МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У НИШУ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
Испитни рок ***Октобарски III испитни рок (18. октобар) 2008.***
Предметни наставник: ***Проф. др Катица (Стевановић) Хедрих****, академик Академије наука високих школа и универзитета Украјине, академик Академије нелинеарних наука Москва, члан GAMM, Int. ASME, EuroMech, American Academy of Mechanics, M.C. Chaki Centre for Mathematics and Mathematical Sciences u Tensor Society.*
Предметни асистент: Мг ***Јулијана Симоновић,*** асистент-приправник (на одсуству)

ПИСМЕНИ ДЕО ИСПИТА ИЗ ПРЕДМЕТА

МЕХАНИКА III - ДИНАМИКА

MEHANIKA III - DINAMIKA

PRVI ZADATAK. Materijalna tačka mase m, puštena je početnom brzinom $\vec{v}_0$, u polju Zemljine teže, iz položaja , A na visini h_0 u odnosu na referentni horzont, da se kliza niz HRAPAVI strmu ravan, koja sa horizontom zaklapa ugao α. Koeficijent trenja klizanja niz strmu ravan je μ. Linija $A\ N\ B$ sa slike 1. je u vertikalnoj ravni. Strma ravan se, u tački M, nastavlja u cilindričnu idealno glatku površ poluprečnika $R = R = 6r$, centralnog ugla 3α, tako da vertikala lroz centar krivine luka, deli taj ugao u odnosu 1:2, kao što je na slici 1. ptikazano.

a* Koji uslov treba da zadovoljava početna brzina $\vec{v}_0$ materijalne tačke da bi se klizala po po strmoj ravni, zadržavši svoje položaje kroz koje prolazi na toj strmoja ravni, ostajući sve vreme u vertikalnoj ravni?

b * Koliko stepeni slobode kretanja ima materijalna tačka dok se kliza niz strmu ravan i po cilindričnoj površi, a koliko stepeni kada napusti tu površ po prolasku kroz položaj B ? Obrazloži odgovor.

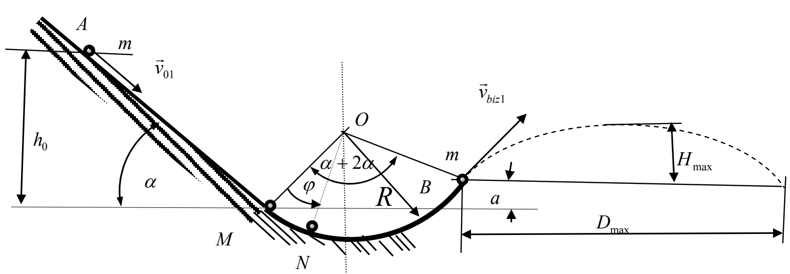
c* Napisati kinetičku i potencijalnu energiju materijalne tačke pri klizanju niz HRAPAVU strmu ravan, po cilidričnoj glatkoj površi i po napustanju iste, a u položajima A (početni položaj), L (proizvoljan položaj na strmpj tavnni), N (položaj odredjen uglom φ na cilindričnoj površi), B i D (kada napusti cilindričnu površ). Da li je sistem konzervativan ili nekonzervativan? Obrazloži odgovor. Na osnovu teoreme o promeni ukupne energije sistema napisati odgovarajući matematićko iskaz primene iste na posmatrani sistem u svim fazama kretanja sistema (po hrapavoj strmoj ravni, po cilindričnoj glatkoj površi i po napuštanju iste) i obrazloži .

d* Odrediti brzine materijalne tačke, pri njenom prolasku kroz tačku N odredjenu uglom φ na cilindričnoj površi, kao i pri prolasku kroz tačku B u kojoj napušta cilindričnu površ;

e* Odrediti jednačine kretanja materijalne talke po napuštanju cilindrične površi u tački B. Kolika je maksimalna visina $H_{\max} = ?$ koju će postići materijalna tačka u fazi kretanja po napuštanju cilindrične površi, kao i njen maksimalni domet $D_{\max} = ?$ u toj fazi kretanja.

g* Kolika je ugaona brzina materijalne tačke u položaju dostizanja maksimalne visine $H_{\max}$?

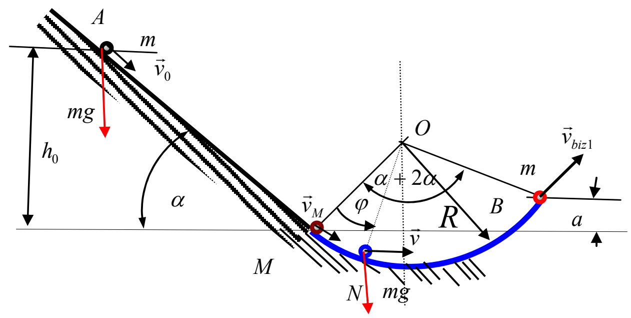
h* Kolika je sila pritiska na cilindričnu površ u proizvoljnom polžaju materijalne tačke na njoj? Koliki treba da bude ugao α, odnosno početna brzina $\vec{v}_0$ materijalne tačke, te da se ona odvoji od cilindrične površi pre izlaska sa iste (njenog kraja)?



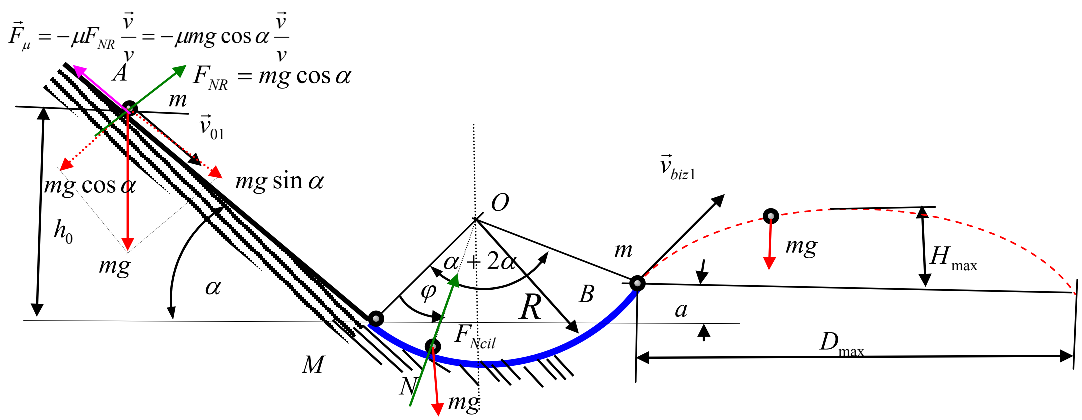
Slika 1.

REŠENJE DRUGOG ZADATKA: Materijalna tačka u prostoru ima tri stepeni slobode kretanja. Kad se podvrne vezi: kretanje u vertikalnoj ravni , onda njoj ostane dva stepena slobode kretanja u toj ravni. Veza izražena time da se kreće po strmoj ravni znači da se ona može kretati po presečnoj liniji strme ravni i vertikalne ravni, pa joj je preostao samo jedan stepen slobode kretanja. Medjutim veza po strmoj ravni je jednostrano zadržavajuća, pa materijalna tačka može ostati na toj ravni samo ako su njena brzina u svakom trenutku kretanja paralelna toj ravni i leži u vertikalnoj ravni, pa njena početna brzina treba da zadovoljava taj uslov, (a ovaj uslov se izrazava i relacijom

$(\vec{v}.gradf)=0$). Kada materijalna tačka predje na kretanje po cilindričnoj površi ona mora da se kreće po presečnoj liniji (kružni luk) cilindrične površi i vertikalne ravni, te i u toj drugoj fazi kretanja ima jedan stepen slobode kretanja. Kako je i tu veza jednostrano zafržavajuća na toj vezi će ostati sve dok sila pritiska materijalne tačke na tu cilindričnu površ bude veća od nule. Kada postane jednaka nuli, materijalna tačka će se odvojiti od cilindrične površi i nastaviti da se kreće u vertikalnoj ravni pod dejstvom sile zemljine teže i imajući pri tome dva stepena slobode kretanja, a sa početnom brzinom, koja je jednaka brzini koju je imala u trenutku, kada je pritisak na cilindričnu površ postao jednak nuli. Ako na cilindričnoj površi u toj fazi kretanja meterijalne tačke ne postoji položaj u kome je pritisak materijalne tačke na cilindričnu površ jednak nuli, materijalna tačka će se kretati do kraja po toj površi i u tački B napustiti tu površ brzinom $\vec{v}_B$, a posle toga se kretati u vertikalnoj ravni pod dejstvom sile sopstvene težine i imati dva stepena slobode kretanja (tip kretanja je kosi hitac) i sa početnom brzinom, koja je jednaka brzini $\vec{v}_B$ napuštanja cilindrične površi u taćki B . I da zaključimo kretanje materijalne tačke se odvija kroz tri faze kretanja prve dve faze sa po jednim stepenom slobode kretanja i treće sa dva stepena slobode kretanja (vidi slike 1.a* i 1.b*).



