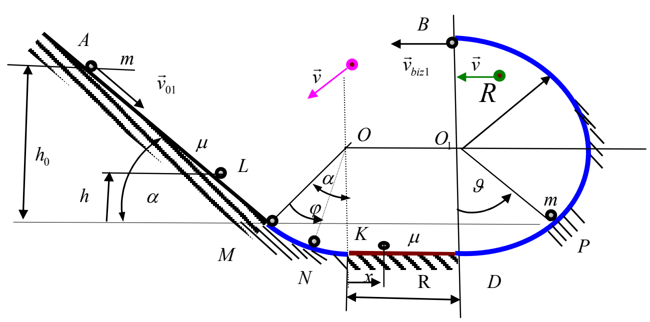
g* Kolika je ugaona brzina materijalne tačke u položaju dostizanja maksimalne visine $H_{\max}$?

h* Kolika je sila pritiska na cilindričnu površ u proizvoljnom polžaju materijalne tačke na njoj? Koliki treba da bude ugao α, odnosno početna brzina $\vec{v}_0$ materijalne tačke, te da se ona odvoji od cilindrične površi pre izlaska sa iste (njenog kraja)?



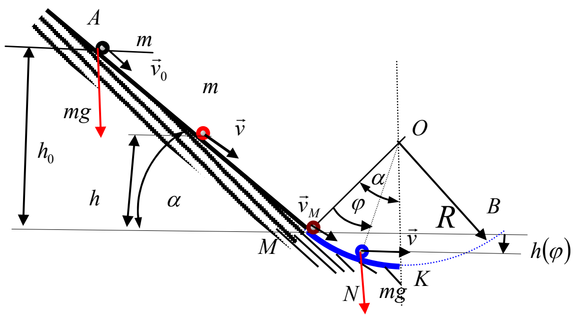
Slika 1.

REŠEWE PRVOG ZADATKA: Materijalna tačka u prostoru ima tri stepeni slobode kretanja. Kad se podvrgne vezi onda se njen broj stepeni slobode smanjuje zavisno od broja ograničenja, koja joj nameće veza: Kada je zadatkom zadato kretanje materijalne tačke u vertikalnoj ravni, onda materijalna tačka ima dva stepena slobode kretanja u toj ravni. Veza izražena time da se ta materijalna tačka kreće i po strmoj ravni, ostajući sve vreme i u vertikalnoj ravni, znači da se ona može kretati po presečnoj liniji strme ravni i vertikalne ravni, pa joj je preostao samo jedan stepen slobode kretanja. Medjutim, nametnuta veza ’’kretanja materijalne tačke po strmoj ravni’’ je jednostrano zadržavajuća veza, pa materijalna tačka može ostati na toj ravni samo ako je njena brzina u svakom trenutku kretanja paralelna toj ravni i leži u vertikalnoj ravni, uključujući i poetnu brzinu, kada materijalna tačka bila na toj strmoj ravni. Zato i njena početna brzina treba da zadovoljava taj uslov, (a ovaj uslov se izrazava i relacijom $(\vec{v}.grad f)=0$). Taj usmo znači da su brzina i vektor normale na strmu ravan, dva ortogonalna vektora, te je njihov skalarni proiuvod jednak nuli. Ovde se postavlja pitanje da li postoji položaj na hrapavoj strmoj ravni u kojme će se materijalna tačka zaustaviti. Ako je početna brzina materijalne taćke dovoljno mala da postoji položaj na hrapavoj strmoj ravni do koga je u kretanju materijalne tačke od početnog položaja do tog položaja promena ukupne energije sistema jednaka radu sile trenja uz uslov da je kinetička energija materijalne tačke u tom položaju jednaka nuli, odnosno njena brzina u tom položaju jednaka nuli, materijalna tačka će se zaustaviti na strmoj ravni i neće preći na kretanje po prvoj cilindričnoj površi. Ako se materijalna tačka ne zaustavi u nekom položaju na hrapavoj strmoj tavni, materijalna tačka će otpočeti drugu fazu kretanja po prvoj idealno glatkoj cilindričnoj površi.

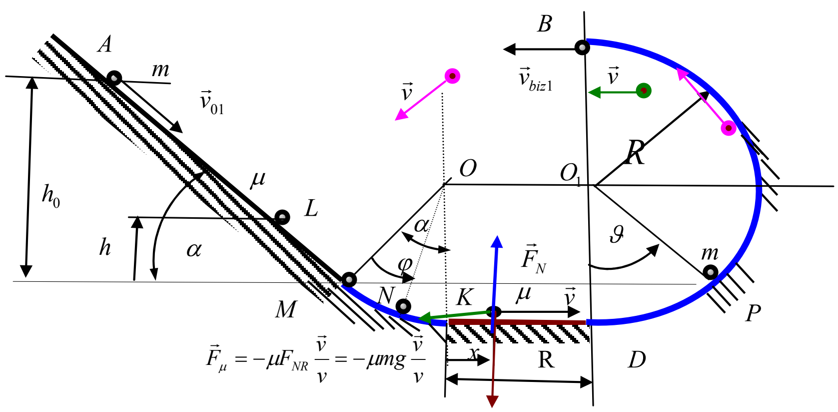


Slika 1. a* Materijalni sistem sa jednim i dva stepenom slobode kretanja-prva, druga, treća i četvrta faza kretanja sa jednim stepenom slobode kretanja, peta faza sa dva stepena slobode kretanja: I* po strmoj hrapavoj ravni, II* po prvoj idealno glatkoj cilindričnoj glatkoj površi, III* horizontalnoj hrapavoj ravni i IV* po drugoj idealno glatkoj cilindričnoj površi, V.a* slobodno kretanje materijalne tačke u vertikalnoj ravisa dva stepena slobode kretanja; ili V.b* povratno kretanje suprotno smernu kroz faze IV*, III*, II* i I* it. Ako su ispunjeni odredjeni uslovi, i u svim fazama u vertikalnoj ravni.

Druga faza kretanja nastupa kada materijalna tačka predje sa kose htapave ravni na na prvu cilindričnu idealno glatku površ, prolazeći kroz položaj (tačku) M, kako je zadatkom definisano, a onda ona mora da se kreće po presečnoj liniji (deo kružnog luka) cilindrične površi i vertikalne ravni, te i u toj drugoj fazi kretanja ona ima jedan stepen slobode kretanja. Kako je, i tom slučaju veza jednostrano zadržavajuća, na toj vezi će ostati sve dok je njena brzina u tangencijalnom pravcu na tu površ, a dok sila pritiska materijalne tačke na tu cilindričnu površ bude veća od nule. Kada postane jednaka nuli, materijalna tačka će se odvojiti od cilindrične površi i nastaviti da se kreće u vertikalnoj ravni pod dejstvom sile zemljine teže i imajući pri tome dva stepena slobode kretanja, a sa početnom brzinom, koja je jednaka brzini koju je imala u trenutku, kada je pritisak na cilindričnu površ postao jednak nuli. Ako na cilindričnoj površi, u toj drugoj fazi kretanja meterijalne tačke, ne postoji položaj u kome je pritisak materijalne tačke na cilindričnu površ jednak nuli, a to je i očigledno kada je ugao α oštar, materijalna tačka će se kretati do kraja, po toj površi, i u tački K preći u treću fazu kretanja po horizontalnoj hrapavoj ravni, po kojoj će se kretati ili dok se ne zaustavi na njoj, ili dok ne prođe kroz tačku D i pređe u četbrtu fazu kretanja po drugoj cilindričnoj površi. Prema položaju i obliku ovog dela cilindrične površi očigledno je da će u ovoj fazi doći do ubrzavanja materijalne taćke i povećanja nja njene brzine u odnosu na brzinu, kojom je otpočela ovu fazu kretanja, jer se u polju Zemljine teže njeni položaji spuštaju, te se na račun smanjenja potencijalne energije materijalne tačke povećava njena kinetička energija, a sa time i njena brzina, jer nema otpora kretanju u tangencijalnim pravcima na pravac kretanja materijalne tačke po toj cilindričnoj površi.



Slika 1.b* Materijalni sistem sa jednim stepenom slobode kretanja - prva i druga faza kretanja : po strmoj hrapavoj ravni i po cilindričnoj glatkoj površi i u vertikalnoj ravni.



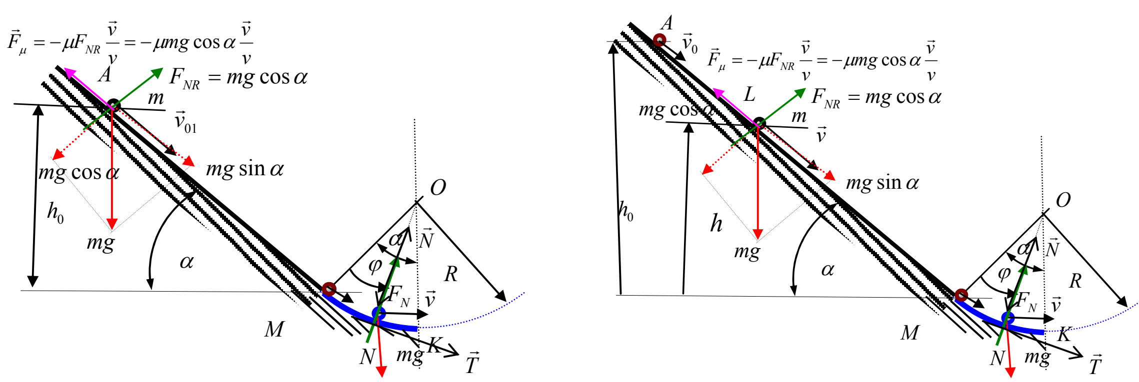
Slika 1.c* Materijalni sistem sa jednim i dva stepenom slobode kretanja-prva, druga, treća i četvrta faza kretanja sa jednim stepenom slobode kretanja, peta faza sa dva stepena slobode kretanja: I* po strmoj hrapavoj ravni, II* po prvoj idealno glatkoj cilindričnoj glatkoj površi, III* horizontalnoj hrapavoj ravni i IV* po drugoj idealno glatkoj cilindričnoj površi, V.a* slobodno kretanje materijalne tačke u vertikalnoj ravisa dva stepena slobode kretanja; ili V.b* povratno kretanje suprotno smernu kroz faze IV*, III*, II* i I* it. Ako su ispunjeni odredjeni uslovi, i u svim fazama u vertikalnoj ravni.

U trećoj fazi kretanja, po horizontalnoj hrapavoj ravni, materijalna tačka ima, takodje, jedan stepen slobode kretanja i uslov zaustavljanja materijalne tačke je, kada njena brzina postane jednaka nuli, i izražen je jednakošću njene ukupne energije, odnosno njene kinetičke energije, jer se potencijalna energija ne menja u toj fazi kretanja, koju je materijalna tačka imala u trenutku ulaska u tu treću fazu kretanja, a to je u položaju K i rada sile trenja, koja se javlja kao otpor kretanju materijalne tačke po toj horizontalnoj hrapavoj ravni, na putu materijalne tačke od ulaska na hrapavu horizontalnu ravan do položaja zaustamljanja materijalne tačke na njoj. Ako postoji takav položaj na hrapavoj radni, u tom položaju je brzina materijalne tačke jednaka nuli. Ako ne postoji ni jedan položaj na toj hrapavoj horizontalnoj ravni u kome brzina materijalne tačke postane jednaka nuli, materijalna tačka, prolazeći kroz položaj D, prelazi na kretanje po drugoj cilindričnoj površi, početnom brzinom koju je imala u položaju D. Ulaskom na drugu cilindričnu površ materijalna tačka je otpočela četvrtu fazu kretanja.

Znači, da četvrta faza kretanja nastupa, kada materijalna tačka predje sa horizontalne hrapave ravni na drugu idealno glatku cilindričnu površ, prolazeći kroz položaj (tačku) D, kako je zadatkom definisano. I, tada materijalna tačka mora da se kreće po presečnoj liniji (deo kružnog luka) cilindrične površi i vertikalne ravni, te i u toj četvrtoj fazi kretanja ona ima jedan stepen slobode kretanja. Kako je i ta veza jednostrano zadržavajuća, materijalna tačka će ostati na toj vezi sve dok je njena brzina u tangencijalnom pravcu na tu površ, i dok sila pritiska materijalne tačke na tu cilindričnu površ bude veća od nule. Kada sila pritiska materijalne tačke na tu vezu – cilindričnu površ postane jednaka nuli, materijalna tačka će se odvojiti od cilindrične površi i nastaviti da se kreće u vertikalnoj ravni pod dejstvom sile zemljine teže, a sa početnom brzinom, koja je jednaka brzini koju je imala u trenutku, kada je pritisak na cilindričnu površ postao jednak nuli. Ako postoji takav položaj na cilindričnoj površi, materijalna tačka se odvaja od te površi, jer je veza jednostrano zadržavajuća, i otpoćinje petu fazu kretanja, kao slobodna materijalna tačka koja ima tri stepeni slobode kretanja. Medjutim, kako je njena početna brzina, kojom se odvojila od cilindrične površi, u vertikalnoj ravni, to će ona nastaviti da se kreće u toj vertikalnoj ravni, jer na nju dejstvuje sila teže koja je u vertikalnoj ravni, te se ona ponaša kao da ima dva, a ne tri stepeni slobode kretanja.

Ako na cilindričnoj površi, u toj četvrtoj fazi kretanja meterijalne tačke, ne postoji ni jedan položaj u kome je pritisak materijalne tačke na cilindričnu površ jednak nuli, materijalna tačka će nastaviti da se kreće po cilindričnoj površi (upravo po presećnoj liniji cilindrične povrči i vertikalne ravni) i u tački B će napustiti tu površ brzinom $\vec{v}_B$. Posle tog položaja i trenutka, materijalna tačka će se i dalje kretati u vertikalnoj ravni pod dejstvom sile sopstvene težine, i tada je u petoj fazi kretanja, kada će i imati dva stepena slobode kretanja (tip kretanja je kosi ’ upštem slučaju, au ovom horizontalni hitac, a treći stepen slobode poništen početnom brzinom te faze kretanja, koja leži u vertikalnoj ravni) i sa početnom brzinom, koja je jednaka brzini $\vec{v}_B$ napuštanja cilindrične površi u taćki B i u horizontalnom pravcu.

I da zaključimo, kretanje materijalne tačke se odvija kroz pet faza kretanja, ili vise faza za slučaj u povratnom suprotnosmernom kretanju, ili manje, zavisno od odnosa kinetičkih i geometrijskih parametara sistema. Prve četiri faze kretanja materijalna tačka ostvaruje sa po jednim stepenom slobode kretanja, dok peta faza kretanja se ostvaruje sa dva stepena slobode kretanja (jer jedan stepen slobode kretanja je eliminisan svojstvom pravca početne brzine koja je u vertikalnoj ravni (vidi slike 1.a* , 1.b*, 1. c*).



Slika 1. d* Materijalni sistem sa jednim stepenom slobode kretanja: analiza sila koje dejstvuju na materijalnu tačku u početnom trenutku , kao i u prvoj i drugoj fayi kretanja i u proizvoljnim položajima prve i druge faze kretanja.- prva faza kretanja po strmoj hrapavoj ravni i druga faza kretanja po cilindričnoj glatkoj površi i u vertikalnoj ravni.

Koristimo zaključke prethodne analize. U prvoj fazi kretanja, kada materijalna tačka ima jedan stepen slobode kretanja, za generalisanu koordinatu možemo usvojiti koordinatu x merenu od početnog položaja i u pravcu strme hrapave ravni naniže, ili koordinatu h-visinu položaja materijalne tačke merenu od istog referentnog nivoa od koga je merena i zadata početna visina h_0

položaja materijalne tačke u početnom trenutku, kao što je to prikazano na slici 1.d*. Ovo je pitanje volje izbora onoga ko rešava zadatak, ali se samo jedna od tih koordinata može proglasiti generalisanom (nezavisnom), a druga izraziti pomoću funkcionalne veze sa izabranom i proglašenom koordinatom za generalisanu koordinatu. Ta veza je: $h = h_0 - x\sin\alpha$, odnosno diferenciranjem $\dot{h} = -\dot{x}\sin\alpha = -v\sin\alpha$, dobijamo izraz za brzinu $v = \dot{x} = -\dfrac{\dot{h}}{\sin\alpha}$.

