МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У НИШУ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
Испитни рок ***Септембарски испитни рок (10 септембар) 2008.***
Предметни наставник: ***Проф. др Катица (Стевановић) Хедрих***, *академик Академије наука високих школа и универзитета Украјине, академик Академије нелинеарних наука Москва, члан GAMM, Int. ASME, EuroMech, American Academy of Mechanics, M.C. Chaki Centre for Mathematics and Mathematical Sciences u Tensor Society.*
Предметни асистент: Мг ***Јулијана Симоновић,*** асистент-приправник (на одсуству)

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА ПИСМЕНИ ДЕО ИСПИТА ИЗ ПРЕДМЕТА

МЕХАНИКА III - ДИНАМИКА

MEHANIKA III - DINAMIKA

PRVI ZADATAK. Disk mase $2m$, poluprečnika R, puštena je početnom brzinom $\vec{v}_0$, centra mase C_0, u polju Zemljine teže, iz položaja , A na visini h_0 centra mase C_0, u odnosu na referentni horzont, da se kotrlja bez klizanja niz glatku strmu ravan, koja sa horizontom zaklapa ugao α. Linija $A\ N\ B$ sa slike 1. je u vertikalnoj ravni. Strma ravan se, u tački M, nastavlja u cilindričnu površ poluprečnika $R = R = 6r$, centralnog ugla 3α, tako da vertikala lroz centar krivine luka, deli taj ugao u odnosu 1:2, kao što je na slici 1. ptikazano.

a* Koji uslov treba da zadovoljava početna brzina $\vec{v}_0$ centra mase C_0 diska, da bi se dik kotrljao po strmoj ravni, zadržavši svoje položaje kroz koje prolazi u vertikalnoj ravni?

b * Koliko stepeni slobode kretanja ima disk dok se kotrlja niz strmu ravan i po cilindričnoj površi, a koliko stepeni kada napusti tu površ po prolasku kroz položaj B? Obrazloži odgovor.

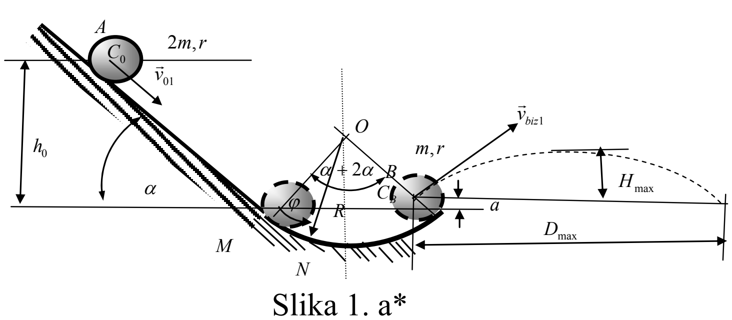
c* Napisati kinetičku i potencijalnu energiju diska pro kotljanju niz strmu ravan, po cilidričnoj površi i po napustanju iste, a u položajima A (početni položaj), L (proizvoljan položaj na strmpj tavnni), N (položaj odredjen uglom φ na cilindričnoj površi), B i D (kada napusti cilindričnu površ). Da li je sistem konzervativan? Ako je odgovor DA, napisati integral energije;

d* Odrediti brzine centra diska, kao i ugaonu brzinu sopstvene rotacije diska, pri njenom prolasku kroz tačku N odredjenu uglom φ na cilindričnoj površi, kao i pri prolasku kroz tačku B u kojoj napušta cilindričnu površ;

e* Odrediti jednačine kretanja diska po napuštanju cilindrične površi u tački B. Kolika je maksimalna visina $H_{\max}$= ? koju će postići disk u fazi kretanja po napuštanju cilindrične površi, kao i maksimalni domet $D_{\max} = ?$ centra diska u toj fazi kretanja.

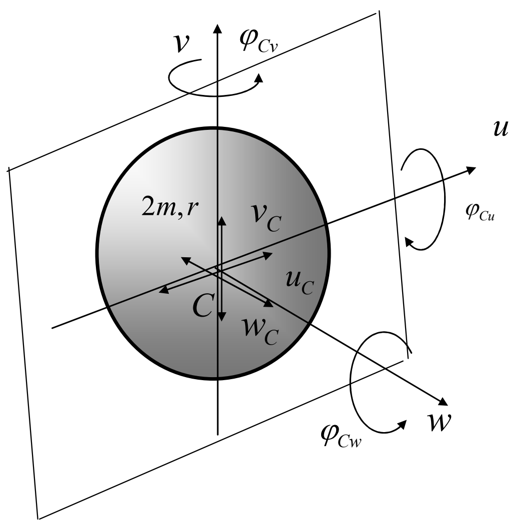
g* Kolika je ugaona brzina sopstvenog obrtanja diska u položaju dostizanja maksimalne visine $H_{\max}$?

h* Kolika je sila pritiska na cilindričnu površ u proizvoljnom polžaju diska na njoj? Koliki treba da bude ugao α, odnosno početna brzina $\vec{v}_0$ centra mase C_0 diska te da se disk odvoji od cilindrične površi preizlaska sa iste (njenog kraja)?

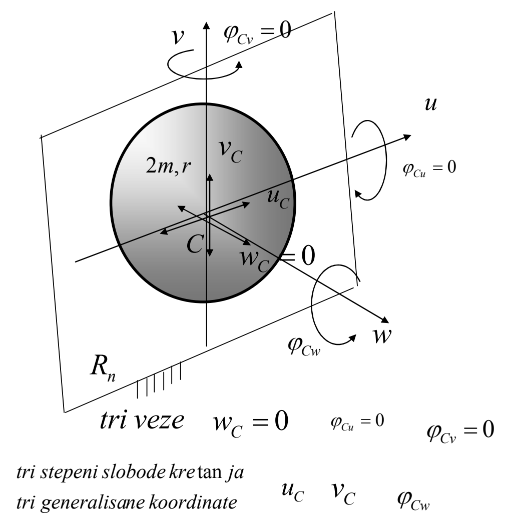


Slika 1. a*

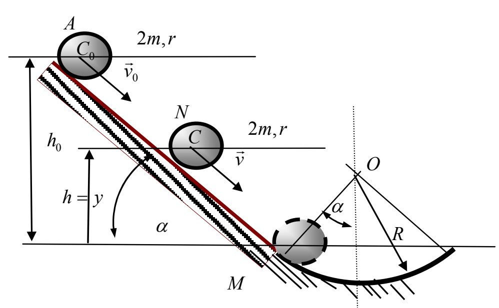
REŠEWE PRVOG ZADATKA. Pre nogeo što usmerimo našu pažnju ka matematičkim opisuma postupka rešavanja postavljenog zadatka, potrebno je da odredimo broj stepeni slobode kretanja posmatranog materijalnog sistema diska, koji se kotrlja po stmoj ravni, ostajući sve vreme kretanja u vertikalnoj ravni. Disk smatramo krutim telom, a kruto telo u prostoru ima šest stepeni slobode kretanja, jer moye da izvodi tri translacje u trima ortogonalnim pravcima, kao što je to prikazanao na slici br. 1. b* , kao i tri rotacije oko tih osa. Znači kada je disk slobodan, za odredjivanje njegovog položaja u prostoru potrebno je šest koordinata, naprimer tri koordinate – tri pomeranja centra masa diska, u_C , v_C i w_C, i tri koordinate – tri ugla obrtanja oko triju medjusobno ortogonalnih osa, φ_{Cu} ., φ_{Cv} i φ_{Cw}.



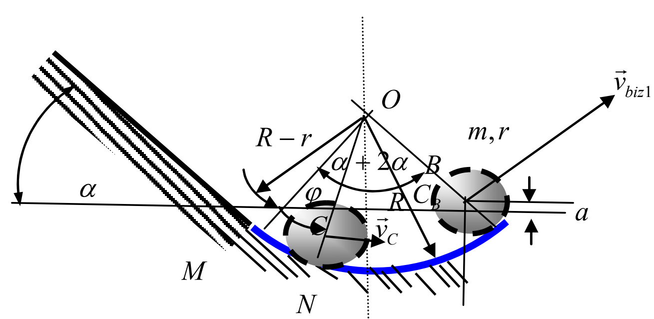
Slika 1. b* Slobodan disk – šest stepeni slobode kretanja



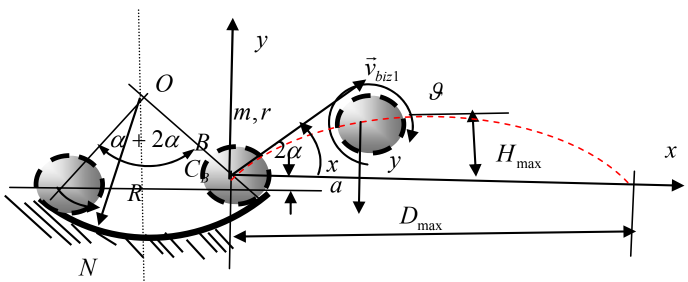
Slika 1. c* Disk vezan za nepokretnu ravan - tri veze i tri stepeni slobode kretanja manje – sistem sa tri stepeni slobode kretanja