Slika 1.a* Materijalni sistem sa jednim stepenom slobode kretanja-prva i druga faza kretanja : po strmoj hrapavoj ravni i po cilindričnoj glatkoj površi i u vertikalnoj ravni



Slika 1. b* Materijalni sistem sa jednim stepenom slobode kretanja-prva i druga faza kretanja : po strmoj hrapavoj ravni i po cilindričnoj glatkoj površi i u vertikalnoj ravni i sistem sa dva stepena slobode kretanja u trećoj fazi kretanja, po izlasku iz cilindrične površi ostajući u vertikalnoj ravni

Za prvu fazu kretanja, kada materijalna tačka ima jedan stepen slobode kretanja, za generalisanu koordinatu možemo usvojiti koordinatu x merenu od početnog položaja i u pravcu strme hrapave ravni, ili koordinatu h visinu položaja materijalne tačke merenu od istog referentnog nivoa od koga je merena i zadata početna visina h_0 položaja materijalne tačke u početnom trenutku. Ovo je pitanje volje izbora onoga ko rešava zadatak, ali se samo jedna od tih koordinata može proglasiti generalisanom, a druga izraziti pomoću funkcionalne veze sa izabranom i proglašenom koordinatom za generalisanu koordinatu. Ta veza je: $h=h_0-x\sin\alpha$.

Kinetička energija sistema u prvoj fazi kretanja materijalne tačke po strmoj hrapavoj ravni jednaka je kinetičkoj energiji translacije te materijalne tačke:

$$\mathbf{E_k}=\frac{1}{2}mv^2,$$

Na sistem, od aktivnih sila dejstvuje samo sila Zemljine teže, koja je konzervativna sila i ima funkciju sile, odnosno potencijal. Potencijalna energija sistema je:

$$\mathbf{E_p}=mgh=mg(h_0-x\sin\alpha)$$

i izražena je pomoću koordinate h u pravcu vertikale, ili pomoću koordinate x, koju smo izabrali za generalisanu koordinatu. Mogli smo umesto koordinate x za generalisanu koordinatu izabrati koordinate h u pravcu vertikale.

Prilikom klizanja materijalne tačke po hrapavoj strmoj ravni koeficijenta trenja μ, javlja se sila trenja koja je proporcionalna normalnom pritisku materijalne tačke na strmu ravan. Taj pritisak $F_{NR} = mg\cos\alpha$, te je sila trenja klizanja materijalne tačke po strmoj ravni jednaka

$$\vec{F}_{\mu} = -\mu F_{NR}\frac{\vec{v}}{v} = -\mu mg\cos\alpha\frac{\vec{v}}{v}$$

Rad sile trenja F_{μ} klizanja materijalne tačke po hrapavoj stmoj ravni za x je:

$$\mathbf{A}^{\mathbf{F}_{\mu}} = \int_0^x \left(\vec{F}_{\mu}, d\vec{s}\right) = \int_0^x \left(-\mu F_{NR}\frac{\vec{v}}{v}, d\vec{s}\right) = -\mu mgx\cos\alpha = -\mu mg\frac{h_0 - h}{\sin\alpha}\cos\alpha = -\mu mg\left(h_0 - h\right)ctg\alpha$$

Jer je sila trenja klizanja konstantna u roku kretanja materijalne tačke po strmoj ravni, jer je i pritisak materijalne tačke po strmoj ravni konstantan.

Kako se zadatkom traži brzina v materijalne, koristićemo integral energije, odnosno teoremu o prom ukupne mehanučke energiji sistema, prilikom kretanja materijalne tačke na koju desjtvuju i nekonzervativne sile. Promena ukupne mehaničke energije nekonzervativnog sistema jednaka je snazi rada nekonzervativnih sila, odnosno za konačni interval vremena, ako su te nekonzervativne sile konstantne, kao što je to slučaj sa silom trenja pri kretanju materijalne tačke po strmoj hrapavoj ravni, to sledi da je opadanje ukupne mehaničke energije sistema jednako radu sile trenja na odredjenom putu te materijalne tačke po hrapavoj strmoj ravni. Na osnovu toga pišemo da je:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} - \left(\mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}}\right) = \mathbf{A}^{F_{\mu}} = -\mu mg\left(h_0 - h\right)ctg\alpha$$

ili

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} - \mathbf{A}^{F_{\mu}} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}}$$

odnosno:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh - \left(-\mu mg\cos\alpha\right)\frac{\left(h_0 - h\right)}{\sin\alpha} = \mathbf{E_0} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0$$

odakle sledi da je:

$$v^2 = v_0^2 + 2g\left(h_0 - h\right)\left(1 - \mu ctg\alpha\right)$$

odnosno

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g\left(h_0 - h\right)\left(1 - \mu\, ctg\alpha\right)}$$

Ako prethodnu vezu izrazimo preko generalisane koordinate x možemo da napišemo sledeće:

$$v = \dot{x} = \sqrt{v_0^2 + 2gx\left(1 - \mu\, ctg\alpha\right)\sin\alpha}$$

Prethodnim obrascima smo odredili brzinu materijalne tačke u funkciji generalisane koordinate za vreme njenog kretanja po strmoj hrapavoj ravni koeficijenta trenja μ. Brzina materijalne tačke v_M u položaju M, tački prelaska sa strme hrapave ravni na cilindričnu glatku površ je:

$$v_M = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0\left(1 - \mu\, ctg\alpha\right)}$$

Za drugu fazu kretanja materijalne tačke po cilindričnoj glatkoj površi sistem ima, takodje, jedan stepen slobode kretanja, i za tu fazu kretanja za generalisanu koordinatu izaberimo centralni ugao, koji poluprečnik, koji prolazi kroz tačku u kojoj je materijalna tačka i centar krivine cilindrične površi (lukea) čini sa poluprečnikom kroz materijalnu tačku, kada je ona u položaju M, ulaska na cilindričnu površ. Tu generalisanu koordinatu smo obeležili sa φ. U toj fazi kretanja, za generalisanu koordinatu smo mogli izabrati i krivolinijsku koordinatu luk s, koji je sa prethodno izabranom generalisanom koordinatim vezan sledećom vezom: $s(\varphi) = R\varphi$. Da napomenemo, da za sistem sa jednim stepenom slobode kretanja, što smo ovde utvrdili, da samo jednu koordinatu možemo proglasiti (izabrati) za generalisanu, a ostale koordinate položaja sistema izraziti preko izabrane koordinate. Izbor generalisane koordinate se prepusta volji onoga ko rešava zadatak, ali od izbora generalisane koordinate nekada zavisi i ''elegantnost'' i kraći put rešavanja zadatka, o čemu je vazno voditi računa.

Brzina materijalne tačke u funkciji generalisane koordinate φ pri kretanju po cilindričnoj glatkoj površi je:

$$v_C = \frac{ds(\varphi)}{dt} = R\dot{\varphi}$$

Kinetička energija sistema je jednaka kinetičkoj energiji translacije materijalne tačke:

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2$$

Na sistem, i u ovoj fazi kretanja, od aktivnih sila na materijalnu tačku dejstvuje samo sila Zemljine teže, koja je konzervativna sila i ima funkciju sile, odnosno potencijal. Potencijalna energija sistema je:

$$\mathbf{E_p} = -mgh = mgR[\cos\alpha - \cos(\alpha - \varphi)]$$

i izražena je pomoću koordinate h u pravcu vertikale, ili pomoću koordinate φ koju smo izabrali za generalisanu koordinatu, jer se napadna tačka sile težine materijalne tačke spušta za

$$(\downarrow)\, h = R[\cos(\alpha - \varphi) - \cos\alpha]$$

što je uočljivo sa slike. Mogli smo umesto koordinate φ za generalisanu koordinatu izabrati koordinatu s u pravcu luka poluprečnika R putanje koju opisuje materijalna tačka pri kretanju po cilindričnoj glatkoj površi. Tada je izraz za potencijalu energiju:

$$\mathbf{E_p} = -mgh = mgR\left[\cos\alpha - \cos\left(\alpha - \frac{s}{R}\right)\right]$$

Kako se zadatkom, i u ovoj fazi kretanja, traži brzina v kretanja materijalne tačke po cilindričnoj glatkoj površi, koristićemo integral energije, odnosno teoremu o ukupnoj mehanučkoj energiji sistema, koja je konstantna za konzervativne sisteme i jednaka ukupnoj mehaničkoj energiji sistema koju je sistem imao u poetnom trenutku kretanja, a ovde je to ukupna mehanička energija materijalne tačke pri ulasku u na cilindričnu glatku površ. Na osnovu toga pišemo da je:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}M} + \mathbf{E}_{\mathbf{p}M} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}0} + \mathbf{E}_{\mathbf{p}0} + \mathbf{A}^{F_\mu}$$

ili

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}M} + \mathbf{E}_{\mathbf{p}M} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}0} + \mathbf{E}_{\mathbf{p}0} + (-\mu mg\cos\alpha)\frac{h_0}{\sin\alpha}$$

ili

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} - \mathbf{A}^{F_\mu} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}0} + \mathbf{E}_{\mathbf{p}0}$$

ili

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}0} + \mathbf{E}_{\mathbf{p}0} + \mathbf{A}^{F_\mu} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}M} + \mathbf{E}_{\mathbf{p}M}$$

odnosno:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \frac{1}{2}mv^2 - mgR[\cos\alpha - \cos(\alpha - \varphi)] = \mathbf{E}_{\mathbf{k}0} + \mathbf{E}_{\mathbf{p}0} + \mathbf{A}^{F_\mu} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 + (-\mu mg\cos\alpha)\frac{h_0}{\sin\alpha}$$

ili

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \frac{1}{2}mv^2 - mgR[\cos\alpha - \cos(\alpha - \varphi)] = \mathbf{E}_{\mathbf{k}M} + \mathbf{E}_{\mathbf{p}M} + \mathbf{A}^{F_\mu} = \frac{1}{2}mv_M^2$$

odakle sledi da je:

$$v_C^2 = v_{C0}^2 + 2gh_0(1 - \mu ctg\alpha) - 2gR[\cos\alpha - \cos(\alpha - \varphi)]$$

odnosno

$$v = \sqrt{v_{C0}^2 + 2gh_0(1 - \mu ctg\alpha) - 2gR[\cos\alpha - \cos(\alpha - \varphi)]}$$