Kinetička energija sistema, u prvoj fazi kretanja materijalne tačke po strmoj hrapavoj ravni, jednaka je kinetičkoj energiji translacije te materijalne tačke brzinom v i u položaju odredjenom visonom h:

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{h}}{\sin\alpha}\right)^2,$$

Na sistem, od aktivnih sila dejstvuje samo sila Zemljine teže mg, koja je konzervativna sila i ima funkciju sile, odnosno potencijal. Potencijalna energija sistema je jednaka radu sile težina sa promenjenim znakom:

$$\mathbf{E_p} = mgh = mg(h_0 - x\sin\alpha)$$

i izražena je pomoću koordinate h u pravcu vertikale, ili pomoću koordinate x, koju smo izabrali za generalisanu koordinatu. Mogli smo umesto koordinate x za generalisanu koordinatu izabrati koordinate h u pravcu vertikale. Pretpostavljamo da je početna brzina v_0 materijalne tačke usmerena niz strmu ravan,

Prilikom klizanja materijalne tačke po hrapavoj strmoj ravni koeficijenta trenja μ, javlja se sila trenja $\vec{F}_\mu$, koja je proporcionalna normalnom pritisku materijalne tačke na strmu ravan i koeficijentu trenja μ i suprotno usmerena od smera kretanja, odnosno brzine materijalne tačke. Taj pritisak $F_{NR} = mg\cos\alpha$, i predstavlja komponentu sile težine upravnu na kosu rava, te je sila trenja klizanja materijalne tačke po strmoj ravni jednaka

$$\vec{F}_\mu = -\mu F_{NR}\frac{\vec{v}}{v} = -\mu mg\cos\alpha\frac{\vec{v}}{v}$$

Rad sile trenja F_μ klizanja materijalne tačke po hrapavoj stmoj ravni pri njenom kretanju od početnog položaja do položaja odredjenog koordinatom x, ili h je:

$$\mathbf{A}^{\mathbf{F}_\mu} = \int_0^x \left(\vec{F}_\mu, d\vec{s}\right) = \int_0^x \left(-\mu F_{NR}\frac{\vec{v}}{v}, d\vec{s}\right) = -\mu mgx\cos\alpha$$

$$\mathbf{A}^{\mathbf{F}_\mu} = -\mu mg\frac{h_0 - h}{\sin\alpha}\cos\alpha = -\mu mg(h_0 - h)ctg\alpha$$

jer je sila trenja klizanja konstantna u toku kretanja materijalne tačke po strmoj hrapavoj ravni, jer je i pritisak materijalne tačke u toku njenog kretanja po strmoj ravni konstantan.

Kako se zadatkom traži brzina v materijalne, to koristićemo integral energije nekonzervativnog sistema, odnosno teoremu o prom ukupne mehaničke energiji nekonzervativnog sistema, prilikom kretanja materijalne tačke na koju desjtvuju i nekonzervativne sile - sila trenja $\vec{F}_\mu$. Promena ukupne mehaničke energije nekonzervativnog sistema jednaka je snazi rada nekonzervativnih sila, odnosno za konačni interval vremena, ako su te nekonzervativne sile konstantne, kao što je to slučaj sa silom trenja pri kretanju materijalne tačke po strmoj hrapavoj ravni, to sledi da je opadanje ukupne mehaničke energije sistema jednako radu sile trenja na odredjenom putu kretanja te materijalne tačke po hrapavoj strmoj ravni. Na osnovu toga pišemo da je:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} - \left(\mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}}\right) = \mathbf{A}^{F_\mu} = -\mu mg(h_0 - h)ctg\alpha$$

ili

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} - \mathbf{A}^{F_\mu} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}}$$

odnosno:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh - (-\mu mg\cos\alpha)\frac{(h_0 - h)}{\sin\alpha} = \mathbf{E_0} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0$$

odakle sledi da je:

$$v^2 = v_0^2 + 2g(h_0 - h)(1 - \mu ctg\alpha)$$

odnosno

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h)(1 - \mu\, ctg\alpha)}$$

Ako prethodnu vezu izrazimo preko generalisane koordinate x možemo da napišemo sledeće:

$$v = \dot{x} = \sqrt{v_0^2 + 2gx(1 - \mu\, ctg\alpha)\sin\alpha}$$

Prethodnim izrazima - obrascima smo odredili brzinu materijalne tačke u funkciji generalisane koordinate za vreme njenog kretanja po strmoj hrapavoj ravni koeficijenta trenja μ, a u proizvoljnom položaju na njoj odredjenom ili koordinatom h, ili koordinatom x, zavisno od toga koju smo koordinatu izabrali za nezavinsu i proglasili je generalisanom. Brzina materijalne tačke v_M u položaju M, tački prelaska sa strme hrapave ravni na cilindričnu glatku površ je:

$$v_M = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1 - \mu\, ctg\alpha)}$$

Na pitanje da li će se materijalna tačka zaustaviti na strmoj hrapavoj ravni i ne preći u narednu fazu kretanja, odgovaramo da je uslov da brzina kretanja ni u jednom položaju na strmoj ravni, ne bude jednaka nuli. Iz tog uslova dobijamo:

a* uslov da se materijalna tačka ne zaustavi na strmoh hrapavoj ravni:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h)(1 - \mu\, ctg\alpha)} > 0$$

$$v_0^2 + 2g(h_0 - h)(1 - \mu\, ctg\alpha) > 0,\ 1 - \mu\, ctg\alpha > 0,\ \mu = tg\gamma < tg\alpha$$

Uslov da se materijalna tačka ne zaustavi na strmoj hrapavoj ravni je da ugao α nagiba hrapave strme ravni veći od ugla $\gamma = arctg\mu$ konusa trenja hhrapave strme ravni.

b* uslov da se materijalna tačka zaustavi na strmoh hrapavoj ravni:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h)(1 - \mu\, ctg\alpha)} = 0$$

$$v_0^2 + 2g(h_0 - h)(1 - \mu\, ctg\alpha) = 0$$

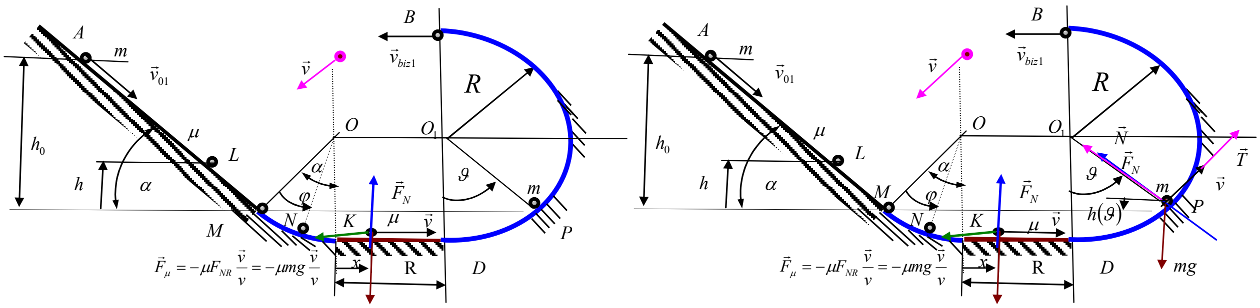
$$h_{zaust} = \frac{v_0^2}{2g(1 - \mu\, ctg\alpha)} + h_0 < h_0 \quad za \quad 1 - \mu\, ctg\alpha < 0$$

$$h_{zaust} = \frac{v_0^2}{2g(1 - \mu\, ctg\alpha)} + h_0 < h_0 \quad za \quad \mu\, ctg\alpha > 1$$

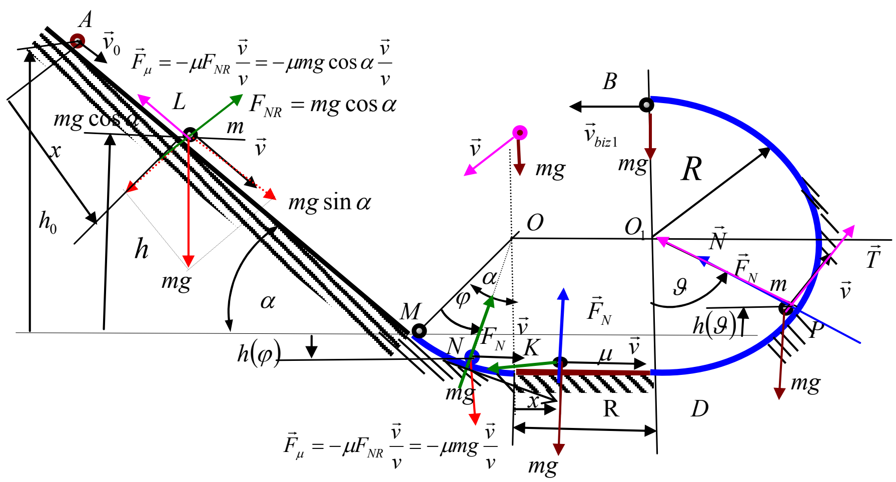
$$h_{zaust} = \frac{v_0^2}{2g(1 - \mu\, ctg\alpha)} + h_0 < h_0 \quad za \quad \mu = tg\gamma > tg\alpha$$

$$h_{zaust} = h_0 - \frac{v_0^2}{2g\left(\frac{tg\gamma}{tg\alpha} - 1\right)} < h_0 \quad za \quad \gamma > \alpha$$

Uslov da se materijalna tačka zaustavi na strmoj ravni je da ugao α nagiba hrapave strme ravni manji od ugla $\gamma = arctg\mu$ konusa trenja hrapave strme ravni. Ako taj uslov nije zadovoljen, materijalna tačka će u položaju M prelaska hrapave strme ravni na glatku cilindričnu površ imati brzinu veću od nule i nastaviće kretanje ušavši u drugu fazu kretanja.



Slika 1. e* Materijalni sistem sa jednim i dva stepenom slobode kretanja: analiza sila koje dejstvuju na materijalnu tačku. - treća i četvrta faza kretanja materijalne tačke sa jednim stepenom slobode kretanja, peta faza sa dva stepena slobode kretanja: I* po strmoj hrapavoj ravni, II* po prvoj idealno glatkoj cilindričnoj glatkoj površi, III* horizontalnoj hrapavoj ravni i IV* po drugoj idealno glatkoj cilindričnoj površi i u svim fazama u vertikalnoj ravni.
V.a* slobodno kretanje materijalne tačke u vertikalnoj ravisa dva stepena slobode kretanja; ili V.b* povratno kretanje suprotno smernu kroz faze IV*, III*, II* i I* it. Ako su ispunjeni odredjeni uslovi, i u svim fazama u vertikalnoj ravni.



Slika 1. f* Materijalni sistem sa jednim i dva stepenom slobode kretanja: analiza sila koje dejstvuju na materijalnu tačku. - treća i četvrta faza kretanja materijalne tačke sa jednim stepenom slobode kretanja, peta faza sa dva stepena slobode kretanja: I* po strmoj hrapavoj ravni, II* po prvoj idealno glatkoj cilindričnoj glatkoj površi, III* horizontalnoj hrapavoj ravni i IV* po drugoj idealno glatkoj cilindričnoj površi; V.a* slobodno kretanje materijalne tačke u vertikalnoj ravisa dva stepena slobode kretanja; ili V.b* povratno kretanje suprotno smernu kroz faze IV*, III*, II* i I* it. Ako su ispunjeni odredjeni uslovi, i u svim fazama u vertikalnoj ravni.

Za drugu fazu kretanja materijalne tačke po prvoj cilindričnoj glatkoj površi sistem ima, ona, takodje, ima jedan stepen slobode kretanja, i za tu fazu kretanja za generalisanu koordinatu izaberimo centralni ugao φ, koji poluprečnik, koji prolazi kroz tačku N u kojoj je materijalna tačka i centar krivine cilindrične površi (luka) čini sa poluprečnikom kroz materijalnu tačku, kada je ona u položaju M, ulaska na cilindričnu površ. Tu generalisanu koordinatu smo obeležili sa φ. U toj fazi kretanja, za generalisanu koordinatu smo mogli izabrati i krivolinijsku koordinatu luk s, koji je sa prethodno izabranom generalisanom koordinatim vezan sledećom vezom: $s(\varphi) = R\varphi$. Da napomenemo, da za sistem sa jednim stepenom slobode kretanja, što smo ovde utvrdili, da samo jednu koordinatu možemo proglasiti (izabrati za nezavisnu) za generalisanu, a ostale koordinate položaja sistema izraziti preko izabrane nezavisne koordinate. Izbor generalisane koordinate se prepusta volji onoga ko rešava zadatak, ali od izbora generalisane koordinate nekada zavisi i ''elegantnost'' i kraći put rešavanja zadatka, o čemu je vazno voditi računa.

Brzina materijalne tačke v u funkciji generalisane koordinate φ pri kretanju po cilindričnoj glatkoj površi je:

$$v = \frac{ds(\varphi)}{dt} = R\dot{\varphi}$$

Kinetička energija sistema je jednaka kinetičkoj energiji translacije materijalne tačke po krivolinijskoj putanji poluprečnika R:

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2$$

Na sistem, i u ovoj fazi kretanja, od aktivnih sila na materijalnu tačku dejstvuje samo sila Zemljine teže mg, koja je konzervativna sila i ima funkciju sile, odnosno potencijal. Potencijalna energija sistema u ovoj faui kretanja je:

$$\mathbf{E_p} = -mgh(\varphi) = mgR[\cos\alpha - \cos(\alpha - \varphi)]$$

i izražena je pomoću koordinate h u pravcu vertikale, ili pomoću koordinate φ koju smo izabrali za generalisanu koordinatu, jer se napadna tačka sile težine materijalne tačke spušta za

$$(\downarrow)\, h(\varphi) = R[\cos(\alpha - \varphi) - \cos\alpha]$$

što je uočljivo sa slike 1.d*, 1-e* I 1.f*. Mogli smo umesto koordinate φ za generalisanu koordinatu izabrati koordinatu s, u pravcu luka poluprečnika R putanje, koju opisuje materijalna tačka pri kretanju po cilindričnoj glatkoj površi. Tada je izraz za potencijalu energiju:

$$\mathbf{E_p} = -mgh(s) = mgR\left[\cos\alpha - \cos\left(\alpha - \frac{s}{R}\right)\right]$$

Kako se zadatkom, i u ovoj fazi kretanja, traži brzina v kretanja materijalne tačke po cilindričnoj glatkoj površi, koristićemo integral energije, odnosno teoremu o ukupnoj mehanučkoj energiji sistema, koja je konstantna u toku kretanja sistema za konzervativne sisteme i jednaka ukupnoj mehaničkoj energiji sistema koju je sistem imao u poetnom trenutku kretanja po glatkoj cilindričnoj površi, a ovde je to ukupna mehanička energija materijalne tačke pri ulasku u na cilindričnu glatku površ. Na osnovu toga pišemo da je:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \mathbf{E_{k\mathit{M}}} + \mathbf{E_{p\mathit{M}}} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}} + \mathbf{A}^{F_\mu}$$

ili

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \mathbf{E_{k\mathit{M}}} + \mathbf{E_{p\mathit{M}}} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}} + (-\mu mg\cos\alpha)\frac{h_0}{\sin\alpha}$$

ili

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} - \mathbf{A}^{F_\mu} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}}$$

ili

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}} + \mathbf{A}^{F_\mu} = \mathbf{E_{k\mathit{M}}} + \mathbf{E_{p\mathit{M}}}$$

odnosno:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \frac{1}{2}mv^2 - mgR[\cos\alpha - \cos(\alpha - \varphi)] =$$

$$\mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}} + \mathbf{A}^{F_\mu} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 + (-\mu mg\cos\alpha)\frac{h_0}{\sin\alpha}$$

ili

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \frac{1}{2}mv^2 - mgR[\cos\alpha - \cos(\alpha - \varphi)] = \mathbf{E_{k\mathit{M}}} + \mathbf{E_{p\mathit{M}}} + \mathbf{A}^{F_\mu} = \frac{1}{2}mv_M^2$$

odakle sledi da je:

$$v_2 = v_0^2 + 2gh_0(1 - \mu ctg\alpha) + 2gR[\cos(\alpha - \varphi) - \cos\alpha]$$

odnosno

$$v=\sqrt{v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)+2gR[\cos(\alpha-\varphi)-\cos\alpha]}$$

Ako prethodnu vezu izrazimo preko luka - krivolinijske koordinate s možemo da napišemo sledeći izraz za brzinu materijalne tačke u proizvoljnom položaju na cilindričnoj površi:

$$v=\sqrt{v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)+2gR\left[\cos\left(\alpha-\frac{s}{R}\right)-\cos\alpha\right]}$$

Prethodnim izrazima - obrascima smo odredili brzinu materijalne tačke u funkciji generalisane koordinate za vreme kretanja materijalne tačke po prvoj cilindričnoj površi. Brzina materijalne tečke v_K u položaju K, tački njenog izlaska sa prve cilindrične površi i prelaska na kretanje po horizontalnoj hrapavoj ravni, je za $\varphi=\alpha$, pa je:

$$v_K=\sqrt{v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)+2gR[1-\cos\alpha]}$$

U trećoj fazi kretanja materijalna tačka ima jedan stepena slobode kretanja, jer se kreće u vertikalnoj ravni, a po horizontalnoj hrapavoj ravni koefocijenta trenja μ , i za generalisanu koordinatu u ovoj fazi kretanja izaberimo koordinatu x, merenu u pravcu horizontalne ravni od položaja K, kao što je to prikazano na slici 1.f*. Na materijalnu tačku dejsvuje sila težine mg i sila trenja F_μ. Matrijalna tačka, koja se kreće po horizontalnoj hrapavoj ravni ne menja potencijalnu energiju, ali zato sila trenja $F_\mu=-\mu mgsign\vec{v}$ vrši rad koji smanjuje ukupnu energiju sistema.