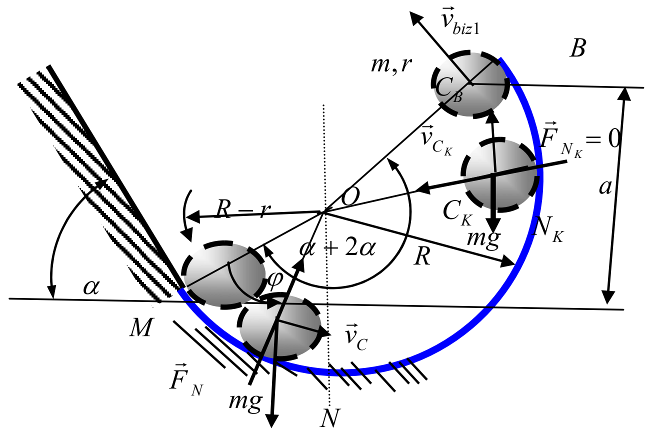
Slika 1. d* Disk u vertikalnoj ravni i kotrlja se bez klizanja po strmoj ravni – još dva stepena slobode kretanja manje – sistem ima jedan stepen slobode kretanja – Prva faza kretanja (bordo)



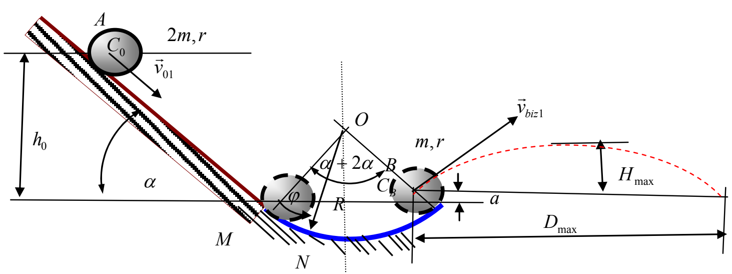
Slika 1. e* Disk u vertikalnoj ravni i kotrlja se bez klizanja po cilindričnoj površi – sistem sa jednim stepenom slobode kretanja - Druga faza kretanja (plavo)



Slika 1. f* Disk napušta cilindričnu povrp ostajući u u vertikalnoj ravni – sistem ima tri stepeni slobode kretanja – Treća faza kretanja (crveno)



Slika 1. g* Disk prestaje da se kotrlja po cilindričnoj površi napuštajući jednostrano zadržavajuću vezu kada sila pritiska (otpor veze) postane jednak nuli. - Druga faza kretanja do kritičnog ugla na kome napušta vezu (plavo)



Slika 1. h* Materijalni sistem (disk) se kreće u verikalnoj ravni i to kretanje se sastoji iz tri faze kretanja - u prvoj (bordo linija) i drugoj (plava linija) fazi kretanja kada se disk kotrlja bez klizanja po stmoj ravni, odnosno redom niz strmu ravan i po cilindričnj površi ostajući sve vreme u vertikalnoj ravni sistem ima jedan stepen slobode kretanja, i treće faze,(crvena linija) kada napušta te veze ostajući u vertikalnoj ravni pri daljem kretanju ima tri stepeni slobode kretanja – dve translacije u vertikalnoj ravni i jednu rotaciju oko ose upravne na zu vertikalnu ravan

Znači, da materijalni sistem vrši ravansko kretanje i da ima jedan stepen slobode kretanja, jer su, nametnute, veze disku smanjile pet stepeni slobode kretanja, pri čemu je disku preostao samo jedan spen slobode kretanja - kotrljanje bez klizanja po strmoj ravni, u vertikalnoj ravni. Za generalisanu koordinatu u fazi kretanja diska po strmoj ravni usvojimo koordinatu x, pomeranje centra mase diska C u pravcu paralelnom strmoj ravni, u vertikalnoj ravni, i usmerenu niz kosu racan. Brzina centra diska C je: $v_C = \dot{x}$. S obzirom da je strma raven nezadržavajuća veza, da bi disk ostao da se kotrlja po toj ravni potrebno je da je početna brzina (u početnom trenutku) njegovog centra mase paralelna strmoj ravni, jer da joj nije paralelna i da je usmerena od ravni, disk bi napustio vezu i odvojio se od ravni.

Aksijalni moment inercije mase diska za horizontalnu osu kroz centar mase diska, odnosno kroz trenutni pol brzine su:

$$\mathbf{J_C} = \frac{mr^2}{2} \quad \text{i} \quad \mathbf{J}_P = \frac{3mr^2}{2}$$

Kinetička energija sistema je jednaka zbiru kinetičke energije translacije diska, brzinom centra C mase diska i kinetičke energije rotacije oko ose upravne na površ diska i kroz centar mase diska :

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}\mathbf{J_C}\omega_C^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{3}{4}mv_C^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2,$$

ili kinetičkoj energiji rotacije diska oko ose kroz trenutni pol P brzine pri kotrljanju diska po strmoj ravni:

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_P\omega_P^2 = \frac{3}{4}mv_C^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

jer su ugaone brzine ω_C odnosno ω_P obrtanja diska oko ose kroz centar mase diska C, odnosno kro trenutni pol brzine P diska:

$$\omega_C = \omega_P = \frac{v_C}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$$

Na sistem, od aktivnih sila dejstvuje samo sila Zemljine teže, koja je konzervativna sila i ima funkciju sile, odnosno potencijal. Potencijalna energija sistema je:

$$\mathbf{E_p} = mgh = mg(h_0 - x\sin\alpha)$$

i izražena je pomoću koordinate h u pravcu vertikale, ili pomoću koordinate x koju smo izabrali za generalisanu koordinatu. Mogli smo umesto koordinate x za generalisanu koordinatu izabrati koordinate h u pravcu vertikale.

Kako se zadatkom traži brzina v_C centra C masa diska , koristićemo integral energije, odnosno teoremu o ukupnoj mehanučkoj energiji sistema, koja je konstantna za konzervativne sisteme i jednaka ukupnoj mehaničkoj energiji sistema, koju je sistem imao u poćetnom trenutku kretanja. Na osnovu toga pišemo da je:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \mathbf{E_0} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}}$$

odnosno:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \frac{3}{4}mv_C^2 + mgh = \mathbf{E_0} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}} = \frac{3}{4}mv_{C0}^2 + mgh_0$$

odakle sledi da je:

$$v_C^2 = v_{C0}^2 + \frac{4}{3}g(h_0 - h)$$

odnosno

$$v_C = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}g(h_0 - h)}$$

Ako prethodnu vezu izrazimo preko generalisane koordinate x možemo da napišemo sledeće:

$$v_C = \dot{x} = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gx\sin\alpha}$$

Prethodnim obrascima smo odredili brzinu centra masa diska u funkciji generalisane koordinate za vreme kretanja diska po strmoj ravni. Brzina centra masa diska v_{CM} u položaju M , tački prelaska sa strme ravni na cilindričnu površ je:

$$v_{CM} = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0}$$

Za drugu fazu kotrljanja bez klizanja diska po cilindričnoj površi sistem ima takodje jedan stepen slobode kretanja, i za tu fazu kretanja za generalisanu koordinatu izaberimo centralni ugao φ, koji poluprečnik, koji prolazi kroz centar masa diska C i centar krivine cilindrične površi (i luka preseka vertikalne ravni i cilindrične površi), čini sa sa poluprečnikom kroz centar masa diska, kada je on u položaju M, ulaska na cilindričnu površ. Tu generalisanu koordinatu smo obeležili sa φ. U toj fazi kretanja, za generalisanu koordinatu smo mogli izabrati i krivolinijsku koordinatu luk s, koji je sa prethodno izabranom generalisanom koordinatim vezan sledećom vezom: $s(\varphi)=(R-r)\varphi$. Da napomenemo, da za sistem sa jednim stepenom slobode kretanja, što smo ovde utvrdili, da samo jednu koordinatu možemo proglasiti (izabrati) za generalisanu, a ostale koordinate položaja sistema izraziti preko izabrane koordinate. Izbor generalisane koordinate se prepusta volji onoga ko rešava zadatak, ali od izbora generalisane koordinate nekada zavisi i ''elegantnost'' i kraći put rešavanja zadatka, o čemu je vazno voditi računa.