Ako prethodnu vezu izrazimo preko luka - krivolinijske koordinate s možemo da napišemo sledeće:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1 - \mu ctg\alpha) - 2gR\left[\cos\alpha - \cos\left(\alpha - \frac{s}{R}\right)\right]}$$

Prethodnim obrascima smo odredili brzinu materijalne tačke u funkciji generalisane koordinate za vreme kretanja materijalne tačke po cilindričnoj površi. Brzina materijalne tečke v_B u položaju B, tački njenog izlaska sa cilindrične površi i prelaska na slobodno kretanje u vertikalnoj ravni je:

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1 - \mu ctg\alpha) - 2gR[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}$$

U trećoj fazi kretanja materijalna tačka ima dva stepena slobode kretanja, jer se kreće u vertikalnoj ravni izvodeći ravansko kretanje početnom brzinom

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1 - \mu ctg\alpha) - 2gR[\cos\alpha - \cos 2\alpha]},$$

i u pravcu pod uglom 2α u odnosu na horizont.

Za generalisane koordinate u trećoj fai kretanja materijalne tačke, sada takodje ravanskog kretanja, ali sa dva stepena slobode kretanja u vertikalnoj ravni za generalisane koordinate biramo dve koordinate njenog pomeranja, u dva ortogonalna pravca x i y u horizontalnom i vertikalnom i u vertikalnoj ravi. Na materijalnu tačku dejstvuje samo aktivna sila sopstvene težine mg. Diferencijalne jednačine ravanskog kretanja materijalne tačke u vertikalnoj ravni i sa dva stepena slobode kretanja su:

$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = -mg$$

odnosno

$$\ddot{x} = 0$$
$$\ddot{y} = -g$$

Integraljenjem diferencijalnih jednačina prethodnog sistema dobijamo sledeće:

$$\dot{x} = C_1$$
$$\dot{y} = -gt + C_2$$

Još jednim integraljenjem diferencijalnih jednačina prethodnog sistema dobijamo sledeće:

$$x(t) = C_1 t + C_3$$
$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + C_2 t + C_4$$

U prethodnim jednačinama pojavilo se šest integracionih konstanti, koje treba odrediti iz pčetnih uslova.

$$x(0) = 0$$
$$y(0) = 0$$
$$\dot{x}(0) = v_B \cos 2\alpha = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) - 2gR[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}\cos 2\alpha$$
$$\dot{y}(0) = v_B \sin 2\alpha = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) - 2gR[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}\sin 2\alpha$$

Iz početnih uslova sledi:

$$C_4 = 0,\ C_3 = 0,$$
$$C_1 = v_B \cos 2\alpha = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) - 2gR[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}\cos 2\alpha$$
$$C_2 = v_B \sin 2\alpha = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) - 2gR[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}\sin 2\alpha$$

Jednačine kretanja materijalne tačke su sada:

$$x(t) = v_B t\cos 2\alpha == t\sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) - 2gR[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}\cos 2\alpha$$
$$y(t) = v_B t \sin 2\alpha - g\frac{t^2}{2} = -g\frac{t^2}{2} + t\sqrt{v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) - 2gR[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}\sin 2\alpha$$

Maksimalma visina, koju materijalna tačka dostiže u trenutku, kada njena brzina ima samo horizontalnu komponentu, tj. kada je

$$\dot{y}(t_1) = v_B \sin 2\alpha - gt_1 = 0$$

a to se dostiže u trenutku t_1

$$t_1 = \frac{v_B \sin 2\alpha}{g}$$

U tom trenutku t_1 koordinate materijalne tačke su:

$$x(t_1) = \frac{v_B^2}{2g}\sin 4\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{2g}\left[v_{C0}^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) - 2gR[\cos\alpha - \cos 2\alpha]\right]$$
$$y_{MAX} = y(t_1) = \frac{v_B^2}{2g}\sin^2 2\alpha = \frac{\sin^2 2\alpha}{2g}\left[v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) - 2gR[\cos\alpha - \cos 2\alpha]\right]$$

Razlika u visini položaja materijalne tačke pri ulasku u cilindričnu površ i izlaska sa iste je:

$$a = R(\cos\alpha - \cos 2\alpha)$$

Sada možemo odrediti maksimalnu visinu H_{C-MAX} na koju će dospeti materijalna tačka:

$$H_{MAX} = a + y_{MAX} = a + y(t_1) = R(\cos\alpha - \cos 2\alpha) + \frac{v_B^2}{2g}\sin^2 2\alpha$$

$$H_{MAX} = R(\cos\alpha - \cos 2\alpha) + \frac{\sin^2 2\alpha}{2g}\left[v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) - 2gR[\cos\alpha - \cos 2\alpha]\right] > h_0$$

a to je visina veća od visine h_0 na kojoj je bila materijalna tačka, kada je ona puštena sa početnom brzion v_0 da se kreće po strmoj hrapavoj ravni. Da bi ovaj zaključak bio dobar, potrebano je da je zadovoljen uslov da je ugao α takav da materijalna taćka može da dospe u krajnju taćku B brzinom koja je veća od nule:

$$v_B^2 = v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) - 2gR[\cos\alpha - \cos 2\alpha] > 0$$

Odnosno potrebno je da je zadovoljen uslov:

$$\frac{1}{2g}v_{C0}^2 + h_0(1-\mu ctg\alpha) > R[\cos\alpha - \cos 2\alpha] = a$$

kao i da je sila pritiska materijalne tačke na cilindričnu površ veća ili najmanje jednaka nuli, kada je ona u položaju B.

Ako tražimo najveći domet na visini napuštanja cilindrične površim najveći domet materijalne tačke je kada je

$$y(t_2) = v_B t_2 \sin 2\alpha - g\frac{t_2^2}{2} = 0$$

Za taj slučaj trenutak vremena t_2 je:

$$t_2 = \frac{2v_B \sin 2\alpha}{g}$$

U tom trenutku t_2 koordinata $x(t_2)$ materijalne tačke je:

$$D_{MAX} = x_{MAX} = x(t_2) = \frac{v_B^2 \sin 4\alpha}{g} = \frac{\sin 4\alpha}{g}\left\{v_0^2 + 2gh_0(1-\mu ctg\alpha) - 2gR[\cos\alpha - \cos 2\alpha]\right\}$$

Ako se traži najveći domet na vidini h_0 na kojoj je bila materijalna tačka u početku kotrljanja po strmoj hrapavoj ravni, onda je potrebno odrediti vreme t_3 njenog dospeća na tu visinu po napuštanju cilindrične površi i odgovarajuću koordinatu $x(t_3)$. Na osnovu toga pišemo:

$$y(t_3) = h_0 - a = h_0 - R(\cos\alpha - \cos 2\alpha)$$

odnosno

$$y(t_3) = v_B t_3 \sin 2\alpha - g\frac{t_3^2}{2} = h_0 - a$$

pa dobijamo kvadratnu jednačinu :

$$g\frac{t_3^2}{2} - v_B t_3 \sin 2\alpha + h_0 - a = 0$$

$$t_3^2 - \frac{2}{g}v_B t_3 \sin 2\alpha + \frac{2}{g}(h_0 - a) = 0$$

iz koje odredjujemo korene, odnosno vreme t_3, dospeca materijalne tačke na početnu visinu h_0.

$$t_{3(1,2)} = \frac{1}{g}v_B \sin 2\alpha \mp \sqrt{\left(\frac{2}{g}v_B t_3 \sin 2\alpha\right)^2 - \frac{2}{g}(h_0 - a)}$$

Koristimo drugi koren ove kvadratne jednačine, koji odgovara dužem vremenskom intervalu, jer prvo vreme dospeća materijalne tačke na visinu h_0, sa koordinatom x manjom nego prilikom dospeća na tu visinu za drugo vreme, koje odgovara drugom korenu. Ova dva korena ukazuju da će se materijalna tačka naći dva puta na visini na kojoj je bila u poetku kretanja niz strmu hrapavu ravan. Maksimalnom dometu odgovara vreme:

$$t_{3(2)} = \frac{1}{g}v_B \sin 2\alpha + \sqrt{\left(\frac{2}{g}v_{CB} t_3 \sin 2\alpha\right)^2 - \frac{2}{g}(h_0 - a)}$$