Kako se zadatkom, i u ovoj, trećoj fazi kretanja, traži brzina v materijalne tačke, koristićemo teoremu o prom ukupne mehanučke energiji nekonzervativnog sistema, prilikom kretanja materijalne tačke na koju desjtvuju i nekonzervativne sile - sila trenja $\vec{F}_\mu$. Promena ukupne mehaničke energije nekonzervativnog sistema jednaka je snazi rada nekonzervativnih sila, odnosno za konačni interval vremena, ako su te nekonzervativne sile konstantne, kao što je to slučaj sa silom trenja pri kretanju materijalne tačke po horizontalnoj hrapavoj ravni, to sledi da je opadanje ukupne mehaničke energije sistema jednako radu sile trenja na odredjenom putu te materijalne tačke po horizontalnoj hrapavoj ravni. Na osnovu toga pišemo da je:

$$\mathbf{E_k}+\mathbf{E_p}-(\mathbf{E}_{\mathbf{k}K}+\mathbf{E}_{\mathbf{p}K})=\mathbf{A}^{F_\mu}=-\mu mgx$$

ili

$$\mathbf{E_k}+\mathbf{E_p}-\mathbf{A}^{F_\mu}=\mathbf{E}_{\mathbf{k}K}+\mathbf{E}_{\mathbf{p}K}$$

A kako je potencijalna energija sistema, u ovoj fazi kretanja materijalne tačke, nepromenljiva duž horizontalne ravnii $\mathbf{E_p}=\mathbf{E}_{\mathbf{p}K}=const$, to se prethodni izraz uprošćava i postaje:

$$\mathbf{E_k}=\mathbf{E}_{\mathbf{k}K}+\mathbf{A}^{F_\mu}$$

odnosno:

$$\mathbf{E_k}=\mathbf{E}_{\mathbf{k}K}-\mu mgx$$

ili

$$\mathbf{E_k}=\frac{1}{2}mv^2=\mathbf{E}_{kK}-\mu mgx=\frac{1}{2}mv_K^2-\mu mgx$$

Brzina materijalne tačke u proizvoljnom položaju na horizontalnoj hrapavoj tavni je:

$$v^2=v_K^2-2\mu gx$$

ili kada uzmemo u obzir izraz za brzinu u položaju K u funkciji početne brzine v_0 kretanja i početnog položaja h_0 tu brzinu dobijamo u onliku:

$$v=\sqrt{v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)+2gR[1-\cos\alpha]-2\mu gx}$$

Ovde takodje postavljamo pitanje da li će se materijalna tačka zaustaviti na horizontalnoj hrapavoj ravni? I sledeće pitanje, koji uslov treba da bude zadovoljen? Da bi se uaustavila na horizontalnoj hrapavoj ravni, potrebno je da postoji položaj u kome je brzina materijalne tačke postala jednaka nuli:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1 - \mu ctg\alpha) + 2gR[1 - \cos\alpha] - 2\mu gx} = 0$$

$$x_{zaust} = \frac{1}{\mu}\left\{\frac{v_0^2}{2g} + h_0(1 - \mu ctg\alpha) + R[1 - \cos\alpha]\right\} < R$$

Ako nije zadovoljen uslov zaustavljanja na delu horizontalne hrapave ravni dužine R, materijalna tačka izlazi sa horizontalne hrapave ravni brzinom v_D. U položaju D, gde je $x = R$, izlaska sa horizontalne hrapave ravni brzina materijalne tačke je:

$$v_D = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1 - \mu ctg\alpha) + 2gR[1 - \mu - \cos\alpha]}$$

To je istovremeno i početna brzina kojom materijalna tačka ulazi u četvrtu fazu kretanja otpočevši u tački D kretanje po drugoj idealno glatkoj cilindričnoj površi. I u toj četvrtoj fazi kretanja materijalna tačka ima jedan stepen slobode kretanja, sve dok je na cilindričnoj površi, koja je jednostrano zadržavajuća veza.

Za četvrtu fazu kretanja za nezavisnu, generalisanu koordinatu izaberimo ugao ϑ, koji sa pravcem vertikale kroz centar krivine luka (preseka vertikalne ravnii i druge cilindrične površei) čini poteg od centra krivine do materijalne tačke u njenom proizvoljnom položaju na na cilindricnoj povrsi. Kretanje materijalne tačke po glatkoj cilindričnoj površi u toj četvrtoj fazi, je konzervativno sistemi važi teorema o održanju ukupne mehaničke energije sistema. Te na osnovu te teoreme pišemo da je:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}D} + \mathbf{E}_{\mathbf{p}D} = const$$

Brzina materijalne tačke u funkciji generalisane koordinate ϑ pri kretanju po drugoj cilindričnoj glatkoj površi je:

$$v = \frac{ds(\vartheta)}{dt} = R\dot{\vartheta}$$

Kinetička energija sistema je jednaka kinetičkoj energiji translacije materijalne tačke po krivolinijskoj putanji poluprečnika R:

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2$$

Na sistem, i u ovoj četvrtoj fazi kretanja, od aktivnih sila na materijalnu tačku dejstvuje samo sila Zemljine teže mg, koja je konzervativna sila i ima funkciju sile, odnosno potencijal. Potencijalna energija sistema u ovoj faui kretanja je:

$$\mathbf{E_p} = mgh(\vartheta) = mgR[1 - \cos\vartheta]$$

i izražena je pomoću koordinate $h(\vartheta)$ u pravcu vertikale, ili pomoću koordinate ϑ koju smo izabrali za generalisanu koordinatu, jer se napadna tačka sile težine materijalne tačke podiže za

$$(\uparrow)\, h(\vartheta) = R[1 - \cos\vartheta]$$

što je uočljivo sa slike. Mogli smo umesto koordinate ϑ za generalisanu koordinatu izabrati koordinatu $s(\vartheta)$, u pravcu luka poluprečnika R putanje, koju opisuje materijalna tačka pri kretanju po cilindričnoj glatkoj površi. Tada je izraz za potencijalu energiju:

$$\mathbf{E_p} = mgh(s) = mgR\left[1 - \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right]$$

Sada možemo da napišemo integral energije:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}D} + \mathbf{E}_{\mathbf{p}D} = const$$

odnosno:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR[1 - \cos\vartheta] = \frac{1}{2}mv_D^2$$

odakle odredjujemo brzinu v materijalne tačke u proizvoljnom položaju na drugoj glatkoj cilindričnoj površi:

$$v^2 = v_D^2 - 2gR[1-\cos\vartheta]$$

a uzevši u obzir dobijeni analitički izraz za brzinu v_D dobijamo:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) + 2gR[1-\mu-\cos\alpha] - 2gR[1-\cos\vartheta]}$$

ili u konačnom obliku brzinu v materijalne tačke u proizvoljnom položaju na drugoj glatkoj cilindričnoj površi:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) + 2gR[\cos\vartheta - \mu - \cos\alpha]}.$$

Sada možemo postaviti veći broj pitanja. Prvo pitanje je do koje će visine dospeti materijalna taćka ne odvojivši se od jednostrano zadržavajuće veze na cilindričnoj površi i zatim početi da se spušta po toj istoj cilindričnj površi, zatim do kog položaja će dospeti u povratnom puru kretanja po fazama? Da li će i pod kojim uslovima dospeti na kosu strmu hrapavu ravan? Drugo pitanje bi bilo kada i pod kojim uslovima će se materijalna tačka odvojiti od cilindrične površi, kada se veza ponaša kao jednostrano zadržavajuća veza? Kojom brzinom će se odvojiti i u kojoj tački? Naredno pitanje je pod kojim uslovima će materijalna tačka dospeti u najvišu tačku druge cilindrične površi i kojom brzinom? Koja vrsta kretanja će se odvijati u petoj fazi kretanja materijalne tačke? Vidimo da posle ostvarene četvrte faze kretanja, su moguće tri kvalitativno različite faze kretanja. Te ćemo ih zato pojedinačno proučiti.

Sva ova pitanja ukazuju na različite mogućnosti koje se ukazuju za petu fazu kretanja. Znači da postoje tri osnovne mogućnosti:

V.a* povratno kretanje, posle dostizanja mogućeg najvišeg položaja - visine po cilindričnoj površi;

V.b* odvajamje materijalne tačke od cilindrične površi u nastavak kretanja kao kosi hitac;

V.c* dostizanje najviše tačke B na drugoj cilibdričnoj površi i izlazak iz nje brzinom jednakom nuli, ili većom od nule i usmerenom u horizontalnom pravcu: javljaju se u toj fazi dve mogućnosti:

* slobodan pad sa početnom brzinom jednakom nuli i ili
* horizontalni hitac po izlasku iz cilindrične površi.

Razmotrimo, sada svaki od pojedinačnih slučajeva.

V.a* Povratno kretanje posle dostizanja maksimalne moguće visine po cilindričnoj površi. Da bi došlo do povratnog kretanja, potrebno je da je brzina materijalne tačke jednaka nuli, a pritisak materijalne tačke na cilindričnu površ u tooj tački treba da bude veći od nule (vidi sliku 1.g*).

Zato je potrebno da odredimo silu pritiska materijalne tačke na tu drugu cilindričnu površ. Na slici 1.d* prikazane su aktivna sila težine materijalne tačke mg i sila otpora veze F_N suprotna pritisku materijalne tačke na tu cilindričnu površ. Koristeći princip dinamičke ravnoteže pišemo dve jednačine dinamičke ravnoteže materijalne tačke u skalarnom obliku: uslove tavnoteže sila u radijalnom i tangencijalnom pravcu:

$$ma_N = m\frac{v^2}{R} = F_N - mg\cos\vartheta$$

$$ma_T = mR\ddot{\vartheta} = -mg\sin\vartheta$$

Iz druge jednačine dobijamo jednačinu kretanja u obliku:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{R}\sin\vartheta = 0$$

koju možemo integraliti i za početni uslov $\vartheta = 0, v_D = R\dot{\vartheta}(0)$ i dobiti isti analitički izraz za brzinu u proizvoljnom položaju materijalne tačke na cilindričnoj površi, koji smo dobili iz teoreme u ukupnoj energiji konzervativnog sistema u obliku:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) + 2gR[\cos\vartheta - \mu - \cos\alpha]}\,.$$

Iz prve jednačine prethodnog sistema jednačina dinamičke ravnoteže odredjujemo normalnu komponentu veze, ili pritisak materijalne tačke na cilindričnu površ u obliku:

$$F_N = m\frac{v^2}{R} + mg\cos\vartheta$$

odnosno

$$F_N = m\frac{v_0^2}{R} + 2mg\frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha) + 2mg[\cos\vartheta - \mu - \cos\alpha] + mg\cos\vartheta$$

Posle sredjivanja prethodnog izraza za silu pritiska materijalne tačke na cilindričnu ovrš dobijamo sledeći izraz:

$$F_N = m\frac{v_0^2}{R} + 2mg\frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha) + mg[3\cos\vartheta - 2\mu - 2\cos\alpha]$$

Brzina će biti jednaka nuli, kada je:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) + 2gR[\cos\vartheta - \mu - \cos\alpha]} = 0$$

$$v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) + 2gR[\cos\vartheta - \mu - \cos\alpha] = 0$$

$$\frac{v_0^2}{2gR} + \frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha) + [\cos\vartheta - \mu - \cos\alpha] = 0$$

Ugao zaustavljanja materijalne tačke se odredjuje sledećim izrazom:

$$\cos\vartheta_{zaust} = \mu + \cos\alpha - \frac{v_0^2}{2gR} - \frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha), \quad \vartheta_{zaust}\,\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\,\frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_{zaust} < \pi, \quad F_N(\vartheta_{zaust}) > 0$$

Sila pritiska F_N u tom položaju treba da je veća od nule, a odredjujemo je prema sledećem analitičkom izrazu:;

$$F_N(\vartheta_{zaust}) = m\frac{v_0^2}{R} + 2mg\frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha) + mg[3\cos\vartheta_{zaust} - 2\mu - 2\cos\alpha] > 0$$

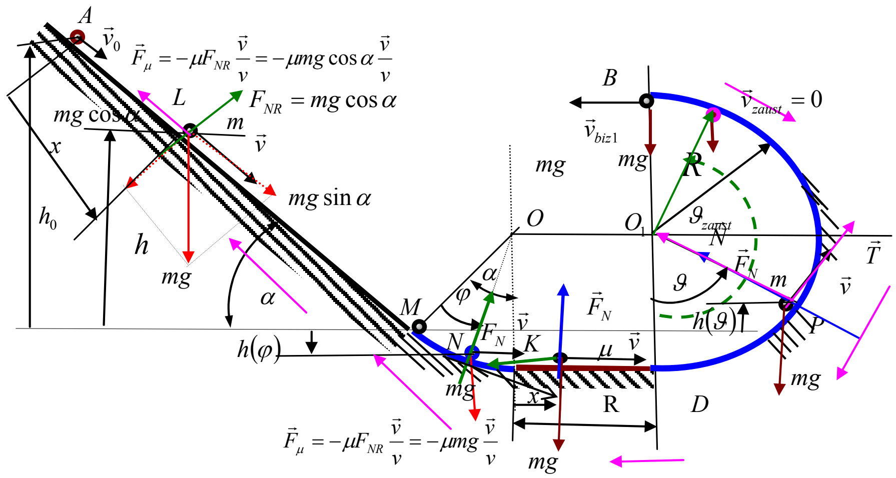
$$F_N(\vartheta_{zaust}) = m\frac{v_0^2}{R} + 2mg\frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha) - 2\mu mg - 2mg\cos\alpha +$$

$$+ 3mg\mu + 3mg\cos\alpha - 3mg\frac{v_0^2}{2gR} - 3mg\frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha)$$

$$F_N(\vartheta_{zaust}) = mg\mu + mg\cos\alpha - m\frac{v_0^2}{R} - mg\frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha) > 0$$

$$F_N(\vartheta_{zaust}) = mg\left[\mu + \cos\alpha - \frac{v_0^2}{gR} - \frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha)\right] > 0$$

$$F_N(\vartheta_{zaust}) > 0 \Rightarrow \mu + \cos\alpha > \frac{v_0^2}{gR} + \frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha)$$



Slika 1. g* Materijalni sistem sa jednim i dva stepenom slobode kretanja: analiza sila koje dejstvuju na materijalnu tačku. - treća i četvrta faza kretanja materijalne tačke sa jednim stepenom slobode kretanja, peta faza sa dva stepena slobode kretanja: I* po strmoj hrapavoj ravni, II* po prvoj idealno glatkoj cilindričnoj glatkoj površi, III* horizontalnoj hrapavoj ravni i IV* po drugoj idealno glatkoj cilindričnoj površi i u svim fazama u vertikalnoj ravni dp zaustavljanja na mjoj., V. a* povratno kretanje ka horizontalnoj hrapavoj ravni i oscilovanje kroz povratno kretanje kroz faše III*, II* i I* u supratnom smeru, a zatim ponovno ponavlljanje faza kretanja I*, II, III* i IV* i obratno dok ne dodje do zaustavljanja na nekoj od hrapavih ravni, kosoj ili horizontalnoj, kada su zadovoljeni uslovi zaustavljanja.