Brzina centra C mase diska u funkciji generalisane koordinate φ, pri kotrljanju diska bez klizanja po cilindričnoj površi, je:

$$v_C=\frac{ds(\varphi)}{dt}=(R-r)\dot{\varphi}$$

dok su ugaone brzine obrtanja diska ω_C odnosno ω_P, obrtanja diska oko ose kroz centar mase diska C, odnosno kro trenutni pol brzine P diska:

$$\omega_C=\omega_P=\frac{v_C}{r}=\frac{(R-r)\dot{\varphi}}{r}$$

Kinetička energija sistema je jednaka zbiru kinetičke energije translacije brzinom centra mase diska i kinetičke ekergije rotacije oko ose, upravne na površ diska, kroz centar mase diska :

$$\mathbf{E_k}=\frac{1}{2}\mathbf{J_C}\omega_C^2+\frac{1}{2}mv_C^2=\frac{3}{4}mv_C^2=\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2$$

ili kinetičkoj energiji rotacije diska oko ose kroz trenutni pol P brzine pri kotrljanju diska po strmoj ravni:

$$\mathbf{E_k}=\frac{1}{2}\mathbf{J}_P\omega_P^2=\frac{3}{4}mv_C^2=\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2$$

Na sistem, i u ovoj fazi kretanja, od aktivnih sila dejstvuje samo sila Zemljine teže, koja je konzervativna sila i ima funkciju sile, odnosno potencijal. Potencijalna energija sistema je:

$$\mathbf{E_p}=-mgh=mg(R-r)[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi)]$$

i izražena je pomoću koordinate h, merene u pravcu vertikale, ili pomoću koordinate φ , koju smo izabrali za generalisanu koordinatu, jer se centar masa diska - koji je napadna tačka sile težine, spušta za

$$(\downarrow)\,h=(R-r)[\cos(\alpha-\varphi)-\cos\alpha]$$

što je uočljivo sa slike. Mogli smo umesto koordinate φ za generalisanu koordinatu izabrati koordinatu s u pravcu luka poluprečnika $(R-r)$ - putanje, koju opisuje centar masa diska pri kotrljanju po cilindričnoj površi. Tada je izraz za potencijalu energiju:

$$\mathbf{E_p}=-mgh=mg(R-r)\left[\cos\alpha-\cos\left(\alpha-\frac{s}{R-r}\right)\right]$$

Kako se zadatkom, i u ovoj fazi kretanja, traži brzina v_C centra C masa diska pri kotrljanju bez klizanja po cilindričnoj površi, koristićemo integral energije, odnosno teoremu o ukupnoj mehanučkoj energiji sistema, koja kaže da je ukupna mehanička energija sistema konstantna za konzervativne sisteme i jednaka ukupnoj mehaničkoj energiji sistema, koju je sistem imao u poetnom trenutku kretanja. Na osnovu toga pišemo da je:

$$\mathbf{E_k}+\mathbf{E_p}=\mathbf{E_0}=\mathbf{E_{k0}}+\mathbf{E_{p0}}$$

odnosno:

$$\mathbf{E_k}+\mathbf{E_p}=\frac{3}{4}mv_C^2-mg(R-r)[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi)]=\mathbf{E_0}=\mathbf{E}_{\mathbf{k}0}+\mathbf{E}_{\mathbf{p}0}=\frac{3}{4}mv_{C0}^2+mgh_0$$

odakle sledi da je:

$$v_C^2=v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi)]$$

odnosno

$$v_C=\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi)]}$$

Ako prethodnu vezu izrazimo preko luka, krivolinijske koordinate s, možemo da napišemo sledeće:

$$v_C=\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{4}{3}g(R-r)\left[\cos\alpha-\cos\left(\alpha-\frac{s}{R-r}\right)\right]}$$

Prethodnim obrascima smo odredili brzinu centra C masa diska u funkciji generalisane koordinate φ za vreme kretanja diska po cilindričnoj površi. Brzina centra masa diska v_{CB} u položaju B, tački izlaska diska sa cilindrične površi i prelaska na slobodno kretanje u vertikalnoj ravni je:

$$v_{CB}=\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha-\cos 2\alpha]}$$

dok je ugaona brzina ω_{CB} diska, odnosno ω_{PB}:

$$\omega_{CB}=\omega_{Pb}=\frac{v_{CB}}{r}=\frac{1}{r}\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha-\cos 2\alpha]}$$

U trećoj fazi kretanja, kada napušta veze, ostajući u vertikalnoj ravni, disk ima tri stepeni slobode kretanja, jer se kreće u vertikalnoj ravni izvodeći ravansko kretanje početnom brzinom centra masa

$$v_{CB}=\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha-\cos 2\alpha]}.$$

i ugaonom brzinom sopstvenog obtzanja oko sopstvene ose kroz centar masa C koja iznosi:

$$\omega_{CB}=\frac{1}{r}\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha-\cos 2\alpha]}$$

Za generalisane koordinate u trećoj fai kretanja, sada takodje ravanskog kretanja, ali sa tri stepeni slobode kretanja u vertikalnoj ravni za generalisane koordinate biramo dve koordinate pomeranja centra masa diska u dva ortogonalna pravca, x_C i y_C, i ugao φ_C obrtanja diska oko ose upravne na vertikalnu ravan kretanja kroz njegov centar masa C. Na disk dejstvuje samo aktivna sila sopstvene težine diska mg. Diferencijalne jednačine ravanskog kretanja diska u vertikalnoj ravni i sa tri stepeni slobode kretanja su:

$$m\ddot{x}_C=0$$
$$m\ddot{y}_C=-mg$$
$$\mathbf{J_C}\ddot{\varphi}_C=0$$

odnosno

$$\ddot{x}_C=0$$
$$\ddot{y}_C=-g$$
$$\ddot{\varphi}_C=0$$

Integraljenjem prethodnih diferencijalnih jednačina, prethodnog sistema, dobijamo sledeće:

$$\dot{x}_C = C_1$$

$$\dot{y}_C = -gt + C_2$$

$$\dot{\varphi}_C = C_3$$

Još jednim integraljenjem diferencijalnih jednačina prethodnog sistema dobijamo sledeće njihovo opšte rešenje:

$$x_C = C_1 t + C_4$$

$$y_C = -g\frac{t^2}{2} + C_2 t + C_5$$

$$\varphi_C = C_3 t + C_6$$

koje sadrži šest nepoznatih integracionih konstanti. U prethodnim jednačinama pojavilo se šest integracionih konstanti, koje treba odrediti iz pčetnih uslova. Početni uslovi ravanskog kretanja diska su:

a* položaj centra diska u početnom trenutku $t = 0$, koji smo označili u trenutlu kada disk napušta cilindričnu površ:

$$x_C(0) = 0$$

$$y_C(0) = 0$$

$$\varphi_C(0) = 0$$

b* poletne brzine centra masa diska u početnom trenutku $t = 0$, koji smo označili u trenutlu kada disk napušta cilindričnu površ:

$$\dot{x}_C(0) = v_{CB}\cos 2\alpha = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}\cos 2\alpha$$

$$\dot{y}_C(0) = v_{CB}\sin 2\alpha = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}\sin 2\alpha$$

$$\varphi_C(0) = \omega_{CB} = \frac{1}{r}\sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}$$

Iz početnih uslova odredjujemo integracione konstante, pa sledi d su vrednosti integracionih konstanti: :

$$C_4 = 0,\ C_5 = 0,\ C_6 = 0$$

$$C_1 = v_{CB}\cos 2\alpha = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}\cos 2\alpha$$

$$C_2 = v_{CB}\sin 2\alpha = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}\sin 2\alpha$$

$$C_3 = \omega_{CB} = \frac{1}{r}\sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}$$

Jednačine kretanja su sada:

$$x_C(t) = v_{CB}t\cos 2\alpha == t\sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}\cos 2\alpha$$

$$y_C(t) = v_{CB}t\sin 2\alpha - g\frac{t^2}{2} = -g\frac{t^2}{2} + t\sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}\sin 2\alpha$$

$$\varphi_C(t) = \omega_{CB} t = \frac{t}{r}\sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3} g h_0 - \frac{4}{3} g (R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}$$

Disk se sada obrće konstantnom ugaonom brzinom oko upravne na površ diska, a ose kroz njegov centar masa:

$$\dot{\varphi}_C(t) = \omega_{CB} = \frac{1}{r}\sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3} g h_0 - \frac{4}{3} g (R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha]} = const$$

Maksimalma visina, koju centar masa diska dostiže, je u trenutku kada brzina centra mase diska ima samo horizontalnu komponentu, tj. kada je

$$\dot{y}_C(t_1) = v_{CB} \sin 2\alpha - g t_1 = 0$$

a to se dostiže u trenutku t_1

$$t_1 = \frac{v_{CB} \sin 2\alpha}{g}$$

U tom trenutku koordinate centra mase diska su:

$$x_C(t_1) = \frac{v_{CB}^2}{2g} \sin 4\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{2g}\left[v_{C0}^2 + \frac{4}{3} g h_0 - \frac{4}{3} g (R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha]\right]$$

$$y_{C-MAX} = y_C(t_1) = \frac{v_{CB}^2}{2g} \sin^2 2\alpha = \frac{\sin^2 2\alpha}{2g}\left[v_{C0}^2 + \frac{4}{3} g h_0 - \frac{4}{3} g (R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha]\right]$$

Razlika u visini položaja centra masa pri ulasku u cilindričnu površ i izlaska sa iste je:

$$a = (R-r)(\cos\alpha - \cos 2\alpha)$$

Sada možemo odrediti maksimalnu visinu H_{C-MAX} na koju ćw dospeti centar C mase diska:

$$H_{C-MAX} = a + y_{C-MAX} = a + y_C(t_1) = (R-r)(\cos\alpha - \cos 2\alpha) + \frac{v_{CB}^2}{2g} \sin^2 2\alpha$$

$$H_{C-MAX} = (R-r)(\cos\alpha - \cos 2\alpha) + \frac{\sin^2 2\alpha}{2g}\left[v_{C0}^2 + \frac{4}{3} g h_0 - \frac{4}{3} g (R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha]\right] > h_0$$

a to je visina veća od visine h_0 na kojoj je bio centar masa diska, kada je on pušten sa početnom brzion centra v_{C0}, da se kotrlja bez klizanja po strmoj ravni. Da bi ovaj zaključak bio dobar, potrebano je da je zadovoljen i uslov da je ugao α takav da disk može, kotrljajući se bez klizanja, da dospe u krajnju taćku B brzinom, koja je veča od nule:

$$v_{CB}^2 = v_{C0}^2 + \frac{4}{3} g h_0 - \frac{4}{3} g (R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha] > 0$$

Odnosno potrebno je da je zadovoljen uslov:

$$\frac{3}{4g} v_{C0}^2 + h_0 > (R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha] = a$$

kao i da je sila pritiska diska na cilindričnu površ veća ili najmanje jednaka nuli u položaju B centra diska C (diska u krajnjoj tački cilindrične površi B).