Sada najveći domet na nivou nivoa početnog položaja materijalne tačke je:

$$D_{MAX}\left(t_{3(2)}\right)=\frac{h_0}{tg\alpha}+R(\sin\alpha+\sin 2\alpha)+x\left(t_{3(2)}\right)$$

gde je:

$$x\left(t_{3(2)}\right)=v_B t_{3(2)}\cos 2\alpha=\frac{v_B^2\sin 4\alpha}{g}+v_B\cos 2\alpha\sqrt{\left(\frac{2}{g}v_B t_3\sin 2\alpha\right)^2-\frac{2}{g}(h_0-a)}$$

$$v_B=\sqrt{v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-2gR[\cos\alpha-\cos 2\alpha]}$$

$$a=R(\cos\alpha-\cos 2\alpha)$$

Da bi smo odredili uslov pod kojim će za zadate početne uslove materijalna tačka dospeti u krajnjnji položaj B cilindrične površi, tako da njena brzina bude veća od nule, i ne neapusti vezu pre dospeća u njen kraj B, potrebno je da odredimo silu pritiska materijalne tačke na cilindričnu površ po kojoj se kreće. Taj pritisak, odnosno otpor veze-cilindrične površi mra biti veći od nile, da bi veza - cilindrična površ imala svojstvo obostrano zadržavajuće veze. U trenutku i položaju kada pritisak materijalne tačke na cilindričnu površ postane jednak nuli, dolazi do pojave svojstva veze da je jednostrano zadržavajuća i materijalna tačka se odvaja od te veze i napusta istu.

Da bi smo odredili silu pritiska materijalne tačke na cilindričnu površ oslobodimo materijalnu tačku veza i umesto veza postavilo odgovarajuće reakcije veza. To su normalna komponenta otpora veze F_N upravna na putanju materijalne tačke. Sada koristimo princip dinamičke ravnoteže i pišemo jednačine ravnoteže sila u radijalnom i tangencijalnom pravcima. Na osnovu toga pišemo sledeće:

$$ma_T=mR\ddot{\varphi}=mg\sin(\alpha-\varphi)$$

$$ma_N=m\frac{v_C^2}{R}=mR\dot{\varphi}^2=F_N-mg\cos(\alpha-\varphi)$$

S obzirom da smo koristeći teoremu od ukupnoj mehaničkoj energiji sistema odredili brzinu v materijalne tačke, to ne moramo integraliti diferencijalne jednačine prethodnog sistema diferencijalnih jednačina, već ćemo koristiti samo drugu jednačinu iz koje dredjujemo otpor veze – cilindrične glatke površi u funkciji generalisane koordinate φ, kao i prethodno odredjen izraz za brzinu materijalne tačke, takodje u funkciji generalisane koordinate φ. Na osnovu toga dobijamo:

$$F_N=m\left[\frac{v_C^2}{R}+g\cos(\alpha-\varphi)\right]$$

a kako je:

$$v=\sqrt{v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-2gR[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi)]}$$

to sledi da je:

$$F_N=mg\cos(\alpha-\varphi)+\frac{m}{R}\left[v_{C0}^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-2gR[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi)]\right]$$

odnosno, posle sredjivanja za silu pritiska dobijamo sledeci izraz:

$$F_N=\frac{m}{R}\left[v_{C0}^2+2gh_0-2gR[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi)]+Rg\cos(\alpha-\varphi)\right]$$

Posle sredjivanja prethodnog izraza dobijamo sledeći izraz za silu pritiska materijalne tačke na cilindričnu površ, pri njenom kretanju po cilindričnoj površi:

$$F_N=\frac{m}{R}\left[v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-gR[2\cos\alpha-3\cos(\alpha-\varphi)]\right]$$

Diferencijalnu jednačinu kretanja materijalne tačke nije teško integraliti, jer razdvaja promenljive, na sledeći način:

$$\ddot{\varphi}-\frac{g}{R}\sin(\alpha-\varphi)=0$$

$$\ddot{\varphi}-\frac{g}{R}\sin(\alpha-\varphi)=0\quad / \quad 2\dot{\varphi}dt=2d\varphi$$

$$2\ddot{\varphi}\dot{\varphi}dt-\frac{gs}{R}in(\alpha-\varphi)2d\varphi=0$$

$$2\dot{\varphi}d\dot{\varphi}-\frac{g}{R}\sin(\alpha-\varphi)2d\varphi=0$$

$$\int_{\dot{\varphi}_M}^{\dot{\varphi}}2\dot{\varphi}d\dot{\varphi}-\frac{g}{R}\int_0^{\varphi}\sin(\alpha-\varphi)2d\varphi=0$$

Granice smo odredili od položaja pri ulasku u cilindričnu površ gde je ugao $\varphi=0$ do prouzvoljkon položaja odredjenog uglom φ, kada je ugaina brzina okretanja materijalne tačke oko centra krivine njene putanje O vezana sa njenom brzinom: $v=R\dot{\varphi}$. Posle naznačenog integraljenja dobijamo:

$$\dot{\varphi}^2-\dot{\varphi}_M^2+\frac{2g}{R}\left[\cos(\alpha-\varphi)-\cos\alpha\right]=0$$

odnosno

$$\dot{\varphi}^2=\dot{\varphi}_M^2-\frac{2g}{R}\left[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi)\right]$$

odnosno

$$R^2\dot{\varphi}^2=R^2\dot{\varphi}_M^2-2gR\left[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi)\right]$$

odnosno

$$v^2=v_M^2-2gR\left[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi)\right]$$

$$v=\sqrt{v_M^2-2gR\left[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi)\right]}$$

a kako je:

$$v_M=\sqrt{v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)}$$

to sledi da je:

$$v=\sqrt{v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-2gR\left[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi)\right]}$$

Vidimo da je ovaj izraz isti kao onaj koji smo dobili iz teoreme o ukupnoj mehaničkoj energiji konzervativnog sistema za fazu kretanja materijalne tačke po cilindričnoj glatkoj površi.

Sada da se vratimo na analizu intenziteta sile pritiska F_N za koju smo odredili sledeći izraz:

$$F_N=\frac{m}{R}\left[v_{C0}^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-gR\left[2\cos\alpha-3\cos(\alpha-\varphi)\right]\right]>0$$

Da se materijalna tačka nebi odvojila od od cilindrične glatke površi, koja je jednostrano zadržavajuća veza, ova sila pritiska mora da bude veća od nule. Iz tog uslova dobijamo sledeću relaciju:

$$v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)-gR\left[2\cos\alpha-3\cos(\alpha-\varphi)\right]>0$$

odnosno:

$$\frac{v_{C0}^2}{3Rg}+\frac{2h_0}{3R}-\frac{2}{3}\cos\alpha>-\cos(\alpha-\varphi)\le 1$$

Da bi postojao položaj u kome bi se materijalna tačka odvojila od cilindrične glatke površi potrebno je da je zadovoljena sledeća relacija

$$\frac{v_0^2}{3Rg}+\frac{2h_0(1-\mu ctg\alpha)}{3R}-\frac{2}{3}\cos\alpha>-\cos(\alpha-\varphi)\le 1$$

odakle sledi

$$\frac{v_0^2}{3Rg}+\frac{2h_0(1-\mu ctg\alpha)}{3R}-\frac{2}{3}\cos\alpha\le 1$$

odnosno

$$\cos\alpha\le\frac{3}{2}-\frac{v_0^2+2gh_0(1-\mu ctg\alpha)}{2Rg}$$

Ovo je uslov koji ograničava veličinu ugla α u odnosu na početnu brzinu materijalne tačke i visinu početnog položaja kretanja niz strum hrapavu raven, kao I koeficijenta trenja te ravni, da u fazi kretanja po cilindričnoj glatkoj površi nebi došlo do odvajanja materijalne tačke od nje i veza dejstvovala kao jednostrano zadržavajuća, odnosno nezadržavajuća.