Sada možemo da zaključimo da je povratno kretanje ostvarljivo kada postoji položaj na drugoj cilindričnoj površim odredjen uglom $\vartheta_{zaust} \underset{<}{>} \frac{\pi}{2}$, koji može biti manji ili veći od $\frac{\pi}{2}$, ali manji od $\vartheta_{zaust} < \pi$, u kome sila $F_N(\vartheta_{zaust}) > 0$ pritiska materijalne talke na cilindričnu površ pozitivna (veća od nule):

$$\cos\vartheta_{zaust} = \mu + \cos\alpha - \frac{v_0^2}{2gR} - \frac{h_0}{R}(1 - \mu ctg\alpha), \quad \vartheta_{zaust} \underset{<}{>} \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_{zaust} < \pi, \quad F_N(\vartheta_{zaust}) > 0$$

$$F_N(\vartheta_{zaust}) > 0 \Rightarrow \mu + \cos\alpha > \frac{v_0^2}{gR} + \frac{h_0}{R}(1 - \mu ctg\alpha)$$

Povratno kretanje materijalne tačke će početi u položaju odredjenom ugaonom koordinatom ϑ_{zaust} , a koja se odredjuje sledećim izrazom:

$$\cos\vartheta_{zaust} = \mu + \cos\alpha - \frac{v_0^2}{2gR} - \frac{h_0}{R}(1 - \mu ctg\alpha), \quad \vartheta_{zaust} \underset{<}{>} \frac{\pi}{2}, \quad F_N(\vartheta_{zaust}) > 0$$

i ako je zadovoljen uslov $F_N(\vartheta_{zaust}) > 0$:

$$\mu + \cos\alpha > \frac{v_0^2}{gR} + \frac{h_0}{R}(1 - \mu ctg\alpha)$$

Potencijalna energijas sistema je tada:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{p}zaust} = mgh(\vartheta_{zaust}) = mgR[1 - \cos\vartheta_{zaust}]$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{p}zaust} = mgh(\vartheta_{zaust}) = mgR\left[1 - \mu - \cos\alpha + \frac{v_0^2}{2gR} + \frac{h_0}{R}(1 - \mu ctg\alpha)\right]$$

Materijalna tačka će se vratiti (spustiti) u položaj D istom brzinom sa kojom je iz njega počela penjanje naviše po drugoj cilindričnoj površi:

$$v_{D(povratno)} = v_D = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) + 2gR[1-\mu-\cos\alpha]}$$

Do tog izraza dolazimo zaključivanjem o konzervativnosti kretanja unazad po idealno glatkoj cilindričnoj površi, ili pak odredjujemo iz teoreme o nepromenljivosti ukupne mehaničke energije konzervativnog sistema u toj povratnoj fazi kretanja materijalne tačke po glatkoj cilindričnoj površi:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}zaust} + \mathbf{E}_{\mathbf{p}zaust} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}D} + \mathbf{E}_{\mathbf{p}D} = const$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{p}zaust} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}D} = const$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{p}zaust} = mgh(\vartheta_{zaust}) = mgR\left[1-\mu-\cos\alpha + \frac{v_0^2}{2gR} + \frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha)\right] = \frac{1}{2}mv_D^2$$

odakle sledi da je:

$$v_{D(povratno)} = v_D = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) + 2gR[1-\mu-\cos\alpha]}.$$

Na povratnom putu materijalna tačka se može zaustaviti na horizontalnoj hrapavoj površi, kada bi prestalo njeno dalje kretanje, ili na prvoj cilindričnoj glatkoj površi, kada bi materijalna tačka opet otpočela povratno kretanje u drugom smeru, te se vratila na horizontalnu hrapavu ravan i na njoj zaustavila, ili produžila penjanje po drugoj cilindričnoj površi. Treći slučaj je da ponovo dospe na kosu hrapavu strmu ravan na kojoj može da se zaustavi, ili pak da posle dospeća na odredjenu visinu da otpočne spuštanje. To zavisi od odnosa komponente aktivne sile težine i sile trenja. Ovaj slučaj bi bio oscilatorni do zaustavljanja materijalne tačke na horizontalnoj hrapavoj ravni, ili pak na hrapavoj kosoj ravni. Broj tih oscilacija zavisi od veličina početne brzine i početne visine na kojoj je bila materijalna tačka, kao i od koeficijeta trenja, nagba strme ravni i dužine horizontalne hrapave ravni i poluprečnika krivina cilindričnih površi.

Da rezimiramo o karakteru mogućeg kretanja posle četvrte faze kretanja po drugoj cilindričnoj površi, kada su zadovoljeni uslovi:

$$\cos\vartheta_{zaust} = \mu + \cos\alpha - \frac{v_0^2}{2gR} - \frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha), \quad \vartheta_{zaust} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_{zaust} < \pi, \quad F_N(\vartheta_{zaust}) > 0$$

$$F_N(\vartheta_{zaust}) > 0 \Rightarrow \mu + \cos\alpha > \frac{v_0^2}{gR} + \frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha)$$

Tada nastupa V. a* faza kretanja, povratno kretanje ka horizontalnoj hrapavoj ravni i oscilovanje kroz povratno kretanje kroz faše III*, II* i I* u supratnom smeru, a zatim ponovno ponavlljanje faza kretanja I*, II, III* i IV* i obratno dok ne dodje do zaustavljanja na nekoj od hrapavih ravni, kosoj ili horizontalnoj, kada su zadovoljeni uslovi zaustavljanja. Ako su zadovoljeni uslovi zaustavljanja na glatkim cilindričnim površima, ako to nisu položaji K ili D onda dolazi do povratnog kretanja u suprotnom smeru i nastavlja se oscilovanje, naizmenično u jednom ili drugom smeru, sve dok ne nastupe zaustavljanja na horizontalnoj hrapavoj ravni ili kosoj hrapavj ravni uz uslove prekida daljeg kretanja materijalne tačke.

V.b* Odvajanjem materijalne tačke od cilindrične površi, u nastavku nastupa kretanja tipa kosi hitac; Da bi veza dejstvovala na materijalnu tačku, kao jednostrano zadržavajuće potrebno je da nastanu uslovi za to, a to je da sila pritiska materijalne tačke na cilindričnu površ postane jednaka nuli u nekom položaju, kao i da aktivna sila težine materijalne tačke dejstvuje u smeru odvajanja materijalne tačke od jednostrano ne-zadržavajuće cilindrične površi. U našem slučaju to je kada je ugao ϑ koji odredjuje položaj materijalne tačke na cilindričnoj površi veći od $\vartheta_{odvajanja} > \dfrac{\pi}{2}$.

Da bi se dogodila ova vrsta kretanja materijalne tačke potrebno je da postoji položaj u kome je sila pritiska $F_N\left(\vartheta_{odvajanja} > \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ jednaka nuli:

$$F_N\left(\vartheta_{odvajanja} > \frac{\pi}{2}\right) = m\frac{v_0^2}{R} + 2mg\frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha) + mg\left[3\cos\vartheta_{odvajanja} - 2\mu - 2\cos\alpha\right] = 0$$

$$m\frac{v_0^2}{R} + 2mg\frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha) + mg\left[3\cos\vartheta_{odvajanja} - 2\mu - 2\cos\alpha\right] = 0$$

$$\frac{v_0^2}{gR} + 2\frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha) + \left[3\cos\vartheta_{odvajanja} - 2\mu - 2\cos\alpha\right] = 0, \quad \vartheta_{odvajanja} > \frac{\pi}{2}$$

Odvajanje od cilindrične površi nastupa u položaju odredjenom uglom $\vartheta_{odvajanja}$

$$\cos\vartheta_{odvajanja} = \frac{2}{3}\mu + \frac{2}{3}\cos\alpha - \frac{v_0^2}{3gR} - \frac{2h_0}{3R}(1-\mu ctg\alpha), \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta_{odvajanja} < \pi$$

a brzina kojom se materijalna tačka odvaja od cilindrične površi je:

$$v_{odvajanja} = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) + 2gR\left[\cos\vartheta_{odvajanja} - \mu - \cos\alpha\right]}, \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta_{odvajanja} < \pi$$

$$v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) + \frac{4}{3}\mu Rg + \frac{4}{3}Rg\cos\alpha - \frac{2v_0^2}{3} - \frac{4h_0 g}{3}(1-\mu ctg\alpha) - 2gR\mu - 2gR\cos\alpha$$

$$v_{odvajanja} = \sqrt{\frac{1}{3}v_0^2 + \frac{2}{3}gh_0(1-\mu ctg\alpha) - \frac{2}{3}gR[\mu + \cos\alpha]}$$

$$v_{odvajanja} = \sqrt{\frac{1}{3}\left\langle v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) - 2gR[\mu + \cos\alpha]\right\rangle}, \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta_{odvajanja} < \pi$$

I da rezimiramo, odvajanje materijalne tačke od cilindrične površi nastupa u položaju odredjenom uglom $\vartheta_{odvajanja}$

$$\cos\vartheta_{odvajanja} = \frac{2}{3}\mu + \frac{2}{3}\cos\alpha - \frac{v_0^2}{3gR} - \frac{2h_0}{3R}(1-\mu ctg\alpha), \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta_{odvajanja} < \pi$$

dok je brzina kojom se odvaja:

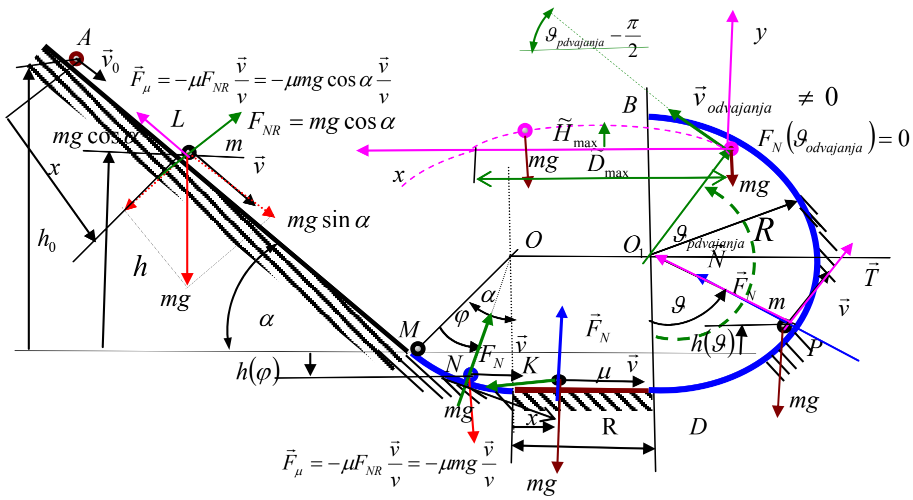
$$v_{odvajanja} = \sqrt{\frac{1}{3}\left\langle v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) - 2gR[\mu + \cos\alpha]\right\rangle}, \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta_{odvajanja} < \pi$$

Ako je ispunjen uslov odvajanja materijalne tačke od cilindrične površi, onda nastupa peta faza kretanja, kretanje tipa kosi hitac (vidi sliku 1.h*) pod dejstvm sopstvene težine mg materijalne tačke početnom bryinom

$$v_{odvajanja} = \sqrt{\frac{1}{3}\left\langle v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) - 2gR[\mu + \cos\alpha]\right\rangle}, \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta_{odvajanja} < \pi$$

nagnutom pod uglom $\vartheta_{odvajanja} - \dfrac{\pi}{2}$ u odnosu na horizont.

$$\cos\vartheta_{odvajanja} = \frac{2}{3}\mu + \frac{2}{3}\cos\alpha - \frac{v_0^2}{3gR} - \frac{2h_0}{3R}(1-\mu ctg\alpha), \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta_{odvajanja} < \pi$$



Slika 1.h* Materijalni sistem sa jednim i dva stepenom slobode kretanja: analiza sila koje dejstvuju na materijalnu tačku. - treća i četvrta faza kretanja materijalne tačke sa jednim stepenom slobode kretanja, peta faza sa dva stepena slobode kretanja: I* po strmoj hrapavoj ravni, II* po prvoj idealno glatkoj cilindričnoj glatkoj površi, III* horizontalnoj hrapavoj ravni i IV* po drugoj idealno glatkoj cilindričnoj površi i u svim fazama u vertikalnoj ravni dp zaustavljanja na mjoj., V. a* povratno kretanje ka horizontalnoj hrapavoj ravni i oscilovanje kroz povratno kretanje kroz faše III*, II* i I* u supratnom smeru, a zatim ponovno ponavlljanje faza kretanja I*, II, III* i IV* i obratno dok ne dodje do zaustavljanja na nekoj od hrapavih ravni, kosoj ili horizontalnoj, kada su zadovoljeni uslovi zaustavljanja.

U narednoj, petoj fazi kretanja, materijalna tačka ima dva stepena slobode kretanja u vertikalnoj ravni.

Za generalisane koordinate u petoj fai kretanja materijalne tačke, sada takodje ravanskog kretanja, ali sa dva stepena slobode kretanja u vertikalnoj ravni, za generalisane koordinate biramo dve koordinate njenog pomeranja, u dva ortogonalna pravca x i y, u horizontalnom i vertikalnom, i u vertikalnoj ravi, i sa koordinatnim početkom u položaju odvajanja sa cilindrične površi. Na materijalnu tačku dejstvuje samo aktivna sila sopstvene težine mg. Diferencijalne jednačine ravanskog kretanja materijalne tačke u vertikalnoj ravni i sa dva stepena slobode kretanja su (vidi sliku 1.h*):

$$m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{y} = -mg$$

odnosno

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = -g$$

Integraljenjem diferencijalnih jednačina prethodnog sistema dobijamo sledeće:

$$\dot{x} = C_1$$

$$\dot{y} = -gt + C_2$$

Još jednim integraljenjem diferencijalnih jednačina prethodnog sistema dobijamo sledeće:

$$x(t) = C_1 t + C_3$$

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + C_2 t + C_4$$

U prethodnim jednačinama pojavilo se šest integracionih konstanti, koje treba odrediti iz pčetnih uslova kretanja u ovoj fazi.

$$x(0)=0$$
$$y(0)=0$$
$$\dot{x}(0)=v_{odvajanja}\cos\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{3}\left\langle v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-2gR[\mu+\cos\alpha]\right\rangle}\cos\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\dot{y}(0)=v_{odvajanja}\sin\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{3}\left\langle v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-2gR[\mu+\cos\alpha]\right\rangle}\sin\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$,\frac{\pi}{2}<\vartheta_{odvajanja}<\pi$$

Iz početnih uslova sledi:

$C_4=0$, $C_3=0$,

$$C_1=v_{odvajanja}\cos\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{3}\left\langle v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-2gR[\mu+\cos\alpha]\right\rangle}\cos\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$C_2=v_{odvajanja}\sin\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{3}\left\langle v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-2gR[\mu+\cos\alpha]\right\rangle}\sin\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)$$

Jednačine kretanja materijalne tačke su sada:

$$x(t)=v_{odvajanja}t\cos\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)=t\sqrt{\frac{1}{3}\left\langle v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-2gR[\mu+\cos\alpha]\right\rangle}\cos\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y(t)=-g\frac{t^2}{2}+v_{odvajanja}t\sin\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)=-g\frac{t^2}{2}+t\sqrt{\frac{1}{3}\left\langle v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-2gR[\mu+\cos\alpha]\right\rangle}\sin\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$,\quad \frac{\pi}{2}<\vartheta_{odvajanja}<\pi$$

Maksimalma visina, koju materijalna tačka dostiže je u trenutku, kada njena brzina ima samo horizontalnu komponentu, tj. kada je

$$x(t)=v_{odvajanja}t\cos\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y(t)=-g\frac{t^2}{2}+v_{odvajanja}t\sin\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right),\quad \frac{\pi}{2}<\vartheta_{odvajanja}<\pi$$
$$\dot{y}(t_1)=v_{odvajanja}\sin\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)-gt_1=0$$

a to se dostiže u trenutku t_1

$$t_1=\frac{v_{odvajanja}\sin\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)}{g}$$

U tom trenutku t_1 koordinate materijalne tačke su:

$$x(t_1)=v_{odvajanja}t_1\cos\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y(t_1)=-g\frac{t_1^2}{2}+v_{odvajanja}t_1\sin\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x(t_1)=\frac{1}{2g}v_{odvaj}^2\sin 2\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\widetilde{D}_{\max}$$

$$y(t_1)=\frac{1}{2g}v_{odvaj}^2\sin^2\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)=\widetilde{H}_{\max}$$

Razlika u visini položaja materijalne tačke pri ulasku u cilindričnu površ i odvajanja materuijalne tačke od nje u položaju odredjenom uglom $\vartheta_{odvajanja}$ je:

$$a=R\left[1+\sin\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Sada možemo odrediti maksimalnu visinu H_{MAX} na koju će dospeti materijalna tačka po napušanju druge cilindrične površi:

$$H_{MAX}=a+y_{MAX}=a+y(t_1)=R\left[1+\sin\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)\right]+\frac{1}{2g}v_{odvaj}^2\sin^2\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)$$

a to je visina koja može biti veća ili manja od visine h_0 na kojoj je bila materijalna tačka, kada je ona puštena sa početnom brzion v_0 da se kreće po strmoj hrapavoj ravni. To zavisi od odnosa veličina: početne brzine v_0, visine h_0 , ugla nagiba strme ravni α i poluprečnika cilindričnih površi, kao i od koeficijenta trenja hrapavih radni.

Ako tražimo najveći domet na visini napuštanja cilindrične površi, najveći domet materijalne tačke je kada je

$$y(t_2)=-g\frac{t_2^2}{2}+v_{odvajanja}t_2\sin\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Za taj slučaj, trenutak vremena t_2 dospeća materijalne tačke u tačku najvećeg dometa na visini $a=R\left[1+\sin\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)\right]$ je:

$$t_2=\frac{2}{g}v_{odvajanja}\sin\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)$$

U tom trenutku t_2 koordinata $x(t_2)$ materijalne tačke je:

$$\widetilde{D}_{\max}=x_{\max}=x(t_2)=\frac{v_{odvaj}^2}{g}\sin 2\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)$$

a to je najveći domet materijalne tačke po odvajanju od druge cilindrične površi i na visini $a=R\left[1+\sin\left(\vartheta_{odvajanja}-\frac{\pi}{2}\right)\right]$ na kojoj se odvojila od cilindrične površi.