Ako tražimo najveći domet na visini, na kojoj diosk napušta cilindričnu površ, najveći domet je kada je

$$y_C(t_2) = v_{CB} t_2 \sin 2\alpha - g\frac{t_2^2}{2} = 0$$

Za taj slučaj vreme dostizanja najvećeg dpmrta je::

$$t_2 = \frac{2v_{CB}\sin 2\alpha}{g}$$

U tom trenutku koordinata $x_C(t_2)$ je i najveći domet i izbosi:

$$D_{C-MAX} = x_{C-MAX} = x_C(t_2) = \frac{v_{CB}^2 \sin 4\alpha}{g} = \frac{\sin 4\alpha}{g}\left\{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha]\right\}$$

Ako se traži najveći domet na vidini h_0 na kojoj je bio centar masa diska u početku kotrljanja bez klizanja diska po strmoj ravni, onda je potrebno odrediti vreme t_3 ponovnog dospeća centra masa diska na tu visinu po napuštanju cilindrične površi i odgovarajuću koordinatu $x_C(t_3)$. Na osnovu toga pišemo:

$$y_C(t_3) = h_0 - a = h_0 - (R-r)(\cos\alpha - \cos 2\alpha)$$

odnosno

$$y_C(t_3) = v_{CB}t_3 \sin 2\alpha - g\frac{t_3^2}{2} = h_0 - a$$

pa dobijamo kvadratnu jednačinu :

$$g\frac{t_3^2}{2} - v_{CB}t_3 \sin 2\alpha + h_0 - a = 0$$

$$t_3^2 - \frac{2}{g}v_{CB}t_3 \sin 2\alpha + \frac{2}{g}(h_0 - a) = 0$$

iz koje odredjujemo korene, odnosno vreme ponovnog dospeca centra mese diska na početnu visinu h_0.

$$t_{3(1,2)} = \frac{1}{g}v_{CB}\sin 2\alpha \mp \sqrt{\left(\frac{2}{g}v_{CB}t_3 \sin 2\alpha\right)^2 - \frac{2}{g}(h_0 - a)}$$

Koristimo drugi koren, jer prvo vreme ponovnog dospeća centra mase diska na visinu h_0, nego drugo vreme, koje odgovara drugom korenu. Ova dva korena ukazuju da će se centar masa diska ponovo naći dva puta na visini na kojoj je bio u poetku kotrljanja bez klizanja niz strmu ravan. Maksimalnom dometu odgovara vreme:

$$t_{3(2)} = \frac{1}{g}v_{CB}\sin 2\alpha + \sqrt{\left(\frac{2}{g}v_{CB}t_3 \sin 2\alpha\right)^2 - \frac{2}{g}(h_0 - a)}$$

Sada najveći domet centra mase diska je:

$$D_{C-MAX}(t_{3(2)}) = \frac{h_0}{tg\alpha} + (R-r)(\sin\alpha + \sin 2\alpha) + x_C(t_{3(2)})$$

gde je:

$$x_C(t_{3(2)}) = v_{CB}t_{3(2)}\cos 2\alpha = \frac{v_{CB}^2 \sin 4\alpha}{g} + v_{CB}\cos 2\alpha\sqrt{\left(\frac{2}{g}v_{CB}t_3 \sin 2\alpha\right)^2 - \frac{2}{g}(h_0 - a)}$$

$$v_{CB} = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos 2\alpha]}$$

$$a = (R-r)(\cos\alpha - \cos 2\alpha)$$

Da bi smo odredili uslov pod kojim će za zadate početne uslove disk dospeti u krajnjnji položaj B kotrljajući se bez klizanja, tako da njegova brzina bude veča od nule, i ne neapusti vezu pre dospeća u njen kraj B potrebno je da odredimo silu pritiska diska na cilindričnu površ po kojoj se kotrlja. Taj pritisak, odnosno otpor veze-cilindrične povrđi mra biti veći od nile da bi veza ’ cilindrična površ imala svojstvo obostrano zadržavajuće veze.U trenutku i položaju kada pritisak diska na cilindričnu površ postane jednak nuli, dolazi do pojave svojstva veze da je jednostrano zadržavajuća i disk se odvaja od te veze i napusta istu.

Da bi smo odredili silu pritiska diska na cilindričnu površ oslobodimo disk veza i umesto veza postavilo odgovarajuće reakcije veza. To su notmalna komponenta otpora veze F_N upravna na putanju centra masa diska C, i sila otpora kotrljanju F_K , koja pada u pravac tangente na cilindričnu površ. Sada koristimo princip dinamičke ravnoteže i pišemo jednačine dinamičke ravnoteže sila u radijalnom i tangencijalnom pravcima, kao i jednačinu dinamičke ravnoteže momenata sila oko ose, upravne na površ diska, kroz centar masa. Na osnovu toga pišemo sledeće jednačine dinamičke ravnoteže:

$$ma_{CT} = m(R-r)\ddot{\varphi} = mg\sin(\alpha-\varphi) - F_k$$

$$ma_{CN} = m\frac{v_C^2}{(R-r)} = m(R-r)\dot{\varphi}^2 = F_N - mg\cos(\alpha-\varphi)$$

$$J_C\ddot{\varphi}_C = J_C\frac{(R-r)\ddot{\varphi}}{r} = F_k r$$

S obzirom da smo koristeći teoremu od ukupnoj mehaničkoj energiji sistema odredili brzinu v_C centra mease diska, to ne moramo integraliti diferencijalne jednačine prethodnog sistema diferencijalnih jednačina, već ćemo koristiti samo drugu jednačinu iz koje odredjujemo otpor veze – cilindrične površi u funkciji generalisane koordinate φ, kao i prethodno odredjen izraz za brzinu centra mase diska, takodje u funkciji generalisane koordinate φ. Na osnovu toga dobijamo:

$$F_N = m\left[\frac{v_C^2}{(R-r)} + g\cos(\alpha-\varphi)\right]$$

a kako je:

$$v_C = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi)]}$$

to sledi da je:

$$F_N = mg\cos(\alpha-\varphi) + \frac{m}{(R-r)}\left[v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi)]\right]$$

odnosno, posle sredjivanja za silu pritiska diska na cilindričnu površ dobijamo sledeci izraz:

$$F_N = \frac{m}{(R-r)}\left[v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi)] + (R-r)g\cos(\alpha-\varphi)\right]$$

Posle sredjivanja dobijamo sledeći izraz za silu pritiska diska na cilindričnu površ, pri njegovom kotrljanju bez klizanja po njoj:

$$F_N = \frac{m}{(R-r)}\left[v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{1}{3}g(R-r)[4\cos\alpha - 7\cos(\alpha-\varphi)]\right]$$

Silu otpora kotrljanju bez klizanja odredjujemo iz poslednje jednačine sistema jednačina dobijenih na osnovu principa dinamičke ravnoteže:

$$J_C \ddot{\varphi}_C = J_C \frac{(R-r)\ddot{\varphi}}{r} = F_k r$$

odakle je

$$F_k = J_C \frac{(R-r)\ddot{\varphi}}{r^2} = \frac{1}{2} m r^2 \frac{(R-r)}{r^2} \ddot{\varphi}$$

Zatim unošenjem u prvu jednačinu dobijamo:

$$m(R-r)\ddot{\varphi} = mg\sin(\alpha - \varphi) - F_k$$

$$m(R-r)\ddot{\varphi} = mg\sin(\alpha - \varphi) - \frac{1}{2} m r^2 \frac{(R-r)}{r^2} \ddot{\varphi}$$

$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\varphi} = g\sin(\alpha - \varphi)$$

Diferencijalna jednačina kretanja centra mase diska pri njegovom kotrljaju bez klizanja po cilindričnoj površi je u obliku:

$$\ddot{\varphi} - \frac{2}{3(R-r)} g\sin(\alpha - \varphi) = 0$$

Za silu kotrljanja bez klizanja možemo da napišemo sledeći izraz:

$$F_k = \frac{1}{2} m(R-r)\ddot{\varphi} = \frac{1}{3} mg\sin(\alpha - \varphi)$$