Ako je zadovoljen uslov

$$F_N = \frac{m}{R}\left[v_{C0}^2 + 2gh_0\left(1-\mu ctg\alpha\right) - gR\left[2\cos\alpha - 3\cos(\alpha-\varphi)\right]\right] = 0$$

to dolazi do odvajanja materijalne tačke od cilindrične površi po kojoj se kreće, potrebno je odrediti i njenu brzinu pri odvajanju od veze:

Kako je

$$-\cos(\alpha-\varphi_K) = \frac{v_{C0}^2}{3Rg} + \frac{2h_0\left(1-\mu ctg\alpha\right)}{3R} - \frac{2}{3}\cos\alpha$$

to je brzina materijalne tačke kojom se ona odvaja od cilindrične površi, to dobijamo sledeći izraz:

$$v_K = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0\left(1-\mu ctg\alpha\right) - 2Rg\left[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi_K)\right]}$$

$$v_K = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 - 2Rg\left[\cos\alpha + \frac{v_{C0}^2}{3Rg} + \frac{2h_0}{3R} - \frac{2}{3}\cos\alpha\right]}$$

$$v_K = \sqrt{\frac{1}{3}v_0^2 + \frac{2}{3}gh_0\left(1-\mu ctg\alpha\right) - \frac{2}{3}Rg\cos\alpha}$$

$$v_0^2 + 2gh_0\left(1-\mu ctg\alpha\right) > 2Rg\cos\alpha$$

DRUGI ZADATAK. *Ma**terijalni sistem*** na slici 2. se sastoji od tri tanka homogena diska D_1, D_2 i D_3, masa i poluprečnika redom $4m, R$, $m, 2R$ i $4m, 2R$ kao što je to prikazano na slici 2. Preko prvog diska D_1, koji može da se lotrlja brz klizanja po strmoj ravni nagiba ugla α u odnosu na horizonat, namotano je, lako, nerastegljivo uže, koje je zatim prebačeno preko drugog diska D_2, čiji je centar masa C_2 zglobno vezan za nepokretni oslonac, a čiji je drugi kraj namotan na treći disk D_3, mase i poluprečnika redom $4m, 2R$, koji ''visi'' na tom užetu u vertikalnom pravcu istovremeno se kotrljajući bez klizanja po po užetu koje se odmotava i kotrljajući se bez klizanja po vertikalnom zidu. Ceo sistem pri kretanju se se nalazi u vertikalnoj ravni i u polju Zemljine teže.

Odrediti:

a* broj stepeni slobode kretanja sistema i načiniti izbor generalisanih koordinata (ili koordinate) sistema;

b* sve koordinate položaja i konfiguracije sistema, kao i ugaone brzine diskova pomoću izabranih generalisanih koordinata sistema;

c* izraze za ***kinetičku i potencijalnu energiju sistema***. Da li se ukupna mehanička energija datog sistema menja u toku vremena i toku kretanja sistema? Da li je sistem konzervativan?

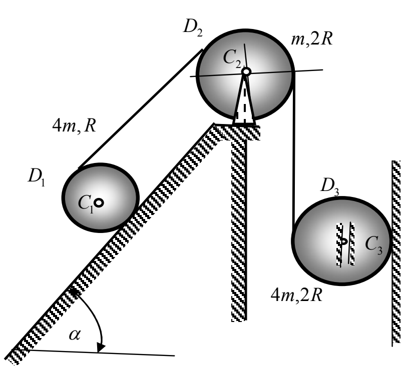
d* snagu rada sila koje dejstvuju na sistem;

e* napisati integral energije sistema;

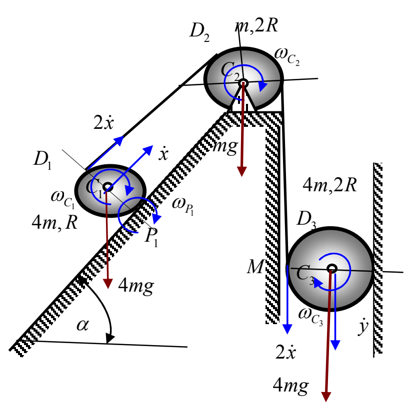
f* diferencijalne jednačine kretanja sistema pomoću generalisanih koordinata i Lagrage-ovih jednačina druge vrste. Koliki je najmanji broj diferencijalnih jednačina kretanja sistema? Odrediti ubrzanja sistema.

g* ubrzanja centra diska C_1;

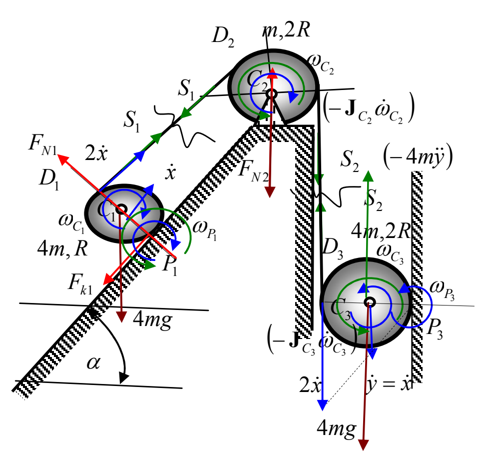
h* sile u užadima.



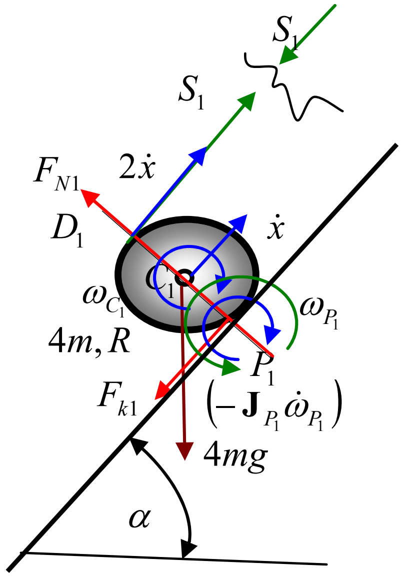
Slika 2.



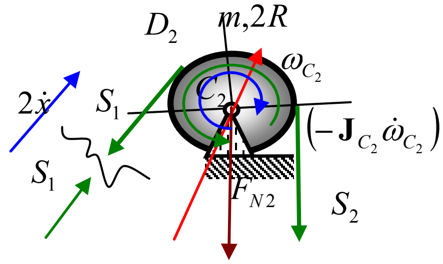
Slika 2. a*



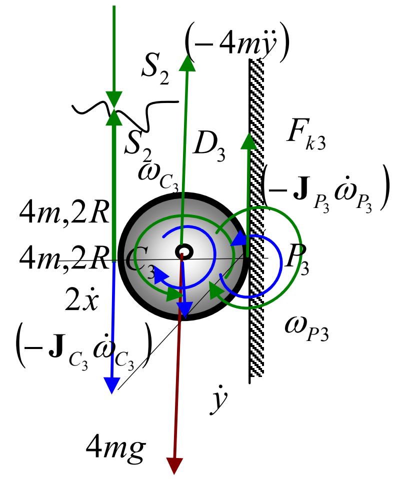
Slika 2. b*



Slika 2. c*



Slika 2. d*



Slika 2. e*

REŠENJE DRUGOG ZADATKA: Sistem ima jedan stepen slobode kretanja, jer disk koji se kotrlja bez klizanja po strmoj ravni, ostajući pri tome u vertikalnoj ravni ima jedan stepen slobode kretanja (detaljnije objasnjenje vidi u pocetku prvog zadatka) , a dok trećo disk ima takodje jedan stepen slobode kretanja u vertikalnoj ravni, iako visi na užetu nema dva stepena slobode kretanja jer se uže odmotava od istog, ali se istovremeno kotrlja bez klizanja po vertikalnoj ravi (letvi). Disk preko koga je prebaceno uže, ima takodje samo jedan stepen slobode kretanja-obrtanje oko zglobne veze u centru masa C_2, alo kako uže ne klizi po njegovom obimu, već se zajedno sa njim pomera istom brzinom obima, a to znači da u finalu ceo mehanički sistem ima samo jedan stepen slobode kretanja. To znači i da možemo izabrati samo jednu generalisanu (nezavisnu) koordinatu, a preko nje izraziti sve ostale koordinate položaja diskova pri kretanju sisema i u proizvoljnoj konfiguraciji. Za generalisanu koordinatu izaberimo koordinatu: x pomeranja centra masa prvog diska i usmerenu naviše i paralelnu strmoj ravni i vetikalnoj ravni, dok koordinatu y - pomeranje centra mese trećeg diska vertukalno naniže možemo izraziti preko već izabrane generalisane (nezavisne) koordinate.

Pomeranje centra mase trećeg diska smo označili sa y i kako je uže nerastegljivo to je brtina tačke na obimu u kojoj se uže odmotava od trećeg diska jednaka $v_M = 2\dot{x}$, dok je brzina nejgovog centra masa $v_{C_3} = \dot{y} = \dot{x}$. Položj trenutnoh pola P_3 brzine diska odredimo pomoću tačke njegovog dodira sa vertikalnom ravni po kojoj se kotrlja bez klizanja:

$$\omega_{P_3} = \frac{\dot{x}}{2r}$$

što je vidljivo sa slike 2.b* .

Sada je lako odrediti ugaonu brzinu ω_{C_3} obrtanja trećek diska oko ose kroz njegov centar masa C_3

$$\omega_{C_3} = \frac{v_M}{4r} = \frac{2\dot{x}}{4r} = \frac{\dot{x}}{2r} = \omega_{P_3}$$

Koordinatu položaja drugog diska sa centrom u C_2 oko koga se obrće označimo sa φ_{C_2}, a ugaonu brzinu njegovog obrtanja označimo sa $\omega_{C_2} = \dot{\varphi}_{C_2}$. Imajući u vidu da je obimna brzina tačke na obimu tog diska jednaka brzini užete to sledi da je njegova ugaona brzina jednaka

$$\omega_{C_2} = \dot{\varphi}_{C_2} = \frac{2\dot{x}}{2r} = \frac{\dot{x}}{r}$$

Ugaona brzina ω_{C_1} obrtanja prvog diska oko ose, upravne na vertikalnu ravan i ravan diska, kroz njegov centar masa C_1, odnosno, ugaona brzina ω_{P_1} oko paralelne ode kroz trenutni pol brzine u P_1 oko koga se u svakom trenutku obrne disk kortljajući se bez klizanja po strmoj ravni je

$$\omega_{P_1} = \omega_{C_1} = \frac{\dot{x}}{r}$$

Treba uočiti da se taj trenutni pol P_1 pomera po strmoj ravni, ali kako je disk osnosimetrican, a odgovarajuća tačka na konturi diska u kojoj se tokom njegovog kotreljanja bez klizanja po stmoj ravni dodiruje sa njim. To znači da se osa trenutne rotacije pomera i po konturi diska, ali je moment inercije diska za taj sistem osa uvek isti i konstantan pa se ta osobina može koristiti pri pisanju jednačina dinamike diska, što ne bi bio slučaj da kontura nije krug (tanki cilindar), a disk je homogen i sa centom masa u centru konture.