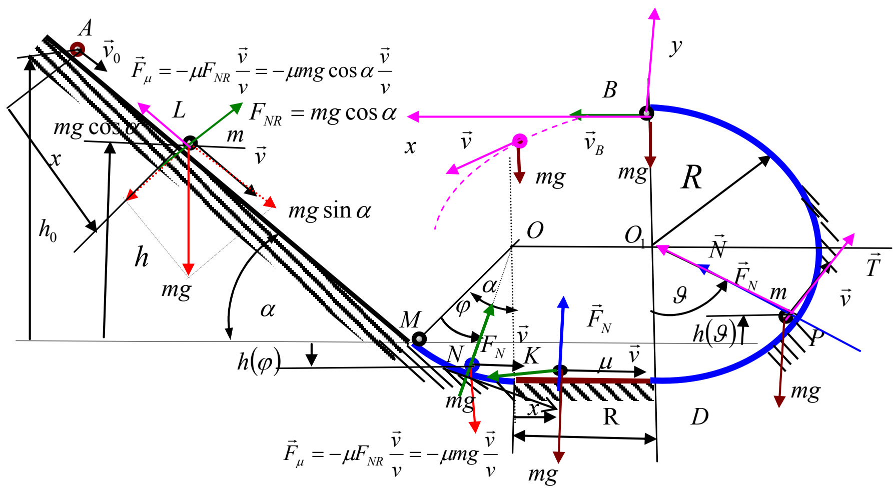
Može se desiti i specijalan slučaj ovog slučaja da je brzina odvajanja materijalne tačke od veze jednaka nuli, pa posle toga nastupa slobodan pad materijalne tačke.

V.c* Dostizanje najviše tačke na drugoj cilibdričnoj glatkoj površi i izlazak materijalne tačke sa nje brzinom jednakom nuli, ili većom od nule i usmerenom u horizontalnom pravcu je treća mogućnost realizacije pete faze kretanja materijalne tačke. Ako su ostvareni uslovi za realizaciju ove peta faza kretanja, a ona je ostvarljiva kroz dve mogućnoszi: slobodanim padom sa početnom brzinom jednakom nuli ili formi kretanja tipa horizontalni hitac po izlasku iz cilindrične površi (vidi sliku 1.n*)..

Da bi smo odredili uslov pod kojim će za zadate i dobijena početne uslove te pete faze kretanja, materijalna tačka će dospeti u krajnjnji položaj B cilindrične površi, tako da njena brzina bude veća od nule, ili najmanje jednaka nuli, a da pritisak materijalne tačke na cilindričnu površ bude jednak ili veća od nule potrebno je da postavimo potrebne uslove za ostvarenje istih. Iz opisanih postavljenih uslova potrebno je da odredimo odnose počeznih kinetičkih i geometrijskih parametara posmatranog mehaničkog sistema. To su uslovi da materijalna tačka ne napusti jednostrano zadržavajuću vezu pre dospeća u tačku B.

Glavni potrebni i dovoljni uslov je da odredimo odnose početnih kinetičkih i geometrijskih parametara mehaničkog sistema u četvrtoj fazi kretanja po cilindričnoj površi su da sila pritiska na tu površ ne postanje jednaka nuli pre dospeća materijalne tačke u počpžaj B.

Kako smo u prethodnom razmotrenom slučaju odredili ugao koji odredjuje položaj materijalne tačke u kome sila pritiska na cilindričnu površ postaje jednaka nuli, to je dovoljno postaviti uslov da je taj ugao veći od ugla $\vartheta_B = \pi$, tj. $\vartheta_{odvajanja} > \vartheta_B = \pi$ ili najmanje jednak uglu $\vartheta_B = \pi$, tj. $\vartheta_{odvajanja} = \vartheta_B = \pi$. Na osnovu toga pišemo:



Slika 1. n* Materijalni sistem sa jednim i dva stepenom slobode kretanja: analiza sila koje dejstvuju na materijalnu tačku. - treća i četvrta faza kretanja materijalne tačke sa jednim stepenom slobode kretanja, peta faza sa dva stepena slobode kretanja: I* po strmoj hrapavoj ravni, II* po prvoj idealno glatkoj cilindričnoj glatkoj površi, III* horizontalnoj hrapavoj ravni i IV* po drugoj idealno glatkoj cilindričnoj površi i napuštanje iste u tački B, gde se ista završava, V* slobodno kretanje materijalne tačke u vertikalnoj ravisa dva stepena slobode kretanja, početnom brzinom u horizontalnom pravcu ' horizontalni hitac;

Da bi se dogodila ova vrsta kretanja materijalne tačke u četvrtoj fazi kretanja, potrebno je da je sila pritiska $F_N(\vartheta_B = \pi) > 0$ veća ili najmanje jednaka nuli $F_N(\vartheta_B = \pi) = 0$ u položaju B odredjenom uglom $\vartheta_B = \pi$:

$$F_N(\vartheta_B = \pi) = m\frac{v_0^2}{R} + 2mg\frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha) + mg[3\cos\vartheta_B - 2\mu - 2\cos\alpha] > 0$$

$$m\frac{v_0^2}{R} + 2mg\frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha) - mg[3 + 2\mu + 2\cos\alpha] > 0$$

$$\frac{v_0^2}{gR} + 2\frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha) > [3 + 2\mu + 2\cos\alpha]$$

Znači da je uslov da materijalna tačka dospe u položaj B, i iz te krajnje tačke cilindrične površi napusti cilindričnu površ je:

$$\frac{v_0^2}{gR} + 2\frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha) > [3 + 2\mu + 2\cos\alpha]$$

a u taj položaj dospeće brzinom v_B koju odredjujemo na osnovu teoreme o ukupnoj emehaničkoj nergiji konzervativnog sistema, koju smo već primenili u prethodnim razmatranjima i dobili da je brzina materijalne tačke u proizvoljnom položaju na toj cilindričnoj površi odredjenom ugčom ϑ

$$v=\sqrt{v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)+2gR[\cos\vartheta-\mu-\cos\alpha]},\quad 0<\vartheta<\pi$$

te je u položaju B odredjenom uglom $\vartheta_B=\pi$ i brzina materijalne tačke kada dospe u položaj B je jednaka:

$$v_B=\sqrt{v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)+2gR[\cos\pi-\mu-\cos\alpha]},\quad 0<\vartheta<\pi$$

Da rezimiramo, da bi materijalna tačka dospela u položaj B brzinom

$$v_B=\sqrt{v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-2gR[1+\mu+\cos\alpha]},\quad 0<\vartheta<\pi$$

potrebno i dovoljno je da je zadovoljen sledeći uslov:

$$\frac{v_0^2}{gR}+2\frac{h_0}{R}(1-\mu ctg\alpha)>[3+2\mu+2\cos\alpha].$$

Po napuđtanju druge cilindrične idealno glatke površi prolazeći kroz položaj B brzinom

$$v_B=\sqrt{v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-2gR[1+\mu+\cos\alpha]}$$

materijalna tačka ima dva stepena slobode kretanja u vertikalno ravni i kreće se pod dejstvom Zemljine teže. Usvojimo za generalisane, nezavisne koordinate x i y kako je to naznačeno na slici 1. n*, pa su diferencijalne jednačne kretanja materijalne tačke:

$$m\ddot{x}=0$$
$$m\ddot{y}=-mg$$

odnosno

$$\ddot{x}=0$$
$$\ddot{y}=-g$$

Integraljenjem diferencijalnih jednačina prethodnog sistema dobijamo sledeće:

$$\dot{x}=C_1$$
$$\dot{y}=-gt+C_2$$

Još jednim integraljenjem diferencijalnih jednačina prethodnog sistema dobijamo sledeće:

$$x(t)=C_1t+C_3$$
$$y(t)=-g\frac{t^2}{2}+C_2t+C_4$$

U prethodnim jednačinama pojavilo se šest integracionih konstanti, koje treba odrediti iz pčetnih uslova za ovu fazu kretanja materijalne tačke:.

$$x(0)=0$$
$$y(0)=0$$
$$\dot{x}(0)=v_B=\sqrt{v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-2gR[1+\mu+\cos\alpha]}$$
$$\dot{y}(0)=0$$

Iz početnih uslova sledi:

$$C_4=0,\ C_3=0,$$
$$C_1=v_B=\sqrt{v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-2gR[1+\mu+\cos\alpha]}$$
$$C_2=0$$

Jednačine kretanja materijalne tačke u ovoj fazi kretanja i u konačnom obliku su:

$$x(t)=v_Bt=t\sqrt{v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-2gR[1+\mu+\cos\alpha]}$$
$$y(t)=-g\frac{t^2}{2}$$

DRUGI ZADATAK. *Ma**terijalni sistem*** na slici 2. se sastoji od pet tankih homogenih diskova D_1, D_2, D_3, D_4 i D_5, masa i poluprečnika redom $4m,R$, $2m,,2R$, $6m,2R$, $2m,,R$ i $4m,R$ kao što je to prikazano na slici 2. Preko prvog diska D_1, mase i poluprečnika redom $4m,R$, koji može da se lotrlja brz klizanja po strmoj ravni nagiba ugla α u odnosu na horizonat, namotano je, lako, nerastegljivo uže, koje je zatim prebačeno preko drugog diska D_2, mase i poluprečnika redom $2m,,2R$, čiji je centar masa C_2 zglobno vezan za nepokretni oslonac, dok je drugi kraj tog užeta namotan na treći disk D_3, mase i poluprečnika redom $6m,R$, koji ''visi'' na tom užetu u vertikalnom pravcu istovremeno se kotrljajući bez klizanja po vertikalnom zidu. Za centar masa C_3 tog trećeg diska vezano je drugo, lako i nerastegljivo, uže koje je zatim prebačeno preko četvrtog diska D_4, mase i poluprečnika $2m,,R$, i drugim krajem namotano na peti disk D_5, koji se kotrlja po drgoj strmoj ravni istog nagibnog ugla α, pri čemu se uže namotav ili odmotava od istog. Ceo sistem pri kretanju se se nalazi u vertikalnoj ravni i u polju Zemljine teže.

Odrediti:

a* broj stepeni slobode kretanja sistema i načiniti izbor generalisanih koordinata (ili koordinate) sistema;

b* sve koordinate položaja i konfiguracije sistema, kao i ugaone brzine diskova izraziti pomoću izabranih generalisanih koordinata sistema;

c* izraze za ***kinetičku i potencijalnu energiju sistema***. Da li se ukupna mehanička energija datog sistema menja u toku vremena i toku kretanja sistema? Da li je sistem konzervativan?

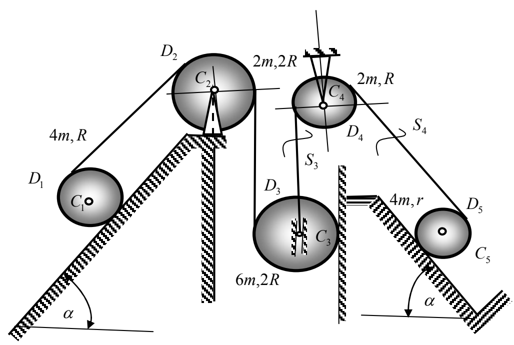
d* snagu rada sila koje dejstvuju na sistem;

e* napisati integral energije sistema;

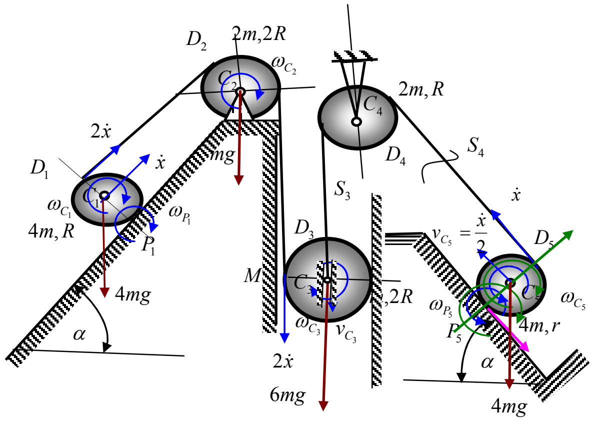
f* diferencijalne jednačine kretanja sistema pomoću generalisanih koordinata i Lagrage-ovih jednačina druge vrste. Koliki je najmanji broj diferencijalnih jednačina kretanja sistema? Odrediti ubrzanja sistema.

g* ubrzanja centra diska C_1;

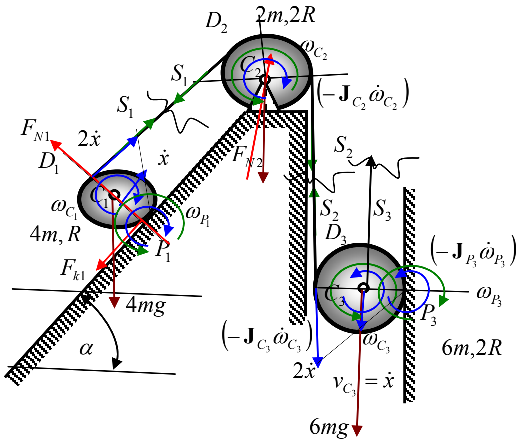
h* sile u užadima.



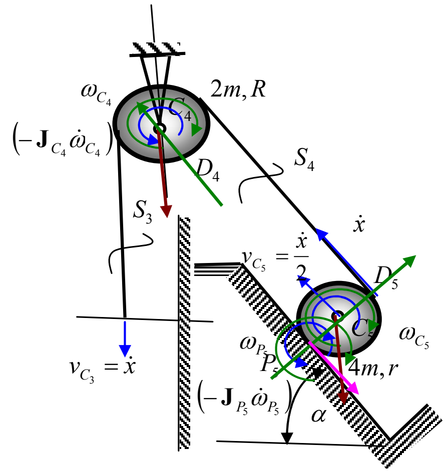
Slika 2. Mehanički sistem vezanih diskova



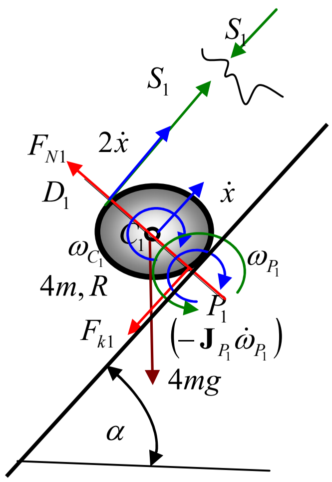
Slika 2. a*



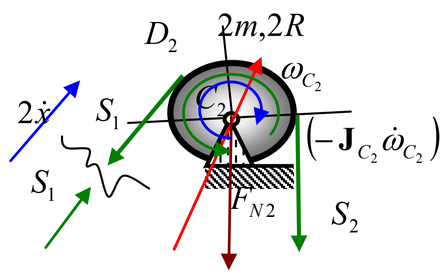
Slika 2. b*



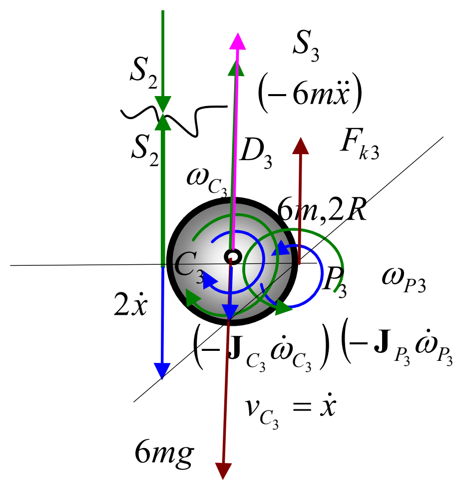
Slika 2. c*



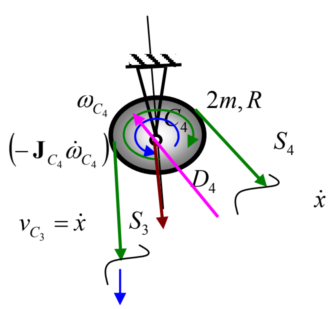
Slika 2. d*



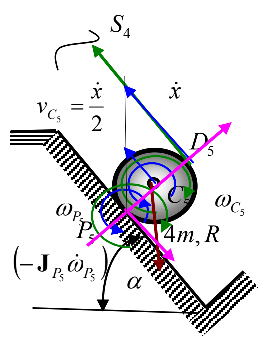
Slika 2. e*



Slika 2. f*



Slika 2. g*



Slika 2. h*

REŠENJE DRUGOG ZADATKA. Zadatkom definisani i zadati mehanički sistem ima ***jedan stepen slobode kretanja***, jer disk koji se kotrlja bez klizanja po strmoj ravni, ostajući pri tome u vertikalnoj ravni, ima jedan stepen slobode kretanja, a isto važi i za treći i peti dik, koji se pojedinačno takodje kotrljaju po ravnima, pa imaju po jedan stepen slobode kretanja, kao i drugi i četbrti, koji su medjusobno povezani nerastegljivim užadima, tako da u celom, sistem ima samo jedan stepen slobode kretanja.