Diferencijalnu jednačinu kretanja centra mase diska nije teško integraliti, jer razdvaja promenljive, na sledeći način:

$$\ddot{\varphi} - \frac{2}{3(R-r)} g\sin(\alpha - \varphi) = 0 \text{ - } 2\dot{\varphi}dt = 2d\varphi$$

$$2\ddot{\varphi}\dot{\varphi}dt - \frac{2}{3(R-r)} g\sin(\alpha - \varphi) 2d\varphi = 0$$

$$2\dot{\varphi}d\dot{\varphi} - \frac{2}{3(R-r)} g\sin(\alpha - \varphi) 2d\varphi = 0$$

$$\int_{\dot{\varphi}_M}^{\dot{\varphi}} 2\dot{\varphi}d\dot{\varphi} - \frac{2}{3(R-r)} g\int_0^{\varphi} \sin(\alpha - \varphi) 2d\varphi = 0$$

Granice integraljenja smo odredili od položaja pri ulasku u cilindričnu površ gde je ugao $\varphi = 0$ do prouzvoljnog položaja odredjenog uglom φ, kada je ugaina brzina okretanja centra masa C oko centra krivine njegove putanje O vezana sa njegovom brzinom: $v_C = (R-r)\dot{\varphi}$. Posle naznačenog integraljenja dobijamo:

$$\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_M^2 + \frac{4}{3(R-r)} g[\cos(\alpha - \varphi) - \cos\alpha] = 0$$

odnosno

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_M^2 - \frac{4}{3(R-r)} g[\cos\alpha - \cos(\alpha - \varphi)]$$

odnosno

$$(R-r)^2\dot{\varphi}^2=(R-r)^2\dot{\varphi}_M^2-\frac{4(R-r)}{3}g[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi)]$$

odnosno

$$v_C^2=v_{CM}^2-\frac{4(R-r)}{3}g[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi)]$$

$$v_C=\sqrt{v_{CM}^2-\frac{4(R-r)}{3}g[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi)]}$$

A kako je:

$$v_{CM}=\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0}$$

to sledi da je:

$$v_C=\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh-\frac{4(R-r)}{3}g[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi)]}$$

Vidimo da je ovaj izraz isti kao onaj koji smo dobili iz teoreme o ukupnoj mehaničkoj energiji konzervativnog sistema.

Sada da se vratimo na analizu sile pritiska F_N za koju smo odredili sledeći izraz:

$$F_N=\frac{m}{(R-r)}\left[v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{1}{3}g(R-r)[4\cos\alpha-7\cos(\alpha-\varphi)]\right]>0$$

Da se disk nebi odvojio od cilindrične površi, koja je jednostrano zadržavajuća veza, ova sila pritiska mora da bude veća od nule. Iz tog uslova dobijamo sledeću relaciju:

$$v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{1}{3}g(R-r)[4\cos\alpha-7\cos(\alpha-\varphi)]>0$$

odnosno:

$$\frac{3v_{C0}^2}{7(R-r)g}+\frac{4h_0}{7(R-r)}-\frac{4}{7}\cos\alpha>-\cos(\alpha-\varphi)\le 1$$

Da bi postojao položaj u kome bi se disk odvojio od cilindrične površi potrebno je da zadovoljena relacija

$$\frac{3v_{C0}^2}{7(R-r)g}+\frac{4h_0}{7(R-r)}-\frac{4}{7}\cos\alpha=-\cos(\alpha-\varphi_K)\le 1$$

odakle sledi

$$\frac{3v_{C0}^2}{7(R-r)g}+\frac{4h_0}{7(R-r)}-4\cos\alpha\le 1$$

odnosno

$$\cos\alpha\le 1-\frac{3v_{C0}^2+4gh_0}{28(R-r)g}$$

Ovo je uslov koji ograničava veličinu ugla α u odnosu na početnu brzinu v_{C0} centra mase diska i visinu h_0 početnog položaja za kotrljanje bez klizanja niz strum raven da u fazi kretanja - kotrljanja bez klizanja po cilindričnog površi nebi došlo do odvajanja diska od nje i veza dejstvovala kao jednostrano zadržavajuća, odnosno, nezadržavajuća.

Ako je zadovoljen uslov

$$F_N(\kappa_K)=\frac{m}{(R-r)}\left[v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{1}{3}g(R-r)[4\cos\alpha-7\cos(\alpha-\varphi_K)]\right]=0$$

to dolazi do odvajanja diska od cilindrične površi po kojoj se kotrljao bez klizanja, potrebno je odrediti i koordinaru φ_K na kojoj će doći do odvajanja diska od cilindrične površi, kao i brzinu centra masa diska pri njegovom odvajanju od veze, odnosno napuštanja veze:

Kako je generalisana koordinata φ_K na kojoj disk napušta jednostranozadržavajuću vezu određena iz relacije:

$$\cos(\alpha-\varphi_K)=\frac{3v_{C0}^2}{7(R-r)g}+\frac{4h_0}{7(R-r)}-\frac{4}{7}\cos\alpha\le 1$$

to je brzina centra mase diska kojom se disk odvaja od cilindrične površi (kojom napušta jednostranozadržavajuću vezu), to dobijamo sledeći izraz za tu brzinu centra masa diska::

$$v_{CK}=\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{4(R-r)}{3}g[\cos\alpha-\cos(\alpha-\varphi_K)]}$$

$$v_{CK}=\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{4(R-r)}{3}g\left[\cos\alpha-\frac{3v_{C0}^2}{7(R-r)g}-\frac{4h_0}{7(R-r)}+\frac{4}{7}\cos\alpha\right]}$$

$$v_{CK}=\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh-\frac{4(R-r)}{3}g\left[\frac{11}{7}c\cos\alpha-\frac{3v_{C0}^2}{7(R-r)g}-\frac{4h_0}{7(R-r)}\right]}$$

$$v_{CK}=\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\left[\frac{44(R-r)g}{21}c\cos\alpha-\frac{4v_{C0}^2}{7}-\frac{11gh_0}{21}\right]}$$

$$v_{CK}=\sqrt{\frac{11}{7}v_{C0}^2+\frac{39}{21}gh_0-\frac{44(R-r)g}{21}c\cos\alpha}$$

$$\frac{11}{7}v_{C0}^2+\frac{39}{21}gh_0\ge\frac{44(R-r)g}{21}c\cos\alpha$$ **PROVERI????????????????????????????**

$$\frac{3}{4}\frac{v_{C0}^2}{g(R-r)}+\frac{39}{44}\frac{h_0}{(R-r)}\ge c\cos\alpha$$

DRUGI ZADATAK. Materijalni sistem na slici 2. se sastoji od dva tanka homogena diska D_1 i D_2, masa i poluprečnika redom $4m, R$, $2m, R$ i tega mase $4m$ kao što je to prikazano na slici. Za centar C_1, prvog diska, koji može da se lotrlja brz klizanja po strmoj ravni nagiba ugla α u odnosu na horizonat, vezano je lako, nerastegljivo uže, koje je zatim prebačeno preko drugog diska D_2, čiji je centar masa C_2 zglobno vezan za nepokretni oslonac, a za čiji je drugi kraj vezan teg mase $2m$, koji visi na tom užetu u vertikalnom pravcu. Ceo sistem se nalazi u vertikalnoj ravni i u polju Zemljine teže.

Odrediti:

a* broj stepeni slobode kretanja sistema i načiniti izbor generalisanih koordinata (ili koordinate) sistema;

b* sve koordinate položaja i konfiguracije sistema, kao i ugaone brzine diskova pomoću izabranih generalisanih koordinata sistema;

c* izraze za ***kinetičku i potencijalnu energiju sistema***. Da li se ukupna mehanička energija datog sistema menja u toku vremena i toku kretanja sistema? Da li je sistem konzervativan?

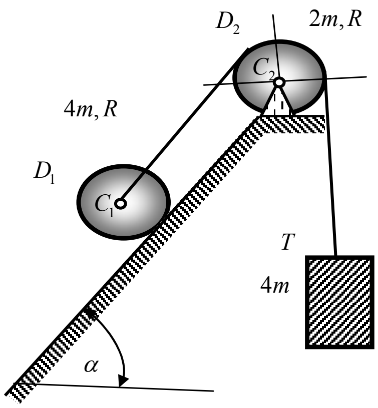
d* snagu rada sila koje dejstvuju na sistem;

e* napisati integral energije sistema;

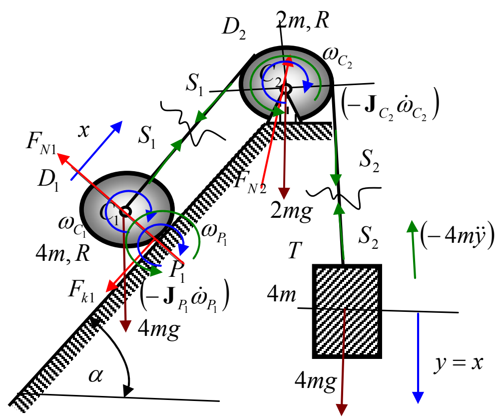
f* diferencijalne jednačine kretanja sistema pomoću generalisanih koordinata i Lagrage-ovih jednačina druge vrste. Koliki je najmanji broj diferencijalnih jednačina kretanja sistema? Odrediti ubrzanja sistema.

g* ubrzanja centra diska C_1;

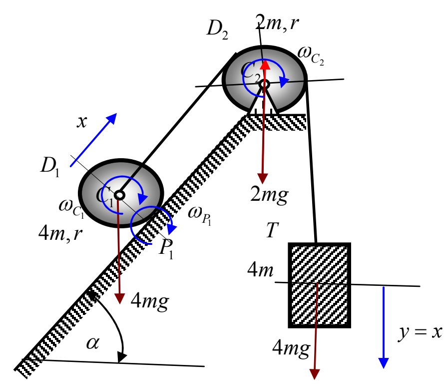
h* sile u užadima.