Aksijalni moment inercije mase prvog diska za horizontalnu osu kroz centar C_1 mase diska $\mathbf{J}_{\mathbf{C}_1}$, odnosno kroz trenutni pol brzine P_1, $\mathbf{J}_{P_1}$, a čija je masa $4m$ i poluprečnik r, su:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{C}_1} = \frac{4mr^2}{2} \quad \text{i} \quad \mathbf{J}_{P_1} = \frac{12mr^2}{2} = 6mr^2$$

Aksijalni moment inercije mase drugog diska za horizontalnu osu kroz centar C_2 mase diska $\mathbf{J}_{\mathbf{C}_2}$ je:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{C}_2} = \frac{4mr^2}{2} = 2mr^2$$

Aksijalni moment inercije mase trećeg diska za horizontalnu osu kroz centar C_3 mase diska $\mathbf{J}_{\mathbf{C}_3}$, odnosno $\mathbf{J}_{P_3}$ za osu kroz prenutni pol brzine P_3 kroz je:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{C}_3} = \frac{4m(2r)^2}{2} = 8mr^2 \quad \text{i} \quad \mathbf{J}_{P_3} = 3\frac{4m(2r)^2}{2} = 24mr^2$$

Ukupna kinetička energija sistema jednaka je zbiru kinetičkih energija rotacije prvog diska oko njegove ose trenutne rotacije, kroz tačku P_3, pri kotrljanju bez klizanja po strmoj ravni , kinetičke energije rotacije drugog diska oko ose kroz njegov centar masa i kinetičke energije translacije trećeg diska brzinom centra masa C_3 i kinetičke energije rotacije trećeg diska oko ose kroz njegov centar masa C_3 (ili kinetičke energije rotacije trećeg diska oko trenutne ose rotacije kroz tačku P_3:

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P_1}\omega_{P_1}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C_2}\omega_{C_2}^2 + 4m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C_3}\omega_{C_3}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P_1}\omega_{P_1}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C_2}\omega_{C_2}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P_3}\omega_{P_3}^2 = 7m\dot{x}^2$$

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}6mr^2\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}2mr^2\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}24mr^2\left(\frac{\dot{x}}{2r}\right)^2 = (3+1+3) = 7m\dot{x}^2$$

Na sistem od aktivnih sila dejstvuju sile težine diskova, ali sila težine drugog diska ne vrši nikakav rad jer se njena napadna tačka ne pomera u vertikalnom pravcu, pa je rad nula, a promena potencijalne eenergije je takodje jednaka nuli. Promena potencijalne energije sistema od dejstva sile težine $4mg$ prvog diska je različita od nule, jer se napadna tačka te sile težine podiže za $x\sin\alpha$, dok se napadna tačka sile težine $4mg$ ttrećeg diska spišta za $y = x$, te se potencijalna energija sistema smanjuje. Ukupna promena potencijalne energije posmatranog materijalnog sistema je sada:

$$\mathbf{E_p} = 4mgx\sin\alpha - 4mgy = 4mg(\sin\alpha - 1)x$$

Kako na sistem dejstvuju samo aktivne sile koje su konzervativne, to je ukupna mehanička energija sistema konstantna i jednaka onoj koju je sistem imao u početnom trenutku kretanja sistema:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \mathbf{E_0} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}}$$

$$7m\dot{x}^2 + 4mgx(\sin\alpha - 1) = \mathbf{E_0} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E}_{Po} = const$$

Ovo je i integral energije.

Diferenciranjem po vremenu dobijamo diferencijalnu jednačinu kretanja u sledećem obliku:

$$\frac{d(\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p})}{dt} = 0$$

$$14m\dot{x}\ddot{x} + 4mg\dot{x}(\sin\alpha - 1) = 0$$

odnosno

$$7\ddot{x} + 2g(\sin\alpha - 1) = 0$$

Iz poslednje diferencijalne jednačine odredjujemo ubrzanje sistema u obliku

$$\ddot{x} = \frac{2}{7} g(1 - \sin\alpha)$$

Snaga rada neke sile koja dejstvuje na telo se izražava pomoću skalarnoh proizvoda sile i brzine kretanja materijalne tačke na koju dejstvuje ta sila. $P = (\vec{F}, \vec{v})$.

Snaga rada aktivnih sila koje dejstvuju na posmatrani materijalni system pojedinačno je:

$$P_1 = -4mg\dot{x}\sin\alpha$$

$$P_2 = 2mgv_{C_2} = 0$$

$$P_3 = 4mg\dot{y} = 4mg\dot{x}$$

Snaga rada sila inercije koje dejstvuju na posmatrani sistem je:

$P_{11,j} = -\mathbf{J}_{P_1}\dot{\omega}_{P_1}\omega_{P_1} = -6m\dot{x}\ddot{x}$ snaga rada sila inercije rotacije prvog diska

$P_{22,j} = -\mathbf{J}_{C_2}\dot{\omega}_{C_2}\omega_{C_2} = -2m\dot{x}\ddot{x}$ snaga rada sila inercije rotacije drugog diska

$P_{33,jR} = -\mathbf{J}_{P_3}\dot{\omega}_{P_3}\omega_{C_3} = -24mr^2\left(\frac{\ddot{x}}{2r}\right)\left(\frac{\dot{x}}{2r}\right) = -6m\dot{x}\ddot{x}$ snaga rada sila inercije rotacije trećeg diska

S obzirom da se radi o idealnim vezama i konzervativnom sistemu, to je snaga rada otpora idealnih veza jednaka nuli, jer su brzine u tangencijalnom pravcu na veze, a otpori idealnih veza upravni na brzine, pa je snaga rada tih sila jednaka nuli. S obzirom da je sistem konzervativan, a ukupna energija sistema konstantna, to je ukupna snaga rada svih sisal sistema jednaka nuli.

$$\frac{d(\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p})}{dt} = P = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i, \vec{v}_i) = 0$$

$$\frac{d(\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p})}{dt} = P = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i, \vec{v}_i) = P_1 + P_2 + P_3 + P_{11,j} + P_{22,j} + P_{33,jN} = 0$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_{11,j} + P_{22,j} + P_{33,j} = \dot{x}(-14\ddot{x} - 4g(\sin\alpha - 1)) = 0$$

Da bi smo odredili sile u užadima, napravićemo dekompoziciju sistema na sastavne proste podsisteme-diskove ’’presecanjem’’ užadi i zamenom užadi parovima suprotnih sila u užadima. Zatim ćemo na osnovu principa dinamičke ravnoteže za svaki od podsistema napisati jednačine ravnoteže sila uključujućo i aktivne i reaktivne sile, kao i sile inercije. Iz tih jednačina odredjujemo nepoznate sile u užadima , kao i odgovarajuće sile inercije. Medjutim kako smo već odredili ubrzanja sistema, dovoljno je iz tih sistema koristiti samo one jednačine koje su potrebne da odredimo nepoznate sile u uzadima i jos jednu kojom ćemo proveriti tačnost odredjenih sila u užadima.

Primenjujući princip dinamičke ravnoteže za dinamikčku ravnotežu trećeg diska, na koji dejtvuje aktivna sila težine $4mg$, sila inercije $-4m\ddot{y}$ translacije diska i moment sila inercije $\mathbf{J}_{C_3}\dot{\omega}_{C_3}$ rotacije diska oko ose kroz njegov centar masa i sila veze – sila u užetu S_2, kao sila kotrljanja bez klizanja diska po vertikalnoj ravni F_{k3}, dobijamo sledeće dve jednačine ravanskog kretanja diska ’ translacije ili rotacije:

$$4m\ddot{x} = 4mg - S_2 - F_{k3}$$

$$\mathbf{J}_{C_3}\dot{\omega}_{C_3} = 2rS_2 - F_{k3}2r$$

ili jednu jednačinu rotacije diska oko ose trenutne rotacije:

$$\mathbf{J}_{P_3}\dot{\omega}_{P_3} = 4mg2r - 2rS_2$$

Iz prethodnog sistena jednačina, s obzirom da smo već ranije odredili ubrzanja sistema a medju njima i $\ddot{x} = \frac{2}{7} g(1 - \sin\alpha)$, nije teško dobiti silu u delu užeta koje namotano na treći disk i ’’nosi’’ taj disk koji se po njemu odmotava, kao i kotrlja bey klizanja po vertikalnoj ravni (letvi) , kao i proveriti tačnost dobijenog izraza:

$$S_2 = \frac{2}{7} mg(4 + 3\sin\alpha)$$

Primenjujući princip dinamičke ravnoteže za dinamikčku ravnotežu drugog diska, koji se obrće oko svog centra masa C_2, a na koji dejtvuju dve obimne sile S_1 i S_2 u delovima užadi čineći momente obrtanja, kao i sile inercije koje redukovane na centar masa C_2, takodje čine jedan spreg momenta $-\mathbf{J}_{C_2}\ddot{\varphi}_{C_2}$, kao i sila težine i sila otpora zgloba u C_2 koje pročaze kroz isti pa je njihov moment jednak nuli, možemo da napišemo sledeću jednačinu dinamičke ravnoteže momenata oko ose kroz centar masa C_2 tog diska:

$$\mathbf{J}_{C_2}\ddot{\varphi}_{C_2} = (S_2 - S_1)2r$$

Iz prethodne jednačine, a kako smo već odredili silu u drugom delu užeta $S_2 = \frac{2}{7}mg(4+3\sin\alpha)$, nije teško odrediti silu S_1 u prvom delu nerastegljivog užeta u sledećem obliku:

$$S_1 = \frac{2}{7}mg(3+4\sin\alpha)$$

Time smo odredili obe nepoznate sile u pojedinim delovima užadi. Ostaje nam još da proverimo tačnost, dobijenih izraza, a to možemo uraditi primenom principa dinamičke ravnoteže na dinamičku ravnotežu prvog diska. Na prvi disk koji je kotrlja bez klizanja po stmoj ravni dejstvuju sledeće sile: sula težine $4mg$, sila u prvom delu užeta S_1, sila ozpora strme ravni F_{N1}, sila otpora kotrljanju bez klizanja F_{k1} i sile inercije od translacije i rotacije, koje kada se redukuju na trenutni pol P_1 brzina (rotacije diska oko trenutne ose rotacije) cine spreg momenta $-\mathbf{J}_{P_1}\dot{\omega}_{P_1}$. Sila otpora strme ravni i sila otpora kotrljanju diska bez klizanja prolaze kroz tu tačku pa je njihov moment sila za tu tačku P_1 jednak nuli. Jednačina dinamičke ravnoteže momenata sila za prenutni pol P_1 daje sledeće:

$$\mathbf{J}_{P_1}\dot{\omega}_{P_1} = S_1 \cdot 2r - 4mg\sin\alpha \cdot r$$

A kako je $\ddot{x} = \frac{2}{7}g(1-\sin\alpha)$, iz prethodne jednačine dobijamo da je:

$$S_1 = \frac{\mathbf{J}_{P_1}\dot{\omega}_{P_1} + 4mg\sin\alpha\cdot r}{2r} = 6mr^2\frac{\ddot{x}}{r}\frac{1}{2r} - 2mg\sin\alpha = 3m\frac{2}{7}g(1-\sin\alpha) + 2mg\sin\alpha = \frac{2}{7}mg(3+4\sin\alpha)$$

$$S_1 = \frac{2}{7}mg(3+4\sin\alpha)$$

čime smo potvrdili tačnost prethodno dobijenih izraza za sile u užadima i ubrzanja sistema.

TREĆI ZADATAK. Na slici 3. prikazana je homogena tanka pločica, мace M, konture $AECDBKLMHPQRSTU$, a oblika slova M i dimanzija izraženih preko parametra dužine a i konture kao na slici i prikazano. Težište cele plocice je u temenu C konture pločoce, koje je ne udaljenju $h = ?$ od ose vratila. Pločica je kruto učvršćena na lakom vratilu, tako da je osa vratila na istom pravcu kao i deo konturne ivice pločice. Vratilo je sa ležištima, nepokretnim u A i cilindričnim u B, na međusobnom rastojanju $4a$. Odrediti:

a* period oscilovanja pločice oko ose vratila, kada je ta osa horizontalna.

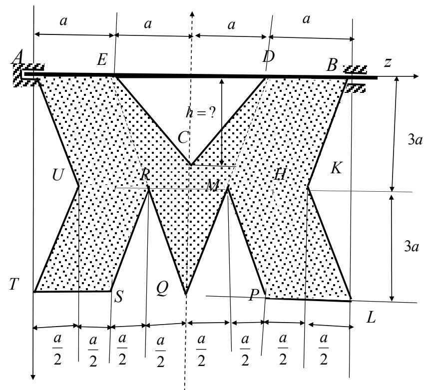
b*kolika treba da je masa materijalnih tačaka m, koje treba dodati na lakim krutim štapovima zanemarljive mase, dužine ℓ da bi pločica oko horizontalne ose vratila bila uravnotežena, slika 3.b *? Da li dužina štapa-prepusta ℓ treba da zadovoljava neki uslov? Da li bi pločica bila uravnotežena ako bi se obrtala oko ose vratila, koja nije horizonatalno,? Obrazloži odgovor!

c* vektor momenta inercije mase tela za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu A;

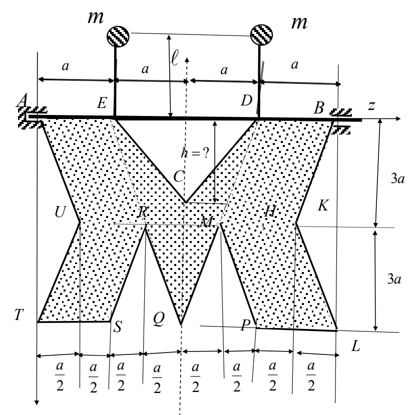
d* kinetičke pritiske na ležošta vratila za slučaj rotacije polčice slučaj rotacije pločice jenakoubrzano oko horizontalne ose (na slici 3. a*) početnom ugaonom brzinom ω_0 i ugaonim ubrzawem ε_0;

e* devijacioni spreg koji desjtvuje na ležošta vratila za slučaj jenakoubrzanog obrtanja oko horizontalne ose (na slici 3. a*);

f* intenzitet vektora rotatora za taj slučaj.



Slika 3. a*

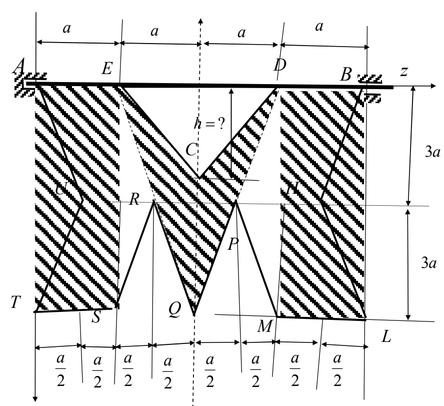


Slika 3. b*

REŠENJE TREĆEG ZADATKA. Pre nego štp predjemo na rešavanje konkretnog zadatka, potrebno je odrediti visinu $h = ?$ izvadjenog trougla iz uslova da je težište posmatrane pločice u temenu tog trougla , odnosno da je $y_C = h = ?$.

$$y_C = h = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = h$$

Da bi smo zatak pojednostavili napravićemo analizu moguće dekompozivije površine pločice koristeći osobinu da se statički moment površine za neku osu ne menja ako delove te površine pomeramo paralelno toj osi ne menjajući rastojanje težišta delova te površine od ose. Na slikama 3.c* i d* prikazano je kako se translacijom može površina pločice u odnosu na osu oscilovanja pločice transformisati u dva jednaka pravougaonika i dva trougla od čega je manji izvadjen iz većeg. Tako transformisana površina pločice omogućava nam da jednostavnijom računicom odredimo rastojanje tešišta pločice od ose rotacije, kao i njen aksijalni moment inercije za tu osu, a kako ovom translacijom nismo promenili položaj težišta pločice u odnosu na dve ose -osu rotacije i na nju upravnu kroz nepokretno ležište vratila , a ni u odnosu na osu simetrije to i devijacioni moment masa nije teško odrediti.



Slika 3. c*

Na osnovu prethodne analize možemo da napišemo sledeće:

$$y_C = h = \frac{\sum_{i=1}^{4} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{4} A_i} = \frac{6a^2 2a - ah\dfrac{h}{3} + 2\cdot 6a^2 3a}{6a^2 - ah + 2\cdot 6a^2} = h$$

$$h\left(18a^2 - ah\right) = 48a^2 a - ah\frac{h}{3}$$

$$3h(18a-h)=144a^2-h^2$$
$$54ah-3h^2-144a^2+h^2=0$$
$$54ah-2h^2-144a^2=0$$
$$2h^2-54ah+144a^2=0$$

odakle dobijamo sledeću kvadratnu jednačinu po nepoznatoj visini $h=?$ manjeg trougla:

$$2h^2-54ah+144a^2=0$$
$$h^2-27ah+72a^2=0$$

Koreni te kvadratne jednačine su:

$$h_{1,2}=\frac{27a\mp a\sqrt{27^2-4\cdot 72}}{2}=\frac{27a\mp a\sqrt{3^2 9^2-4\cdot 8\cdot 3^2}}{2}=\frac{27a\mp 3a\sqrt{81-32}}{2}=\frac{27a\mp 3a\sqrt{49}}{2}$$

$$h_{1,2}=\frac{27}{2}a\mp\frac{21}{2}a=\begin{cases}3a\\24a\end{cases}$$

Od dva dobijena korena, vidimo da prvi, manji koren odgovara realno pločici, dok drugi koren predstavlja degeneraciju pločice menjanjem njenog oblika koture, pa nije za naš slučaj prihvatljivo, ali i neupotrebljivo za nas postavljen zadatak. Promenilo bi konturu pločice.