Do tog zaključka, da sistem ima samo jedan stepen slobode kretanja, možemo doći i fiksiranjem centra masa jesnog od diskova i to bi onemogućilo pokretljivost svih ostalih diskova, što nas takodje navodi na zaključak da sistem ima samo jedan stepen slobode kretanja. To znači da možemo izabrati samo jednu, nezavisnu, generalisanu koordinatu, a preko nje izraziti sve ostale koordinate položaja diskova pri kretanju sisema i u prozvoljnoj konfiguraciji. Izbor te nezavisne, generalisane koordinate moguće je izvršiti na više načina i iz većeg broja koordinata položaja i konfiguracije sistema izabrati samo jednu za nezavisnu. U našem pristupu rešavanju ovog zadatka za nezavisnu, generalisanu koordinatu izabraćemo pomeranje centra masa C_1 prvog diska paralelno prvoj strmoj ravni i uz strmu ravan naviše, i označiti je sa x, kao što je to prikazano na slici 2.a*., a to je prikazano i na slikama 2.b* i 2.d*.

Koordinatu položaja drugog diska sa centrom u C_2 oko koga se obrće označimo sa φ_{C_2}, a ugaonu brzinu njegovog obrtanja označimo sa $\omega_{C_2} = \dot{\varphi}_{C_2}$. Imajući u vidu da je obimna brzina tačke na obimu tog diska jednaka brzini užete to sledi da je njegova ugaona brzina jednaka

$$\omega_{C_2} = \dot{\varphi}_{C_2} = \frac{2\dot{x}}{2r} = \frac{\dot{x}}{r}$$

Ugaona brzina ω_{C_1} obrtanja prvog diska oko ose, upravne na vertikalnu ravan i ravan diska, kroz njegov centar masa C_1, odnosno, ugaona brzina ω_{P_1} oko paralelne ode kroz pol brzine u P_1 oko koga se u svakom trenutku obrne disk, kortljajući se bez klizanja po strmoj ravni, je

$$\omega_{P_1} = \omega_{C_1} = \frac{\dot{x}}{r}$$

Ugaona brzina trećeg diska koji se kotrlja po vertikalnoj ravni i visi na užadima ima trenutni pol rotacije u tački P_3 dodira sa vertikalnom ravni po kojoj se kotrlja, pa je:

$$\omega_{P_3} = \omega_{C_3} = \frac{2\dot{x}}{4r} = \frac{\dot{x}}{2r}$$

Za presostala dva diska ugaone brzine su:

$$\omega_{C_4} = \frac{\dot{x}}{r}$$

$$\omega_{P_5} = \omega_{C_5} = \frac{\dot{x}}{2r}$$

Treba uočiti da se taj trenutni pol P_1 pomera po strmoj ravni, ali kako je disk osnosimetrican, a odgovarajuća tačka na konturi diska, u kojoj se tokom njegovog kotreljanja bez klizanja po stmoj ravni, dodiruje sa njim se pomera po njegovom obimu –konturi. To znači da se osa trenutne rotacije pomera i po konturi diska, ali je aksijalni moment inercije mase diska za taj sistem osa uvek isti i konstantan, pa se ta osobina može koristiti pri pisanju jednačina dinamike diska, što ne bi bio slučaj da kontura nije krug (cilindar), a disk homogen i sa centom masa u centru konture.

Aksijalni moment inercije mase prvog diska za horizontalnu osu kroz centar C_1 mase diska $\mathbf{J}_{C_1}$, odnosno kroz trenutni pol brzine P_1, $\mathbf{J}_{P_1}$, a čija je masa $4m$ i poluprečnik r, su:

$$\mathbf{J}_{C_1} = \frac{4mr^2}{2} \quad \text{i} \quad \mathbf{J}_{P_1} = \frac{12mr^2}{2} = 6mr^2$$

Aksijalni moment inercije mase drugog diska za horizontalnu osu kroz centar C_2 mase diska $\mathbf{J}_{C_2}$ je:

$$\mathbf{J}_{C_2} = \frac{2m(2r)^2}{2} = 4mr^2$$

Aksijalni moment inercije mase trećeg diska za horizontalnu osu kroz centar C_3 mase diska $\mathbf{J}_{C_3}$ je:

$$\mathbf{J}_{C_3} = \frac{6m(2r)^2}{2} = 12mr^2$$

Na sličan način odredjujemo i ostale potrebne aksijalne momente inercije masa preostalih diskova sistema za ose kroz centre masa ili trenutne polove:

$$\mathbf{J}_{P_3} = 3\frac{6m(2r)^2}{2} = 36mr^2$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{C}_4} = \frac{2mr^2}{2} = mr^2$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{C}_5} = \frac{4mr^2}{2} = 2mr^2$$

$$\mathbf{J}_{P_5} = 3\frac{4mr^2}{2} = 6mr^2$$

Ukupna kinetička energija sistema jednaka je zbiru kinetičkih energija rotacije prvog, trećeg i petog diska oko njihovih osa trenutne rotacije pri kotrljanju bez klizanja po strmoj, odnosno vertikalnoj ravni , kinetičke energije rotacije drugog i četvrtog diska oko njihovih osa kroz odgovarajuće centar masa, na osnovu čega pišemo:

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P_1}\omega_{P_1}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C_2}\omega_{C_2}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P_3}\omega_{P_3}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C_4}\omega_{C_4}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P_5}\omega_{P_5}^2$$

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}6mr^2\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}4mr^2\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}36mr^2\left(\frac{\dot{x}}{2r}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}6mr^2\left(\frac{\dot{x}}{2r}\right)^2$$

$$\mathbf{E_k} = 10m\dot{x}^2 + \frac{3}{4}m\dot{x}^2 = \frac{43}{4}m\dot{x}^2$$

Na sistem od aktivnih sila dejstvuju sile težine diskova, ali sile težine drugog i četvrtog diska ne vrše nikakav rad jer se njihove napadne tačke ne pomeraju u vertikalnom pravcu, pa je rad nula, a njihov uticaj na promenu potencijalne eenergije sistema je takodje jednaka nuli. Promena potencijalne energije sistema potiče od dejstva sila težina $4mg$ prvog diska, $6mg$ trećeg diska, $4mg$ petog diska, pa je rad tih sila različit od nule, jer se napadne tačke tih sila težina podižu za $x\sin\alpha$, prvog, spušta za x, trećeg odnosno podiže za $\frac{x}{2}\sin\alpha$, petog diska, redom. Ukupna promena potencijalne energije posmatranog materijalnog mehaničkog sistema je sada:

$$\mathbf{E_p} = 4mgx\sin\alpha - 6mgx + 4mg\frac{x}{2}\sin\alpha = -6mgx(1-\sin\alpha)$$

Kako na sistem dejstvuju aktivne sile, koje su sve konzervativne, to je ukupna mehanička energija sistema konstantna u toku kretanja sistema i jednaka onoj koju je sistem imao u početnom trenutku kretanja sistema:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \mathbf{E_0} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}}$$

$$\frac{43}{4}m\dot{x}^2 - 6mgx(1-\sin\alpha) = \mathbf{E_0} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E}_{Po} = const$$

Prethodna relacija predstavlja i integral energije.

Diferenciranjem po vremenu prethodne relacije dobijamo diferencijalnu jednačinu kretanja u sledećem obliku:

$$\frac{d(\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p})}{dt} = 0$$

$$\frac{43}{2}m\dot{x}\ddot{x} - 6mg\dot{x}(1-\sin\alpha) = 0$$

Pod pretpostavkom da je brzina $\dot{x} \neq 0$, prethodnu jednačinu možemo skratiti sa tim činiočem, te dobijamo sledeću diferencijalnu jednačinu kretanja posmatranog sistema diskova, po nezavisnoj, generalisanoj koordinati x:

$$\frac{43}{2}m\ddot{x}-6mg(1-\sin\alpha)=0$$

odnosno

$$\ddot{x}=\frac{12}{43}g(1-\sin\alpha)$$

Dakle, dobili smo jednu diferencijalnu jednačinu, jer sistem ima jedan stepen slobode kretanja. Ta jednačina predstavlja istovremeno i izraz za ubrzanje sistem.

Snaga rada neke sile, koja dejstvuje na telo (materijalnu tačku) se izražava pomoću skalarnoh proizvoda sile i brzine kretanja materijalne tačke na koju dejstvuje ta sila, $P=\left(\vec{F},\vec{v}\right)$. Snaga rada je brzina vršenja rada.

Snaga rada aktivnih sila koje dejstvuju na posmatrani materijalni sistem pojedinačno je:

1* od sile težine $4mg$, usmerene naniže, prvog diska D_1 čija se napadna tačka C_1 kreće brzinom $v_{C_1}=\dot{x}$ naviše paralelno strmoj ravni, pa je ugao izmedju napadne linije sile težine i brzine jednak $\alpha+\frac{\pi}{2}$, gde je α nagibni ugao strme ravni:

$$P_1=\left(4m\vec{g},\vec{v}_{C_1}\right)=-4mg\dot{x}\sin\alpha$$

2* od sile težine $6mg$, usmerene naniže, trećeg diska D_3, čija se napadna tačka C_3 kreće brzinom $v_{C_3}=\dot{x}$, usmerenom naniže:

$$P_3=\left(6m\vec{g},\vec{v}_{C_3}\right)=6mg\dot{x}$$

3* od sile težine $4mg$, usmerene naniže, petog diska D_5 čija se napadna tačka C_5 kreće brzinom $v_{C_5}=\frac{\dot{x}}{2}$, usmerenom naviše, paralelno strmoj ravni, pa je ugao izmedju napadne linije sile težine i brzine jednak $\alpha+\frac{\pi}{2}$, gde je α nagibni ugao druge strme ravni:

$$P_5=\left(4m\vec{g},\vec{v}_{C_5}\right)=-2mg\dot{x}\sin\alpha$$

4* dok su snage rada drugog i četvrtog diska jednake nuli: $P_2=2mgv_{C_2}=0$ i $P_4=2mgV_{C_4}=0$, jer se centri masa tih diskova ne pomeraju, već se diskovi samo obrću oko njih.

5* Sada možemo da odredimo ukupnu snagu rada svih aktivnih sila, koje dejstvuju na posmatrani mehanički sistem:

$$P_{akt.sila}=\sum_{i=1}^{i=5}P_i=8ng\dot{x}(1-\sin\alpha)$$

Snaga rada sila inercije, koje se javljaju pri kretanju posmatranog mehaničkog sistema, se odredjuje kao zbir snage rada sila inercije pojedinačnih diskova u sistemu. Snaga rada sprega sila momenta $\mathfrak{M}$ pri ravanskom kretanju tela, kada se telo obrće ugaonom brzinom ω upravnom na raven sprega sila je: $P=\mathfrak{M}\omega$

1* Snaga rada sila inercije prvog diska se može odrediti kao snaga rada mometa sila inercije $\mathfrak{M}_{P_1}=-\mathbf{J}_{P_1}\dot{\omega}_{P_1}$ za horizontalnu osu kroz trenutni pol rotacije diska ugaonom brzinom $\omega_{P_1}=\omega_{C_1}=\frac{\dot{x}}{r}$, te kako je aksijalni moment inercije mase diska za osu trenutne rotacije $\mathbf{J}_{P_1}=6mr^2$, to sledi da je snaga rada sila inercije tog diska:

$$P_{11,j}=\mathfrak{M}_{P_1}\omega_{P_1}=-\mathbf{J}_{P_1}\dot{\omega}_{P_1}\omega_{P_1}=-6m\dot{x}\ddot{x}$$

2* Snaga rada sila inercije drugog diska se može odrediti kao snaga rad mometa sila inercije $\mathfrak{M}_{C_2} = -\mathbf{J}_{C_2}\dot{\omega}_{C_2}$ za horizontalnu osu kroz centar masa oko koje se disk obrće ugaonom brzinom $\omega_{C_2} = \dot{\varphi}_{C_2} = \frac{\dot{x}}{r}$, te kako je aksijalni moment inercije mase diska za centralnu osu diska $\mathbf{J}_{\mathbf{C}_2} = 4mr^2$, to sledi da je snaga rada sila inercije tog diska:

$$P_{22,j} = -\mathbf{J}_{C_2}\dot{\omega}_{C_2}\omega_{C_2} = -4m\dot{x}\ddot{x}$$

3* Snaga rada sila inercije trećeg diska se može odrediti kao snaga rada mometa sila inercije $\mathfrak{M}_{P_3} = -\mathbf{J}_{P_3}\dot{\omega}_{P_3}$ za horizontalnu osu kroz trenutni pol rotacije diska ugaonom brzinom $\omega_{P_3} = \omega_{C_3} = \frac{\dot{x}}{2r}$, te kako je aksijalni moment inercije mase diska za osu trenutne rotacije $\mathbf{J}_{P_3} = 36mr^2$, to sledi da je snaga rada sila inercije tog diska:

$$P_{33,j} = \mathfrak{M}_{P_3}\omega_{P_3} = -\mathbf{J}_{P_3}\dot{\omega}_{P_3}\omega_{P_3} = -9m\dot{x}\ddot{x}$$

4* Snaga rada sila inercije četvrtog diska se može odrediti kao snaga rad mometa sila inercije $\mathfrak{M}_{C_4} = -\mathbf{J}_{C_4}\dot{\omega}_{C_4}$ za horizontalnu osu kroz centar masa diska, oko koje se disk obrće ugaonom brzinom $\omega_{C_4} = \frac{\dot{x}}{r}$, te kako je aksijalni moment inercije mase diska za centralnu osu diska $\mathbf{J}_{\mathbf{C}_4} = mr^2$, to sledi da je snaga rada sila inercije tog diska:

$$P_{44,j} = -\mathbf{J}_{C_4}\dot{\omega}_{C_4}\omega_{C_4} = -m\dot{x}\ddot{x}$$

5* Snaga rada sila inercije petog diska se može odrediti kao snaga rada mometa sila inercije $\mathfrak{M}_{P_5} = -\mathbf{J}_{P_5}\dot{\omega}_{P_5}$ za horizontalnu osu kroz trenutni pol rotacije diska ugaonom brzinom $\omega_{P_5} = \omega_{C_5} = \frac{\dot{x}}{2r}$, te kako je aksijalni moment inercije mase diska za osu trenutne rotacije $\mathbf{J}_{P_5} = 6mr^2$, to sledi da je snaga rada sila inercije tog diska:

$$P_{55,j} = \mathfrak{M}_{P_5}\omega_{P_5} = -\mathbf{J}_{P_5}\dot{\omega}_{P_5}\omega_{P_5} = -\frac{3}{2}m\dot{x}\ddot{x}$$

6* Sada možemo da odredimo ukupnu snagu rada svih sila inercije, koje se javljaju pri kretanju posmatranog mehaničkog sistema, kao zbir prethodno odredjenih snaga rada sila inercije, koje se javljaju pri kretanju svakog od pojedinačnih diskova u sistemu:

$$P_{\sin\, inercije} = \sum_{i=1}^{i=5} P_{ii,j} = -\frac{43}{2}m\dot{x}\ddot{x}$$

Snaga rada sila otpora veza u posmatranom sistemu, koji je konzervativan i sa idealnim vezama, su je jednaka nuli, zato što su otpori idealnih veza upravni na površi veza (u posmatranom sistemu, to su dve kose i jedna vertikalna ravan po kojima se kotrljaju prvi i peti, odnosno treći disk), a brzine kretanja u tangencijalnom pravcu na površi veza, pa je skalatni proizvod otpora idealne veze i brzine jednak nuli. I zglobovi, oko kojih se drugi i četvrti disk okreću, su veze, a otpori tih veza prolaze kroz te zglobove, koji su nepokretni, te je snaga rada i tih otpora veza jednaka nuli. Sile otpora kotrljanja diskova po strmim i vertikalnoj ravni prolaže kroz trenutne polove, te je i snaga rada tih silaa jednaka nuli, jer smo trenutne polove koristili kao redukcione tačke sila inercije. Sile u žadima se javljaju kao unutražnje sile sistema, i parovima suprotnih sila, te je snaga rada tih sila u rezultujućem efektu jednaka nuli, kao i rad tih sila.

.