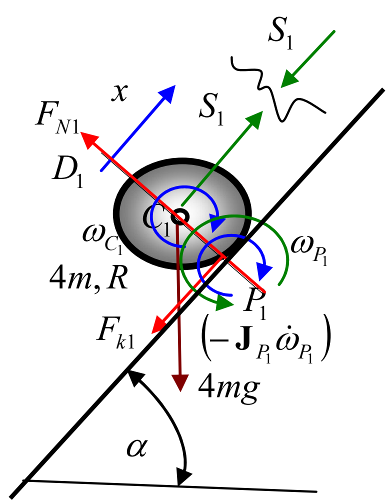
Slika 2.



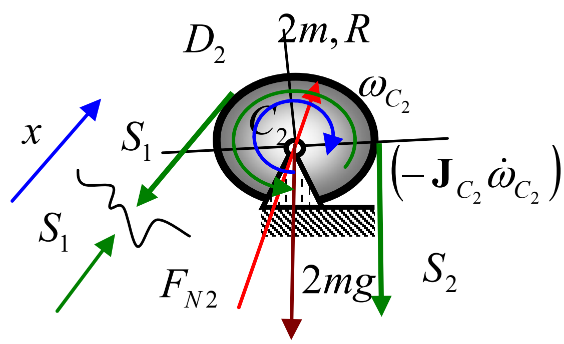
Slika 2. a*



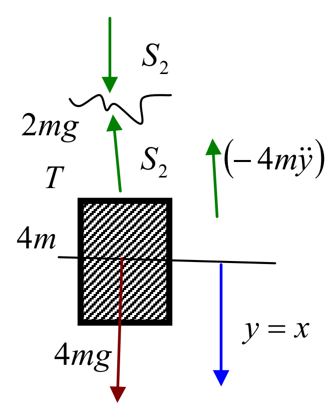
Slika 2. b*



Slika 2. c*



Slika 2. d*



Slika 2. e*

Materijalni sistem na slici 2 ima jedan stepen slobode kretanja, jer disk koji se kotrlja bez klizanja po strmoj ravni, ostajući pri tome u vertikalnoj ravni ima jedan stepen slobode kretanja (detaljnije objasnjenje vidi u pocetku prvog zadatka) , a takodje i teg u vertikalnoj ravni, koji visi na koncu ima jedan stepen slobode kretanja, ali kako su vezani nerastegljivim koncem to znaci da sistem ima samo jedan stepen slobode. Disk preko koga je prebaceno uže ima takodje samo jedan stepen slobode kretanja-obrtanje oko zglobne veze u centru masa C_2, ali kako uže ne klizi po njegovom obimu, već se zajedno sa njim pomera istom brzinom obima, to znači da u finalu ceo mehanički sistem ima samo jedan stepen slobode kretanja. To znači da možemo izabrati samo jednu generalisanu koordinatu, a preko nje izraziti sve ostale koordinate položaja diskova i tega pri kretanju sisema i u prozvoljnoj konfiguraciji. Za generalisanu koordinatu izaberimo koordinatu x usmerenu naviše i paralelnu strmoj ravni i vetikalnoj ravni. Pomeranje tega naniže označimo sa y i kako je uže nerastegljivo to je $y = x$. Koordinatu položaja drugog diska sa centrom u C_2 oko koga se obrće označimo sa φ_{C_2}, a ugaonu brzinu njegovog obrtanja označimo sa $\omega_{C_2} = \dot{\varphi}_{C_2}$. Imajući u vidu da je obimna brzina tačke na obimu tog diska jednaka brzini užete, to sledi da je njegova ugaona brzina jednaka

$$\omega_{C_2} = \dot{\varphi}_{C_2} = \frac{\dot{x}}{r}$$

Ugaona brzina ω_{C_1} obrtanja prvog diska oko ose, upravne na vertikalnu ravan i ravan diska, kroz njegov centar masa C_1, odnosno, ugaona brzina ω_{P_1} oko paralelne ode kroz trenutni pol brzine u P_1, oko koga se u svakom trenutku obrne disk kortljajući se bez klizanja po strmoj ravni. Treba uočiti da se taj trenutni pol P_1 pomera po strmoj ravni, ali kako je disk osnosimetrican, a odgovarajuća tačka na konturi diska u kojoj se tokom njegovog kotreljanja bez klizanja po stmoj ravni dodiruje sa njim. To znači da se osa trenutne rotacije pomera i po konturi diska, ali je aksijalni moment inercije mase diska za taj sistem osa uvek isti i konstantan, pa se ta osobina može koristiti pri pisanju jednačina dinamike diska, što ne bi bio slučaj da kontura nije krug (cilindar), a disk je homogen i sa centom masa u centru konturne. Linije:

$$\omega_{P_1} = \omega_{C_1} = \frac{\dot{x}}{r}$$

Aksijalni moment inercije mase prvog diska za horizontalnu osu kroz centar C_1 mase diska $\mathbf{J}_{\mathbf{C}_1}$, odnosno kroz trenutni pol brzine P_1, $\mathbf{J}_{P_1}$, a čija je masa $4m$ i poluprečnik r, su:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{C}_1} = \frac{4mr^2}{2} \quad \text{i} \quad \mathbf{J}_{P_1} = \frac{12mr^2}{2}$$

Aksijalni moment inercije mase drugog diska za horizontalnu osu kroz centar C_2 mase diska $\mathbf{J}_{\mathbf{C}_2}$ je:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{C}_2} = \frac{2mr^2}{2}$$

Ukupna kinetička energija sistema jednaka je zbiru kinetičkih energija rotacije prvog diska oko njegove ose trenutne rotacije pri kotrljanju bez klizanja po strmoj ravni , kinetičke energije rotacije drugog diska oko ose kroz njegov centar masa i kinetičke energije translacije tega:

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P_1}\omega_{P_1}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C_2}\omega_{C_2}^2 + 4m\dot{y}^2 = \frac{11}{2}m\dot{x}^2$$

Na sistem od aktivnih sila dejstvuju sile težine diskova i tega, ali sila težine drugog diska ne vrši nikakav rad jer se njena napadna tačka ne pomera u vertikalnom pravcu, pa je rad te sile nula, a promena potencijalne eenergije je takodje jednaka nuli. Promena potencijalne energije sistema od dejstva sile težine $4mg$ prvog diska je različita od nule, jer se napadna tačke te sile težine podiže za $x\sin\alpha$, dok se napadna tačka sile težine $4mg$ tega spišta za $y = x$, te se potencijalna energija sistema smanjuje. Ukupna promena potencijalne energije posmatranog materijalnog sistema je sada:

$$\mathbf{E_p} = 4mgx\sin\alpha - 4mhy = -4mgx(1-\sin\alpha)$$

Kako na sistem dejstvuju aktivne sile, koje su konzervativne, to je ukupna energija sistema konstantna i jednaka onoj, koju je sistem imao u početnom trenutku kretanja sistema:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \mathbf{E_0} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}}$$

$$\frac{11}{2}m\dot{x}^2 - 4mgx(1-\sin\alpha) = \mathbf{E_0} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E}_{Po} = const$$

Ovo je i integral energije.

Diferenciranjem po vremenu dobijamo diferencijalnu jednačinu kretanja u sledećem obliku:

$$\frac{d(\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p})}{dt} = 0$$

$$11m\dot{x}\ddot{x} - 4mg\dot{x}(1-\sin\alpha) = 0$$

odnosno

$$11m\ddot{x} - 4mg(1-\sin\alpha) = 0\,.$$

Iz poslednje diferencijalne jednačine odredjujemo ubrzanje sistema u obliku

$$\ddot{x} = \frac{4}{11}g(1-\sin\alpha)$$

Do te jednačine možemo doći I primenom Lagrage-ove jednačine drge vrste za generalisanu koordinatu u sledećem obliku:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_k}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$$

pomoću koje sledi

$$11m\ddot{x} - 4mg(1-\sin\alpha) = 0$$

odnosno

$$\ddot{x} = \frac{4}{11}g(1-\sin\alpha)$$

Snaga rada neke sile, koja dejstvuje na telo, koje se kreće, se izražava pomoću skalarnog proizvoda sile i brzine kretanja materijalne tačke na koju dejstvuje ta sila: $P = (\vec{F}, \vec{v})$.