Da bi smo odredili period oscilovanja pločoce potrebno je da odredimo aksijalni moment inercije pločice za osu oscilovanja. Koristimo transformisanu pločicu, pa je lako odrediti taj traženi moment inercije koristeći aksijalni moment inercije za dva pravougaonika i za osu kroz njihovu osnovicu i za dva trougla. Kako oba knturna trogla pločice imaju osnovice na zajedničkoj osi oscilovanja pločice kao fizičkog klatna, pa je lako odrediti aksijalni moment inercije pločice koisteći aksijalne momente inercije površina trouglova za ose koje prolaze pravcem osnovice trougla i dobijeni rezutat pomnožiti površinskom gustinom homogene pločice.

Površina pločice je sada:

$$A=2\cdot 6a^2+6a^2-3a^2=16a^2$$

Površinska gustna pločice je:

$$\rho=\frac{M}{A}=\frac{M}{16a^2}$$

$$\mathbf{J}_u=\rho\left(2I_u^{\mathrm{Pr}}+I_u^{\Delta_1}-I_u^{\Delta_1}\right)=\frac{M}{16a^2}\left\{\frac{1}{3}2a(6a)^3+\frac{1}{12}\left[2a(6a)^3-2a(3a)^3\right]\right\}$$

$$\mathbf{J}_u=\frac{351Ma^2}{32}$$

Redukovana dužina fizičkog klatna je:

$$\ell_r=\frac{\mathbf{J}_u}{My_C}=\frac{117a}{32}$$

Kružna frekvencija malih oscilacija pločice oko ose u je:

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell_r}}=\sqrt{\frac{32g}{117a}}$$

Dok je period oscilovanja za male elongacije:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{117a}{32g}}$$

Vektor momenta inercije mase pločice za pol u neporetnom ležištu vratila i osu rotacije pločice i vratila ima kolinearni deo sa osom, koji je jednak aksijalnom momentu inercije $\mathbf{J}_u$ mase pločice za tu osu i devijacioni deo koji je upravan na osu i leži u devijacionoj ravni za tu pločicu i osu i pol u nepokretnom lištu, a jednak je centifugalnom momentu za par osa od kojih je jedna osa rotacije, a druga osa upravna na istu a kroz nepokretno ležište. S obzirom da smo postavili ravan pločice u ravni $u-v$ to treba odrediti centrifugalni moment pločice za te dve ose. Imajući u vidu da pločica ima jednu osu aksijalne simetrije, koja prolazi kroz centar masa pločice (težište) to je centrifugalni moment masa pločice za te centralne ose (jedna osa simetrije) jednak nuli, pa je za odredjivanje devijacionog dela vektora momenta inercije mase za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu dovoljno odrediti položajni deo koji je jednak proivodu mase pločice i koordinata njenog težišta u odnosu na taj sistem koordinata. Na osnovu toga pišemo:

$$\mathbf{J}_{Auv} = \mathbf{J}_{Cuv} + My_C u_C = 6Ma^2$$

Vektor momenta inercije mase za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu A je sada:

$$\vec{\mathfrak{J}}_A^{(\vec{u})} = \mathbf{J}_u \vec{u} + \mathbf{D}_{uv}\vec{v} = \frac{117}{32}Ma^2\vec{u} + 6Ma^2\vec{v} = \mathbf{J}_u\vec{u} + \vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}$$

Devijacioni deo vektora momenta inercije mase za pol u neporetnom ležištu vratila i osu rotacje je:

$$\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})} = 6Ma^2\vec{v}$$

Prema teoriji uz korišćenje vektora momenata masa dobili smo (vidi predavanja) da su kinetički pritisci na ležišta vratila:

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_{A(dev)} = \frac{1}{r_{AB}}\left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}\right|\mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_{01} = \frac{1}{r_{AB}}\left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_{01}\sqrt{\dot{\omega}^2+\omega^4}$$

$$\vec{F}_{A(S-dev)} = \left|\vec{\mathfrak{S}}_A^{(\vec{u})}\right|\mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_{02} = \left|\vec{\mathfrak{S}}_A^{(\vec{u})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_{02}\sqrt{\dot{\omega}^2+\omega^4}$$

dok je devijacioni spreg intenziteta

$$\mathfrak{M}_{dev} = \left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}\right|\mathfrak{R} = \left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}\right|\sqrt{\dot{\omega}^2+\omega^4}$$

Kako je zadato da se vratilo i pločica obrću jednoliko ubrzano početnom ugaonom brzinom ω_0 i ugaonim ubrzawem ε_0 , to nije teško dobiti kinetičke pritiske i devijacioni spreg koji dejstvuju na ležista vratila pločice. Za posmatrani slučaj u kinetički pritisci na ležišta vratila:

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_{A(dev)} = \frac{3}{2}Ma\sqrt{\varepsilon_0^2+(\varepsilon_0 t+\omega_0)^4}\,\vec{\mathfrak{R}}_{01}$$

$$\vec{F}_{A(S-dev)} = 3Ma\sqrt{\varepsilon_0^2+(\varepsilon_0 t+\omega_0)^4}\,\vec{\mathfrak{R}}_{02}$$

dok je devijacioni spreg intenziteta

$$\mathfrak{M}_{dev} = \frac{3}{2}Ma^2\sqrt{\varepsilon_0^2+(\varepsilon_0 t+\omega_0)^4}$$

Uslov da je materijalni sistem koji se sastoji od prethodno definisane pločice i dve dodate materijalne tačke na lakim prepustima je da je centar masa pločice na osi rotacije, i da je osa rotacije glavna osa inercije za pol u nepokretnom ležištu, odnosno da je centrifugalni devijacioni deo vektora momenta inercije mase materijalnog tela za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu kolinearan sa osom, odnosno da je devijacioni deo jednak nuli.

Na osnovu ovoga pišemo tri uslova od kojih se dva svode na isti uslov za slučaj da je ceo sistem u jednoj ravni, uključujući i osu rotacije.

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = 0$$

$$\mathbf{D}_{uv} = 0$$

$$\mathbf{J}_{u1}^{\ell} = \mathbf{J}_{u2}^{d}$$

Za naš konkretni zadatak dobijamo sledeća dva uslova:

$$2m\ell = 3Ma$$

$$2m\ell^2 = \frac{351}{32}Ma^2$$

Na osnovu tih uslova dobijamo da je uslov uravnoteženja posmatranog materijalnog objekta da je

$$m = \frac{1}{78}M$$

$$\ell = 117a$$

Напомена: *Писмени део испита траје 4 сата. Дозвољено је коришћење само штампане литературе (уџбеник и таблице). Студенти који имају одложен усмени део испита дужни су да то видно означе на корицама писменог задатка, заједно са бројем поена, као и подацима о испитном року у коме су стекли то право. Такође,* ***НАПОМИЊЕМО*** *да је студент који има одложен усмени део испита* ***обавезан да ради писмени део испита и у испитном року у коме ће полагати усмени део испита*** *и да се труди да исти што боље уради.*

Писмени део испита је елиминаторан. Студент остварује право на полагање усменог дела испита и позитивну оцену писменог дела испита ако оствари најмање 18 поена од укупно 30 поена (три задатка по десет поена) или ако тачно реши и уради најмање два цела испитна задатка. Студент који оствари право *«условно позван на усмени део испита»* ***као доквалификацију*** за остварење права на усмени део испита ради један теоријски задатак у трајању од једног часа и без коришћења литературе.

Резултати писменог дела испита биће саопштени у писменом облику на огласној табли факултета до 12 часова. један дан по одржаном писменом делу испита, ако дежурни асистент или наставник не саопшти другачије. Студенти који желе да добију објашњење у вези са оценом писменог дела испита или да поново виде свој писмени рад, потребно је да се обрате предметном наставнику, или асистенту у време редовних консултација са студентима. То право треба искоридтити до термина одржавања усменог дела испита. Ако студент није искористио то право до почетка усменог дела испита сматраће се није хтео да коридти то право. Термини консултација наставника су: понедељак 10-12 h, и петак 10-12 h у кабинету 221. Консултације асистента су у кабинету 307: понедељком 10-12 h, средом 10-12 h.

Термин за полагање усменог дела испита по правилу први понедељак после писменог дела испита, а са почетком у 8,00 часова, ако студенти не изразе другачији захтев и договоре се са предметним наставником. На усменом делу испита није дозвољено коришћење литературе нити прибележака. За успешнију припрему испита из Механике III – Динамике пожељно је да су студенти положили испите из претходне године.

Резултате писменог дела испита, текстове испитних задатака и огледне примере решених испитних задатака из претходних испитних рокова, студенти могу наћи на **WEB** презентацији предмета Механика III – Динамика, а на адреси **www.masfak.ni.ac.yu** или интернет страници **http:/www.hm.co.yu/mehanika.**