Koačno možemo proveriti da li je ukupna snaga rada akrivnih sila, koje dejstvuju na sistem i sila inercije, koje se javljaju pri kretanju posmatranog mehaničkog sistema, jednaka nuli, jer je sistem konzervativan. Znamo da je za konzervativan sistem ukupna mehanička energija sistema nepromenljiva u toku kretanja, a snaga rada je mera promene ukupne energije sistema. Ko smo dobili da je ukupna snaga rada aktivnih sila

$$P_{akt.sila} = \sum_{i=1}^{i=5} P_i = 8ng\dot{x}(1-\sin\alpha)$$

dok je ukupnu snaga rada svih sila inercije, koje se javljaju pri kretanju posmatranog mehaničkog sistema,

$$P_{\sin\ inercije} = \sum_{i=1}^{i=5} P_{ii,j} = -\frac{43}{2} m\dot{x}\ddot{x}$$

a imajući u vidu da je ubrzanje sistema, koje smo u prethodnom odredili

$$\ddot{x} = \frac{12}{43} g(1-\sin\alpha)$$

to unošenjem tog izraza u izraz za ukupnu snagu rada sila inercije dobijamo:

$$P_{\sin\ inercije} = \sum_{i=1}^{i=5} P_{ii,j} = -\frac{43}{2} m\dot{x}\ddot{x} = -\frac{43}{2} m\dot{x}\frac{12}{43} g(1-\sin\alpha) = -6mg\dot{x}(1-\sin\alpha) = -P_{akt.sila} = -\sum_{i=1}^{i=5} P_i$$

Dakle sledi da je:

$$P = P_{akt.sila} + P_{\sin\ inercije} = \sum_{i=1}^{i=5} P_i + \sum_{i=1}^{i=5} P_{ii,j} = -\frac{43}{2} m\dot{x}\ddot{x} + 6mg\dot{x}(1-\sin\alpha) = 0$$

Možemo i ovako zaključivati: S obzirom da se radi o idealnim vezama i konzervativnom mehaničkom sistemu, to je snaga rada otpora idealnih veza jednaka nuli, jer su brzine u tangencijalnom pravcu na veze, a otpori idealnih veza upravni na brzine, pa je snaga rada tih sila jednaka nuli. S obzirom da je sistem konzervativan, a ukupna mehanička energija sistema konstantna, to je ukupna snaga rada svih sila sistema jednaka nuli.

$$\frac{d(\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p})}{dt} = P = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i, \vec{v}_i) = 0$$

$$\frac{d(\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p})}{dt} = P = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i, \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{i=5} P_i + \sum_{i=1}^{i=5} P_{ii,j} = -\frac{43}{2} m\dot{x}\ddot{x} + 6mg\dot{x}(1-\sin\alpha) = 0$$

Iz poslednjeg uslova koji smo napisali na osnovu teoreme o nepromenljivosti ukupne mehaničke energije konzervativnog sistema, ako nismo odredili diferencijalnu jednačinu kretanja niti ubrzanje, to iste možemo dobiti, jer iz prethodnog sledi da je:

$$-\frac{43}{2} m\dot{x}\ddot{x} + 6mg\dot{x}(1-\sin\alpha) = 0$$

odnosno:

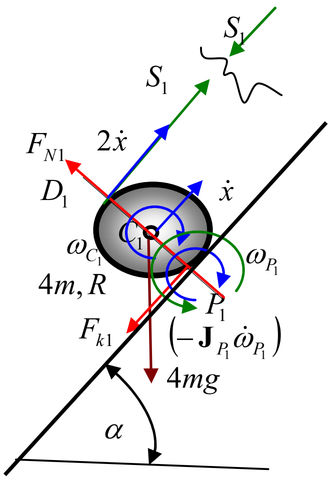
$$\ddot{x} = \frac{12}{43} g(1-\sin\alpha)$$

Ovaj rezultat možemo dobiti i pomoću Lagrange-ove jednačine druge vrste za generalisanu koordinatu x:

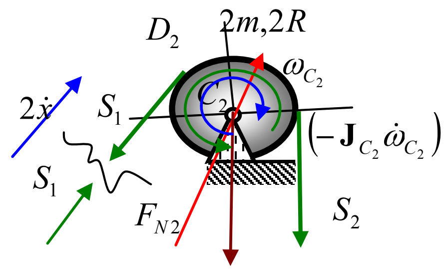
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial x} = 0$$

na osnovu čega dobijamo diferencijalnu jednačinu kretanja posmatranog sistema po generalisanoj koordinati x:

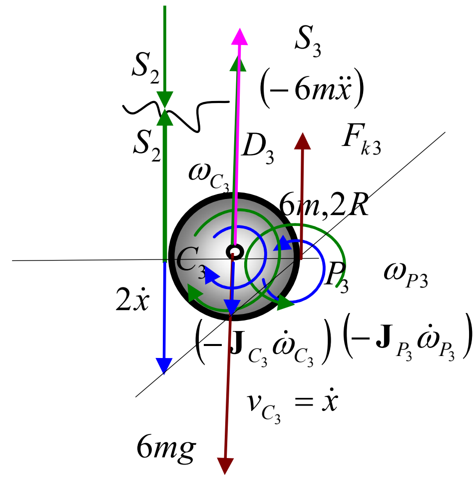
$$-\frac{43}{2} m\ddot{x} + 6mg(1-\sin\alpha) = 0$$



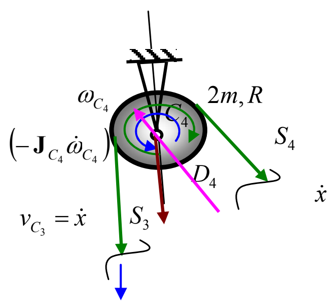
Slika 2. d*



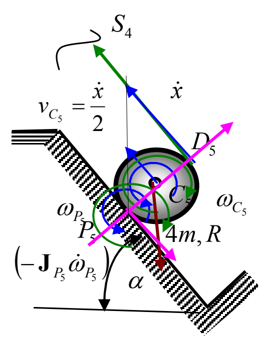
Slika 2. e*



Slika 2. f*



Slika 2. g*



Slika 2. h*

Da bi smo odredili sile u užadima, napravićemo fiktivnu dekompoziciju sistema na sastavne proste podsisteme-diskove ’’presecanjem’’ užadi i zamenom užadi parovima suprotnih sila u užadima, kao što je to prikazano na slikama 2.d*, 2.e*, 2.f*, 2.g* i 2.h* Tako smo svaki disk fiktivno odvojili u po jedan zaseban podsistem, a uticaje jednog na drugi preko užadi, uklanjanjem veza užadima, zamenili odgovarajućim dejstvima, silama u užadima, kao što je to naznačeno na nabrojanim slikama.

Zatim ćemo na osnovu principa dinamičke ravnoteže za svaki od podsistema napisati jednačine ravnoteže sila uključujući i aktivne i reaktivne sile, kao i sile inercije. Iz tih jednačina odredjujemo nepoznate unutrašnje sile u užadima, kao i odgovarajuće sile inercije i sile otpora ostalih veza. Medjutim. kako smo već odredili ubrzanja sistema, dovoljno je iz tih sistema jednačina koristiti samo one jednačine koje su potrebne da odredimo nepoznate sile u uzadima i jos jednu kojom ćemo proveriti tačnost odredjenih analitičkih izraza ili veličina sila u užadima.

Da bi smo primenili princip dinamičke ravnoteže i napisali jednačine dinamikčke ravnoteže prvog diska, koji se kotrlja po prvoj kosoj ravni, potrebno je prvo da napravimo analizu sila koje na isti dejstvuju ili se javljaju pri njegovom kretanju. Na taj disk, u kotrljanju uz strmu ravan, dejstvuju ili se javljaju sledeće sile i spregovi: aktivna sila težine $4mg$; sile inercije koje redukovane na trenutni pol P_1 rotacije daju momet sila inercije $\mathfrak{M}_{P_1} = -\mathbf{J}_{P_1}\dot{\omega}_{P_1}$ za horizontalnu osu kroz trenutni pol P_1 rotacije diska, koji se kotrlja bez klizanja niz strmu ravan ugaonom brzinom $\omega_{P_1} = \omega_{C_1} = \dfrac{\dot{x}}{r}$, a kako je aksijalni moment inercije mase diska za osu trenutne rotacije $\mathbf{J}_{P_1} = 6mr^2$ to moment redukovanih sila inercije tog diska $\mathfrak{M}_{P_1} = -\mathbf{J}_{P_1}\dot{\omega}_{P_1} = -6m\ddot{x}$; sila otpora veze sa normalnom komponentom F_{N1} otpora strme ravni i tangencijalnom komponentom silom otpora F_{k1} kotrljanju bez klisanja diska i sila u užetu koju obeležavamo sa S_1. Primenom principa dinamičke ravnoteže za prvi disk (vidi sliku 2.d*) pišemo sledeće uslove dinamičke ravnoteže:

$$\mathbf{J}_{P_1}\dot{\omega}_{P_1} = S_1 \cdot 2r - 4mg\sin\alpha \cdot r$$

$$S_1 - 4mg\sin\alpha - F_{k1} - 4m\ddot{x} = 0$$

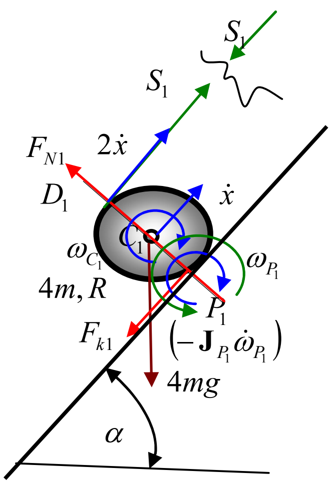
$$F_{N1} - 4mg\cos\alpha = 0$$

Napisali smo tri jednačine, jer se radi o ravanskom kretanju, pa je potrebno postaviti tri uslova dinamičke ravnoteže. Mogli smo pisati te jednačine i koristeći momentnu jednaćinu za centar masa diska, kako u opštem slučaju i postupamo, kada nije očiglledno i lako odrediti trenutni pol rotacije, ako što je u našem zadatku za ovaj disk, kao i za ostale.

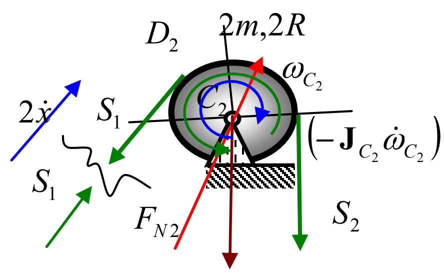
Iz prve jednačine prethodnog sistema odredjujemo silu u užetu S_1:

$$S_1 = \frac{2}{43} mg(18 + 25\sin\alpha)$$

Iz druge i treće jednačine sistema se mogu odrediti sile otpora strme ravni kotrljanju diska bez klizanja, F_{N1} i F_{k1}.



Slika 2. d*



Slika 2. e*

Na drugi disk koji se obrće oko ose kroz njegov centar masa C_2 dejstvuju ili se javljaju sledeće sile i spregovi: aktivna sila težine $2mg$; sile inercije koje redukovane na centar masa C_2 oko koga disk rotira daju momet sila inercije $-\mathbf{J}_{C_2}\dot{\omega}_{C_2}$ za horizontalnu osu kroz C_2 rotacije diska, ugaonom brzinom $\omega_{C_2} = \dot{\varphi}_{C_2} = \dfrac{\dot{x}}{r}$, te kako je aksijalni moment inercije mase diska za centralnu osu diska $\mathbf{J}_{\mathbf{C}_2} = 4mr^2$, to sledi da je moment sila inercije diska $\mathfrak{M}_{C_2} = -\mathbf{J}_{C_2}\dot{\omega}_{C_2} = -4m\ddot{x}$; dve sile S_1 i S_2 u užetu koje je prebačeno preko tog kotura; sila F_{N_2} otpora zglovne veze u C_2. Primenom principa dinamičke ravnoteže za drugi disk (vidi sliku 2.e*) pišemo sledeće uslove dinamičke ravnoteže:

$$\mathbf{J}_{C_2}\dot{\omega}_{C_2} = 2r(S_2 - S_1)$$

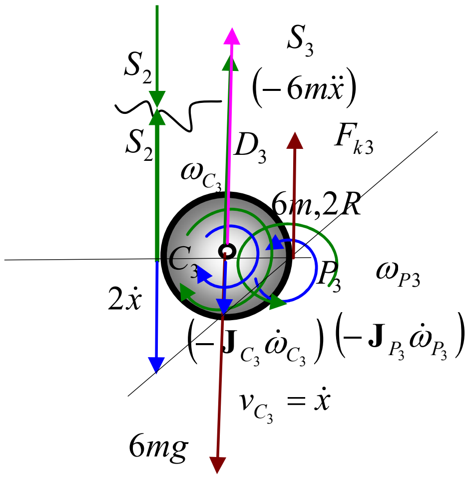
$$F_{N_2x} - S_1\cos\alpha = 0$$

$$F_{N_2y} - S_1\sin\alpha - S_2 - 2mg = 0$$

Iz prve jednačine prethodnog sistema odredjujemo silu u užetu S_2 imajući u vidu da smo silu u užetu S_1 prethodno odredili:

$$S_2 = \frac{2}{43} mg(30 + 13\sin\alpha)$$

Iz druge i treće jednačine prethodnog sistema moguće je odrediti komponente F_{N_2x} i F_{N_2y} sile otpora F_{N_2} zglobne veze u C_2.



Slika 2. f*

Na treći disk, koji visi na užadima u kotrljanju niz vertikalnu ravan dejstvuju ili se javljaju sledeće sile i spregovi: aktivna sila težine $6mg$; sile inercije koje redukovane na trenutni pol P_3 rotacije daju momet sila inercije $\mathfrak{M}_{P_3} = -\mathbf{J}_{P_3}\dot{\omega}_{P_3}$ za horizontalnu osu kroz trenutni pol P_3 rotacije diska, koji se kotrlja bez klizanja niz vertikalnu ravan ugaonom brzinom $\omega_{P_3} = \omega_{C_3} = \dfrac{\dot{x}}{2r}$, a kako je aksijalni moment inercije mase diska za osu trenutne rotacije $\mathbf{J}_{P_3} = 36mr^2$, to moment redukovanih sila inercije tog diska $\mathfrak{M}_{P_3} = -\mathbf{J}_{P_3}\dot{\omega}_{P_3} = -18m\ddot{x}$; sila otpora veze sa normalnom komponentom $F_{N3} = 0$ otpora vertikalne ravni i tangencijalnom komponentom silom otpora F_{k3} kotrljanju bez klisanja diska i sila u užetu koje obeležavamo sa S_2 i S_3. Primenom principa dinamičke ravnoteže za treći disk (vidi sliku 2.f*) pišemo sledeće uslove dinamičke ravnoteže:

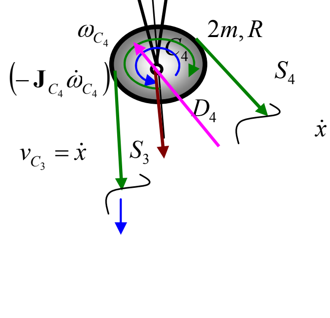
$$\mathbf{J}_{P_3}\dot{\omega}_{P_3} = 6mg \cdot r - S_2 \cdot 2r - S_3 \cdot r$$

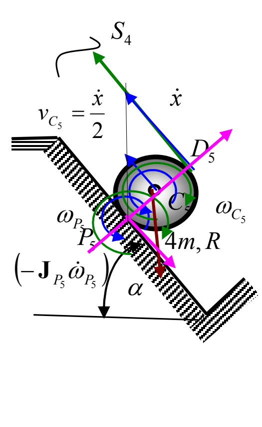
$$6mg - 6m\ddot{x} - S_2 - S_3 - F_{k3} = 0$$

Iz prve jednačine ovog sistema odredjujemo nepoznatu silu u užetu S_3, jer smo silu S_2 odredili ranije:

$$S_3 = \frac{2}{43} mg(15 + 28\sin\alpha)$$

Iz druge jednačine se može odrediti sila otpora kotrljanju trećeg diska po vertikalnoj ravni.





Slika 2. g* Slika 2. h*

Na četvrti disk koji se obrće oko ose kroz njegov centar masa C_4 dejstvuju ili se javljaju sledeće sile i spregovi: aktivna sila težine $2mg$; sile inercije, koje redukovane na centar masa C_4 oko koga disk rotira daju momet sila inercije $\mathfrak{M}_{C_4} = -\mathbf{J}_{C_4}\dot{\omega}_{C_4}$ za horizontalnu osu kroz C_4 rotacije diska, ugaonom brzinom $\omega_{C_4} = \frac{\dot{x}}{r}$, te kako je aksijalni moment inercije mase diska za centralnu osu diska $\mathbf{J}_{C_4} = mr^2$, to sledi da je moment sila inercije diska $\mathfrak{M}_{C_4} = -\mathbf{J}_{C_4}\dot{\omega}_{C_4} = -m\ddot{x}$; dve sile S_3 i S_4 u užetu koje je prebačeno preko tog kotura; sila F_{N_4} otpora zglovne veze u C_4. Primenom principa dinamičke ravnoteže za četvrti disk (vidi sliku 2.e*) disk pišemo sledeće uslove dinamičke ravnoteže:

$$\mathbf{J}_{C_4}\dot{\omega}_{C_4} = 2r(S_3 - S_4)$$

$$F_{N_4x} - S_4\cos\alpha = 0$$

$$F_{N_4y} - S_4\sin\alpha - S_3 - 2mg = 0$$

Iz prve jednačine prethodnog sistema odredjujemo silu u užetu S_4 imajući u vidu da smo silu u užetu S_3 prethodno odredili:

$$S_4 = \frac{2}{43}mg(9 + 34\sin\alpha)$$

Iz druge i treće jednačine prethodnog sistema moguće je odrediti komponente F_{N_4x} i F_{N_4y} sile otpora F_{N_4} zglobne veze u C_4.