Snaga rada aktivnih sila koje dejstvuju na posmatrani materijalni sistem pojedinačno je:

$$P_1 = -4mg\dot{x}\sin\alpha$$

$$P_2 = 2mgv_{C_2} = 0$$

$$P_3 = 4mg\dot{y} = 4mg\dot{x}$$

Snaga rada sila inercije koje dejstvuju na posmatrani sistem je:

$P_{11,j} = -\mathbf{J}_{P_1}\dot{\omega}_{P_1}\omega_{P_1} = -6m\dot{x}\ddot{x}$ snaga rada sila inercije rotacije prvog diska

$P_{22,j} = -\mathbf{J}_{C_2}\dot{\omega}_{C_2}\omega_{C_2} = -m\dot{x}\ddot{x}$ snaga rada sila inercije rotacije drugog diska

$P_{33,j} = -4m\ddot{x}\dot{x} = -4m\dot{x}\ddot{x}$ snaga rada sila inercije translacije tega

S obzirom da se radi o idealnim vezama i konzervativnom sistemu, to je snaga rada otpora idealnih veza jednaka nuli, jer su brzine u tangencijalnom pravcu na veze, a otpori idealnih veza upravni na brzine, pa je snaga rada tih sila jednaka nuli. S obzirom da je system konzervativan, a ukupna energija sistema konstantna, to je ukupna snaga rada svih sisal sistema jednaka nuli.

$$\frac{d(\mathbf{E_k}+\mathbf{E_p})}{dt}=P=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i,\vec{v}_i\right)=0$$

$$\frac{d(\mathbf{E_k}+\mathbf{E_p})}{dt}=P=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i,\vec{v}_i\right)=P_1+P_2+P_3+P_{11,j}+P_{22,j}+P_{33,j}=0$$

$$P_1+P_2+P_3+P_{11,j}+P_{22,j}+P_{33,j}=-4mg\dot{x}\sin\alpha+4mg\dot{x}-6m\dot{x}\ddot{x}-m\dot{x}\ddot{x}-4m\dot{x}\ddot{x}=0$$

$$P_1+P_2+P_3+P_{11,j}+P_{22,j}+P_{33,j}=\left[4mg(1-\sin\alpha)-11m\ddot{x}\right]\dot{x}=0$$

Da bi smo odredili sile u užadima, napravićemo dekompoziciju sistema na sastavne proste podsisteme-diskove i teg, ''presecanjem'' užadi i zamenom destva veza realizovanih preko užadi parovima suprotnih sila u užadima. Zatim ćemo na osnovu principa dinamičke ravnoteže za svaki od podsistema napisati jednačine dinamičke ravnoteže sila uključujući i aktivne i reaktivne sile, kao i sile inercije. Iz tih jednačina odredjujemo nepoznate sile u užadima, kao i odgovarajuće sile inercije. Medjutim kako smo već odredili ubrzanje sistema, dovoljno je iz tih sistema koristiti samo one jednačine, koje su potrebne da odredimo nepoznate sile u uzadima i još jednu, kojom ćemo proveriti tačnost odredjenih sila u užadima.

Primenjujući princip dinamičke ravnoteže za dinamikčku ravnotežu tega, na koji dejtvuje aktivna sila težine teha $4mg$, sila inercije $-4m\ddot{x}$ i sila veze – sila u užetu S_2, dobijamo sledeću jednačinu:

$$4m\ddot{x}=4mg-S_2$$

Iz prethodne jednačine, s obzirom da smo već ranije odredili ubrzanje sistema $\ddot{x}=\frac{4}{11}g(1-\sin\alpha)$, nije teško dobiti silu u delu užeta koje nosi teg u obliku:

$$S_2=\frac{4}{11}mg(7+4\sin\alpha)$$

Primenjujući princip dinamičke ravnoteže za dinamikčku ravnotežu drugog diska, koji se obrće oko svog centra masa C_2, a na koji dejstvuju dve obimne sile S_1 i S_2 u delovima užadi čineći momente obrtanja oko centra masa C_2, kao i sile inercije koje redukovane na centar masa C_2, takodje čine jedan spreg momenta $-\mathbf{J}_{C_2}\ddot{\varphi}_{C_2}$, kao i sila težine i sila otpora zgloba u C_2 , koje prolaze kroz isti, pa je njihov moment jednak nuli, te možemo da napišemo sledeću jednačinu dinamičke ravnoteže momenata sila oko ose kroz centar masa C_2 tog diska:

$$\mathbf{J}_{C_2}\ddot{\varphi}_{C_2}=(S_2-S_1)r$$

Iz prethodne jednačine, a kako smo već odredili silu u drugom delu užeta $S_2=\frac{4}{11}mg(7+4\sin\alpha)$, nije teško odrediti silu S_1 u prvom delu nerastegljivog užeta u sledećem obliku:

$$S_1 = \frac{4}{11} mg(6 + 5\sin\alpha)$$

Time smo odredili obe nepoznate sile u pojedinim delovima užadi. Ostaje nam još da proverimo tačnost, dobijenih izraza, a to možemo uraditi primenom principa dinamičke ravnoteže na dinamičku ravnotežu prvog diska. Na prvi disk koji je kotrlja bez klizanja po stmoj ravni dejstvuju sledeće sile: sula težine $4mg$, sila u prvom delu užeta S_1 , sila otpora strme ravni F_{N1}, sila otpora kotrljanju bez klizanja F_{k1} i sile inercije od translacije i rotacije, koje kada se redukuju na trenutni pol P_1 brzina (rotacije diska oko trenutne ose rotacije) cine spreg momenta $-\mathbf{J}_{P_1}\dot{\omega}_{P_1}$. Sila otpora strme ravni i sila otpora kotrljanju diska bez klizanja prolaze kroz tu tačku P_1, pa je njihov moment sila za tu tačku P_1 jednak nuli. Jednačina dinamičke ravnoteže momenata sila za trenutni pol P_1 daje sledeće:

$$\mathbf{J}_{P_1}\dot{\omega}_{P_1} = (S_1 - 4mg\sin\alpha)r$$

odakle dobijamo da je:

$$S_1 = \frac{4}{11} mg(6 + 5\sin\alpha)$$

čime smo potvrdili tačnost prethodno dobijenih izraza za sile u užadima i ubrzanje sistema.

TREĆI ZADATAK. Na slici 3. prikazana je homogena tanka pločica, мace M , konture $ACBE$, a oblika jednakokrakih trouglova, AEB i ACB jednakh osnovica $2a$ pri čemu je prvi trougao visine $3a$,dok je drugi visine $h = ?$, takve, da je centar masa te plošice u temenu manjeg trougla ACB

Pločica je kruto učvršćena na lakom vratilu, tako da je osa vratila na istom pravcu kao i osnovice konturnih trouglova pločice. Vratilo je sa ležištima, nepokretnim u A i cilindričnim u B , na međusobnom rastojanju $4a$. Odrediti:

a* period oscilovanja pločice oko ose vratila, kada je ta osa horizontalna.

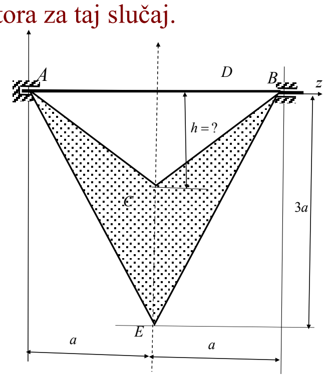
b*kolika treba da je masa materijalnih tačaka m , koje treba dodati na lakim krutim štapovima zanemarljive mase, dužine ℓ da bi pločica oko horizontalne ose vratila bila uravnotežena, slika 3.b *? Da li dužina štapa-prepusta ℓ treba da zadovoljava neki uslov? Da li bi pločica bila uravnotežena ako bi se obrtala oko ose vratila, koja nije horizonatalno,? Obrazloži odgovor!

c* vektor momenta inercije mase tela za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu A ;

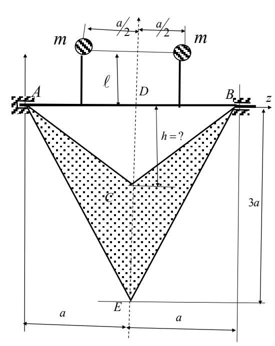
d* kinetičke pritiske na ležošta vratila za slučaj rotacije polčice slučan rotacije pločice jenakoubrzano oko horizontalne ose (na slici 3. a*) početnom ugaonom brzinom ω_0 i ugaonim ubrzawem ε_0 ;.

e* devijacioni spreg koji desjtvuje na ležošta vratila za slučaj jenakoubrzano oko horizontalne ose (na slici 3. a*);

f* intenzitet vektora rotatora za taj slučaj.



Slika 3. a*



Slika 3. b*

Pre nego štp predjemo na rešavanje konkretnog zadatka, potrebno je odrediti visinu $h=?$ izvadjenog trougla iz uslova da je težište posmatrane homogene tanke pločice u temenu tog trougla , odnosno da je $y_C=h=?$. To znači da treba da je:

$$y_C=h=\frac{\sum_{i=1}^{2}A_i y_i}{\sum_{i=1}^{2}A_i}=\frac{3a^2a-ah\dfrac{h}{3}}{2a^2-ah}=h$$

odakle dobijamo sledeću kvadratnu jednačinu, po nepoznatoj visini $h=?$ manjeg trougla:

$$3a(3a-h)=9a^2-h^2$$

odnosno

$$2h^2=9ah+9a^2=0$$

Koreni te kvadratne jednačine su:

$$h_{1,2}=\frac{9a\mp a\sqrt{81-72}}{4}=\frac{9}{4}a\mp\frac{3}{4}a=\begin{cases}\dfrac{3}{2}a\\ 3a\end{cases}$$

Od dva dobijena korena, vidimo da prvi, manji koren odgovara realno pločici, dok drugi koren predstavlja degeneraciju pločice izjednačavanjem manjeg i većeg trougla, te je samo matematičo rešenje, ali i neupotrebljivo za nas postavljen zadatak.

Da bi smo odredili period oscilovanja pločoce potrebno je da odredimo aksijalni moment inercije pločice za osu oscilovanja. Kako oba knturna trougla pločice imaju osnovice na zajedničkoj osi oscilovanja pločice kao fizičkog klatna, pa je lako odrediti aksijalni moment inercije pločice koisteći aksijalne momente inercije površina trouglova za ose koje prolaze pravcem osnovice trougla i dobijeni rezutat pomnožiti površinskom gustinom homogene pločice. Površinska gustna pločice je:

$$\rho=\frac{M}{A}=\frac{2M}{3a^2}$$

te je aksijalni moment inercije pločice za osu oscilovanja :

$$\mathbf{J}_u=\rho\left(I_u^{\Delta_1}-I_u^{\Delta_1}\right)=\frac{2M}{3a^2}\frac{1}{12}\left[2a(3a)^3-2a\left(\frac{3}{2}a\right)^3\right]=\frac{21}{8}Ma^2$$

Redukovana dužina fizičkog klatna je (vidi precavanja o fozičkom klatnu):

$$\ell_r=\frac{\mathbf{J}_u}{My_C}=\frac{7a}{4}$$

Kružna frekvencija malih oscilacija pločice oko ose u je:

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell_r}}=\sqrt{\frac{4g}{7a}}$$

dok je period oscilovanja za male elongacije:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{7a}{4g}}$$

Vektor momenta inercije mase pločice za pol u neporetnom ležištu vratila i osu rotacije pločice i vratila ima kolinearni deo sa osom, koji je jednak aksijalnom momentu inercije $\mathbf{J}_u$ mase pločice za tu osu i devijacioni deo koji je upravan na osu i leži u devijacionoj ravni za tu pločicu i osu i pol u nepokretnom lištu, a jednak je centifugalnom momentu za par osa od kojih je jedna osa rotacije, a druga osa upravna na istu a kroz nepokretno ležište)vidi predavanja o vektorima momenata masa i kinetičkim pritiscima na ležišta vratila). S obzirom da smo postavili ravan pločice u ravni $u-v$ to treba odrediti centrifugalni moment pločice za te dve ose. Imajući u vidu da pločica ima jednu osu aksijalne simetrije, koja prolazi kroz centar masa pločice (težište), to je centrifugalni moment masa pločice za centralne ose jednak nuli, pa je za odredjivanje devijacionog dela vektora momenta inercije mase za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu dovoljno odrediti položajni deo, koji je jednak proivodu mase pločice i koordinata njenog težišta u odnosu na taj sistem koordinata. Na osnovu toga pišemo:

$$\mathbf{J}_{Auv} = \mathbf{J}_{Cuv} + My_C u_C = \frac{3}{2}Ma^2$$

Vektor momenta inercije mase pločice za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu A je sada:

$$\vec{\mathfrak{J}}_A^{(\vec{u})} = \mathbf{J}_u\vec{u} + \mathbf{D}_{uv}\vec{v} = \frac{21}{8}Ma^2\vec{u} + \frac{3}{2}Ma^2\vec{v} = \mathbf{J}_u\vec{u} + \vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}$$

Devijacioni deo vektora momenta inercije mase za pol u neporetnom ležištu vratila i osu rotacje je:

$$\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})} = \frac{3}{2}Ma^2\vec{v}$$

Prema teoriji uz korišćenje vektora momenata inercije masa pločice dobili smo (vidi predavanja) da su kinetički pritisci na ležišta vratila usled rotacije pločice ugaonom brzinom ω i ugaonim ubrzanjem $\dot{\omega}$ su:

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_{A(dev)} = \frac{1}{r_{AB}}\left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}\right|\mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_{01} = \frac{1}{r_{AB}}\left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_{01}\sqrt{\dot{\omega}^2+\omega^4}$$

$$\vec{F}_{A(S-dev)} = \left|\vec{\mathfrak{S}}_A^{(\vec{u})}\right|\mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_{02} = \left|\vec{\mathfrak{S}}_A^{(\vec{u})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_{02}\sqrt{\dot{\omega}^2+\omega^4}$$

dok je devijacioni spreg para devijacionih komponenata kinetičkih pritisaka na ležišta vratia , usled inercionih svojstava pločice u odnosu na osu rotacije intenziteta

$$\mathfrak{M}_{dev} = \left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}\right|\mathfrak{R} = \left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}\right|\sqrt{\dot{\omega}^2+\omega^4}$$

Kako je zadato da se vratilo i pločica obrću jednoliko ubrzano početnom ugaonom brzinom ω_0 i ugaonim ubrzawem ε_0 , to nije teško dobiti kinetičke pritiske i devijacioni spreg koji dejstvuju na ležista vratila pločice. Za posmatrani slučaj kinetike rotacije pločice jednako ubrzano, kinetički pritisci na ležišta vratila su:

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_{A(dev)} = \frac{3}{4}Ma\sqrt{\varepsilon_0^2+(\varepsilon_0 t+\omega_0)^4}\,\vec{\mathfrak{R}}_{01}$$

$$\vec{F}_{A(S-dev)} = \frac{3}{2}Ma\sqrt{\varepsilon_0^2+(\varepsilon_0 t+\omega_0)^4}\,\vec{\mathfrak{R}}_{02}$$

dok je devijacioni spreg intenziteta

$$\mathfrak{M}_{dev} = \frac{3}{2}Ma^2\sqrt{\varepsilon_0^2+(\varepsilon_0 t+\omega_0)^4}$$

Uslov da je materijalni sistem, koji se sastoji od prethodno definisane pločice i dve dodate materijalne tačke na lakim krutim prepistima je, da je centar masa pločice na osi rotacije, i da je osa rotacije glavna osa inercije za pol u nepokretnom ležištu, odnosno da je centrifugalni devijacioni deo vektora momenta inercije mase materijalnog tela za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu kolinearan sa osom, odnosno fa je devijacioni deo jednak nuli.

Na osnovu ovoga pišemo tri uslova od kojih se dva svode na isti uslov za slučaj da je ceo sistem u jednoj ravni, uklučujući i osu rotacije.

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = 0$$

$$\mathbf{D}_{uv} = 0$$

$$\mathbf{J}_{u1}^{\ell} = \mathbf{J}_{u2}^{d}$$

Za naš konkretni zadatak dobijamo sledeća dva uslova:

$$4m\ell = 2Ma$$

$$32m\ell^2 = 63Ma^2$$

Na osnovu tih uslova dobijamo da je uslov uravnoteženja posmatranog materijalnog objekta – pločoca sa pridodatim materijalnim tačkama, da je

$$m = \frac{2}{9} M$$

$$\ell = \frac{27}{8} a$$

Напомена: *Писмени део испита траје 4 сата. Дозвољено је коришћење само штампане литературе (уџбеник и таблице). Студенти који имају одложен усмени део испита дужни су да то видно означе на корицама писменог задатка, заједно са бројем поена, као и подацима о испитном року у коме су стекли то право. Такође,* ***НАПОМИЊЕМО*** *да је студент који има одложен усмени део испита* ***обавезан да ради писмени део испита и у испитном року у коме ће полагати усмени део испита*** *и да се труди да исти што боље уради.*

Писмени део испита је елиминаторан. Студент остварује право на полагање усменог дела испита и позитивну оцену писменог дела испита ако оствари најмање 18 поена од укупно 30 поена (три задатка по десет поена) или ако тачно реши и уради најмање два цела испитна задатка. Студент који оствари право *«условно позван на усмени део испита»* ***као доквалификацију*** за остварење права на усмени део испита ради један теоријски задатак у трајању од једног часа и без коришћења литературе.

Резултати писменог дела испита биће саопштени у писменом облику на огласној табли факултета до 12 часова. један дан по одржаном писменом делу испита, ако дежурни асистент или наставник не саопшти другачије. Студенти који желе да добију објашњење у вези са оценом писменог дела испита или да поново виде свој писмени рад, потребно је да се обрате предметном наставнику, или асистенту у време редовних консултација са студентима. То право треба искоридтити до термина одржавања усменог дела испита. Ако студент није искористио то право до почетка усменог дела испита сматраће се није хтео да коридти то право. Термини консултација наставника су: понедељак 10-12 h, и петак 10-12 h у кабинету 221. Консултације асистента су у кабинету 307: понедељком 10-12 h, средом 10-12 h.

Термин за полагање усменог дела испита по правилу први понедељак после писменог дела испита, а са почетком у 8,00 часова, ако студенти не изразе другачији захтев и договоре се са предметним наставником. На усменом делу испита није дозвољено коришћење литературе нити прибележака. За успешнију припрему испита из Механике III – Динамике пожељно је да су студенти положили испите из претходне године.

Резултате писменог дела испита, текстове испитних задатака и огледне примере решених испитних задатака из претходних испитних рокова, студенти могу наћи на **WEB** презентацији предмета Механика III – Динамика, а на адреси **www.masfak.ni.ac.yu** или интернет страници **http:/www.hm.co.yu/mehanika.**