Na peti disk u kotrljanju uz drugu strmu ravan dejstvuju ili se javljaju sledeće sile i spregovi: aktivna sila težine $4mg$ disk; sile inercije koje redukovane na trenutni pol P_5 rotacije daju momet sila inercije $\mathfrak{M}_{P_5} = -\mathbf{J}_{P_5}\dot{\omega}_{P_5}$ za horizontalnu osu kroz trenutni pol P_5 rotacije diska, koji se kotrlja bez klizanja uz strmu ravan ugaonom brzinom $\omega_{P_5} = \omega_{C_5} = \frac{\dot{x}}{2r}$, a kako je aksijalni moment inercije mase diska za osu trenutne rotacije $\mathbf{J}_{P_5} = 6mr^2$, to moment redukovanih sila inercije tog diska $\mathfrak{M}_{P_5} = -\mathbf{J}_{P_5}\dot{\omega}_{P_5} = -3m\ddot{x}$; sila otpora veze sa normalnom komponentom F_{N5} otpora strme ravni i tangencijalnom komponentom silom otpora F_{k5} kotrljanju bez klisanja diska i sila u užetu koju obeležavamo sa S_1. Primenom principa dinamičke ravnoteže za peti disk (vidi sliku 2.h*) pišemo sledeće uslove dinamičke ravnoteže:

$$\mathbf{J}_{P_5}\dot{\omega}_{P_5} = S_4 \cdot 2r - 4mg\sin\alpha \cdot r$$

$$S_4 - 4mg\sin\alpha - F_{k5} - 4m\frac{\ddot{x}}{2} = 0$$

$$F_{N_5} - 4mg\cos\alpha = 0$$

Napisali smo tri jednačine, jer se radi o ravanskom kretanju, pa je potrebno postaviti tri uslova dinamičke ravnoteže. Mogli smo pisati te jednačine i koristeći momentnu jednaćinu za centar masa diska, kako u opštem slučaju i postupamo, kada nije očiglledno i lako odrediti trenutni pol rotacije, kao što je to slučaj u našem zadatku za ovaj disk, kao i za ostale diskove.

Iz prve jednačine prethodnog sistema odredjujemo silu u užetu S_4 u obliku:

$$S_4 = \frac{2}{43} mg(9 + 34\sin\alpha)$$

Iz druge i treće jednačine prethodnog sistema moguće je odrediti otpore veza F_{N_5} i F_{k5} .

Kako smo već ranje odredili silu u užetu S_4, to postavljanje uslova dinamičke ravnoteže za petu podsistem - dinamiku petog diska nam je poslužilo kao test - proveta da smo tačno odredili sve sile u užadima, jer smo dobili isti izraz za tu silu koristeći uslove dinamičke ravnoteže četvrtog podsistema - četvrtog diska.

TREĆI ZADATAK. Na slici 3. prikazana je homogena tanka pločica, мace M , konture $AECDBNM$, a oblika ćiriličnog slova л i dimanzija izraženih preko parametra dužine a i konture kao što je na slici i prikazano. Težište cele ploćice je u temenu C konkavnog dela konture pločoce, koje je ne udaljenju $h = ?$ od ose vratila. Pločica je kruto učvršćena na lakom vratilu, tako da je osa vratila na istom pravcu kao i deo konturne ivice pločice. Vratilo je sa ležištima, nepokretnim u A i cilindričnim u B , na međusobnom rastojanju $4a$. Odrediti:

a* period oscilovanja pločice oko ose vratila, kada je ta osa horizontalna.

b* kolika treba da je masa materijalnih tačaka m , koje treba dodati na lakim krutim štapovima zanemarljive mase, dužine ℓ da bi pločica oko horizontalne ose vratila bila uravnotežena, slika 3.b *? Da li dužina štapa-prepusta ℓ treba da zadovoljava neki uslov? Da li bi pločica bila uravnotežena ako bi se obrtala oko ose vratila, koja nije horizonatalno,? Obrazloži odgovor!

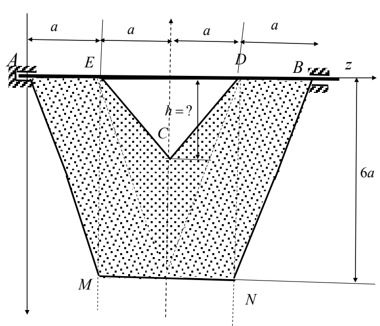
c* vektor momenta inercije mase tela za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu A ;

d* kinetičke pritiske na ležošta vratila za slučaj rotacije polčice slučaj rotacije pločice jenakoubrzano oko horizontalne ose (na slici 3. a*) početnom ugaonom brzinom ω_0 i ugaonim ubrzawem ε_0 ;

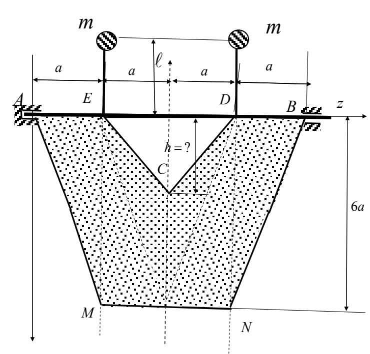
e* devijacioni spreg koji desjtvuje na ležošta vratila za slučaj jenakoubrzanog obrtanja oko horizontalne ose (na slici 3. a*);

f* intenzitet vektora rotatora za taj slučaj.

g* udarne impulse na ležišta vratila ako na pločicu dejstvuje udarna sila u tištu pločoce, upravno na pločicu, a poznato je da je uradni impuls sile K_0 .



Slika 3. a*

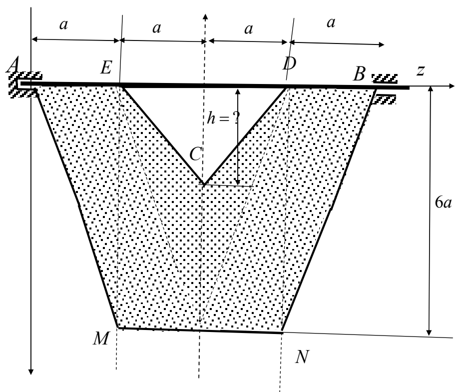


Slika 3. b*

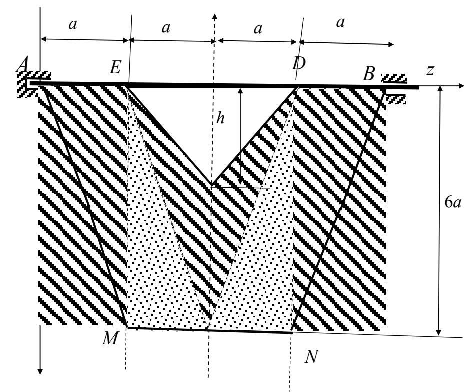
REŠENJE TREĆEG ZADATKA. Pre nego štp predjemo na rešavanje konkretnog zadatka, potrebno je odrediti visinu $h = ?$ izvadjenog trougla iz uslova da je težište posmatrane pločice u temenu tog trougla, odnosno da je $y_C = h = ?$.

$$y_C = h = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = h$$

Da bi smo zatak pojednostavili napravićemo analizu moguće dekompozivije površine pločice koristeći osobinu da se statički moment površine za neku osu ne menja, ako delove te površine pomeramo paralelno toj osi ne menjajući rastojanje težišta delova te površine od ose. Na slikama 3.c* i d* prikazano je kako se translacijom može površina pločice u odnosu na osu oscilovanja pločice transformisati u dva jednaka pravougaonika i dva trougla od čega je manji izvadjen iz većeg. Tako transformisana površina pločice omogućava nam da jednostavnijom računicom odredimo rastojanje tešišta pločice od ose rotacije, kao i njen aksijalni moment inercije za tu osu, a kako ovom translacijom nismo promenili položaj težišta pločice u odnosu na dve ose osu rotacije i na nju upravnu kroz nepokretno ležište vratila, a ni osu simetrije to i devijacioni moment masa nije teško odrediti.



Slika 3. c*



Slika 3. d*

Na osnovu prethodne analize možemo da napišemo sledeće:

$$y_C = h = \frac{\sum_{i=1}^{4} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{4} A_i} = \frac{6a^2 2a - ah\frac{h}{3} + 2\cdot 6a^2 3a}{6a^2 - ah + 2\cdot 6a^2} = h$$

$$h\left(18a^2 - ah\right) = 48a^2 a - ah\frac{h}{3}$$

$$3h\left(18a - h\right) = 144a^2 - h^2$$

$$54ah - 3h^2 - 144a^2 + h^2 = 0$$

$$54ah - 2h^2 - 144a^2 = 0$$

$$2h^2 - 54ah + 144a^2 = 0$$

odakle dobijamo sledeću kvadratnu jednačinu po nepoznatoj visini $h = ?$ manjeg trougla:

$$2h^2 - 54ah + 144a^2 = 0$$

$$h^2 - 27ah + 72a^2 = 0$$

Koreni te kvadratne jednačine su:

$$h_{1,2} = \frac{27a \mp a\sqrt{27^2 - 4\cdot 72}}{2} = \frac{27a \mp a\sqrt{3^2 9^2 - 4\cdot 8\cdot 3^2}}{2} = \frac{27a \mp 3a\sqrt{81-32}}{2} = \frac{27a \mp 3a\sqrt{49}}{2}$$

$$h_{1,2} = \frac{27}{2}a \mp \frac{21}{2}a = \begin{cases} 3a \\ 24a \end{cases}$$

Od dva dobijena korena, vidimo da prvi, manji koren odgovara realno pločici, dok drugi koren predstavlja degeneraciju pločice menjanjem njenog oblika koture, pa nije za naš slučaj prihvatljivo, ali i neupotrebljivo za nas postavljen zadatak. Promenilo bi konturu pločice.

Da bi smo odredili period oscilovanja pločoce potrebno je da odredimo aksijalni moment inercije pločice za osu oscilovanja. Koristimo transformisanu pločicu, pa je lako odrediti taj traženi moment inercije koristeći aksijalni moment inercije za dva pravougaonika i za osu kroz njihovu osnovicu i za dva trougla. Kako oba knturna trogla pločice imaju osnovice na zajedničkoj osi oscilovanja pločice, kao fizičkog klatna, pa je lako odrediti aksijalni moment inercije pločice koisteči aksijalne momente inercije površina trouglova za ose, koje prolaze pravcem osnovice trougla i dobijeni rezutat pomnožiti površinskom gustinom homogene pločice.

Površina pločice je sada:

$$A = 2 \cdot 6a^2 + 6a^2 - 3a^2 = 16a^2$$

Površinska gustna pločice je:

$$\rho = \frac{M}{A} = \frac{M}{16a^2}$$

$$\mathbf{J}_u = \rho\left(2I_u^{\Pr} + I_u^{\Delta_1} - I_u^{\Delta_1}\right) = \frac{M}{16a^2}\left\{\frac{1}{3}2a(6a)^3 + \frac{1}{12}\left[2a(6a)^3 - 2a(3a)^3\right]\right\}$$

$$\mathbf{J}_u = \frac{351Ma^2}{32}$$

Redukovana dužina fizičkog klatna je:

$$\ell_r = \frac{\mathbf{J}_u}{My_C} = \frac{117a}{32}$$

Kružna frekvencija malih oscilacija pločice oko ose u je:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell_r}} = \sqrt{\frac{32g}{117a}}$$

dok je period oscilovanja za male elongacije:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{117a}{32g}}$$

Vektor momenta inercije mase pločice za pol u neporetnom ležištu vratila i osu rotacije pločice i vratila ima kolinearni deo sa osom, koji je jednak aksijalnom momentu inercije $\mathbf{J}_u$ mase pločice za tu osu i devijacioni deo, koji je upravan na osu i leži u devijacionoj ravni za tu pločicu i osu i pol u nepokretnom lištu, a jednak je centifugalnom momentu mase pločice za par osa od kojih je jedna osa rotacije, a druga osa upravna na istu a kroz nepokretno ležište. S obzirom da smo postavili ravan pločice u ravni $u - v$ to treba odrediti centrifugalni moment pločice za te dve ose. Imajući u vidu da pločica ima jednu osu aksijalne simetrije, koja prolazi kroz centar masa pločice (težište), to je centrifugalni moment masa pločice za centralne ose jednak nuli, pa je za odredjivanje devijacionog dela vektora momenta inercije mase za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu dovoljno odrediti položajni deo, koji je jednak proivodu mase pločice i koordinata njenog težišta u odnosu na taj sistem koordinata. Na osnovu toga pišemo:

$$\mathbf{J}_{Auv} = \mathbf{J}_{Cuv} + My_C u_C = 6Ma^2$$

Vektor momenta inercije mase za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu A je sada:

$$\vec{\mathfrak{J}}_A^{(\vec{u})} = \mathbf{J}_u\vec{u} + \mathbf{D}_{uv}\vec{v} = \frac{117}{32}Ma^2\vec{u} + 6Ma^2\vec{v} = \mathbf{J}_u\vec{u} + \vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}$$

Devijacioni deo vektora momenta inercije mase za pol u neporetnom ležištu vratila i osu rotacje je:

$$\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})} = 6Ma^2\vec{v}$$

Prema teoriji, uz korišćenje vektora momenata masa dobili smo (vidi predavanja) da su kinetički pritisci na ležišta vratila:

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_{A(dev)} = \frac{1}{r_{AB}}\left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}\right|\mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_{01} = \frac{1}{r_{AB}}\left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_{01}\sqrt{\dot{\omega}^2+\omega^4}$$

$$\vec{F}_{A(S-dev)} = \left|\vec{\mathfrak{S}}_A^{(\vec{u})}\right|\mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_{02} = \left|\vec{\mathfrak{S}}_A^{(\vec{u})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_{02}\sqrt{\dot{\omega}^2+\omega^4}$$

dok je devijacioni spreg intenziteta

$$\mathfrak{M}_{dev} = \left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}\right|\mathfrak{R} = \left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}\right|\sqrt{\dot{\omega}^2+\omega^4}$$

Kako je zadato da se vratilo i pločica obrću jednoliko ubrzano početnom ugaonom brzinom ω_0 i ugaonim ubrzanjem ε_0 , to nije teško dobiti kinetičke pritiske i devijacioni spreg, koji dejstvuju na ležista vratila pločice. Za posmatrani slučaj kinetički pritisci na ležišta vratila:

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_{A(dev)} = \frac{3}{2}Ma\sqrt{\varepsilon_0^2+\left(\varepsilon_0 t+\omega_0\right)^4}\,\vec{\mathfrak{R}}_{01}$$

$$\vec{F}_{A(S-dev)} = 3Ma\sqrt{\varepsilon_0^2+\left(\varepsilon_0 t+\omega_0\right)^4}\,\vec{\mathfrak{R}}_{02}$$

dok je devijacioni spreg intenziteta

$$\mathfrak{M}_{dev} = \frac{3}{2}Ma^2\sqrt{\varepsilon_0^2+\left(\varepsilon_0 t+\omega_0\right)^4}$$

Uslov da je materijalni sistem koji se sastoji od prethodno definisane pločice i dve dodate materijalne tačke na lakim prepistima je da je centar masa pločice na osi rotacije, i da je osa rotacije glavna osa inercije za pol u nepokretnom ležištu, odnosno da je centrifugalni - devijacioni deo vektora momenta inercije mase materijalnog tela za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu kolinearan sa osom, odnosno da je devijacioni deo jednak nuli.

Na osnovu ovoga pišemo tri uslova od kojih se dva svode na isti uslov za slučaj da je ceo sistem u jednoj ravni, uključujući i osu rotacije.

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = 0$$

$$\mathbf{D}_{uv} = 0$$

$$\mathbf{J}_{u1}^{\ell} = \mathbf{J}_{u2}^{d}$$

Za naš konkretni zadatak dobijamo sledeća dva uslova:

$$2m\ell = 3Ma$$

$$2m\ell^2 = \frac{351}{32}Ma^2$$

Na osnovu tih uslova dobijamo da je uslov uravnoteženja posmatranog materijalnog objekta da su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$m = \frac{1}{78}M$$

$$\ell = 117a$$