МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У НИШУ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
Испитни рок Октобарски ***испитни рок (22. септембар) 2008.***
Предметни наставник: ***Проф. др Катица (Стевановић) Хедрих***, *академик Академије наука високих школа и универзитета Украјине, академик Академије нелинеарних наука Москва, члан GAMM, Int. ASME, EuroMech, American Academy of Mechanics, M.C. Chaki Centre for Mathematics and Mathematical Sciences u Tensor Society.*
Предметни асистент: Мг ***Јулијана Симоновић,*** асистент-приправник (на одсуству)

ПИСМЕНИ ДЕО ИСПИТА ИЗ ПРЕДМЕТА

МЕHANIKA III - ДИНАМИКА

MEHANIKA III - DINAMIKA

PRVI ZADATAK. Disk mase $2m$, poluprečnika R, puštena je početnom brzinom $\vec{v}_0$, centra mase C_0, u polju Zemljine teže, iz položaja , A na visini h_0 centra mase C_0, u odnosu na referentni horzont, da se kotrlja bez klizanja niz glatku strmu ravan, koja sa horizontom zaklapa ugao α , ostajući za vreme kretanja u vertikalnoj ravni. Linija $A\ N\ B$ sa slike 1. je u vertikalnoj ravni. Strma ravan se, u tački M , nastavlja u cilindričnu površ poluprečnika $R = R = 6r$, centralnog ugla $\alpha + \pi$, tako da vertikala lroz centar krivine luka, deli taj ugao u odnosu $\alpha : \pi$, kao što je na slici 1. ptikazano.

a* Koji uslov treba da zadovoljava početna brzina $\vec{v}_0$ centra mase C_0 diska, da bi se dik kotrljao po strmoj ravni, zadržavši svoje položaje kroz koje prolazi u vertikalnoj ravni?

b * Koliko stepeni slobode kretanja ima disk dok se kotrlja niz strmu ravan i po cilindričnoj površi, a koliko stepeni kada napusti tu površ po prolasku kroz položaj B ? Obrazloži odgovor. Navedi veze kojima je podvrgnut disk pri kretanju, kao i za koliko stepeni slobode kretanja svaka od veza smanjuje njihov broj..

c* Napisati kinetičku i potencijalnu energiju diska pro kotljanju niz strmu ravan, po cilidričnoj površi i po napustanju iste, a u položajima A (početni položaj), L (proizvoljan položaj na strmpj tavnni), N (položaj odredjen uglom φ na cilindričnoj površi), B i D (kada napusti cilindričnu površ). Da li je sistem konzervativan? Ako je odgovor DA, napisati integral energije;

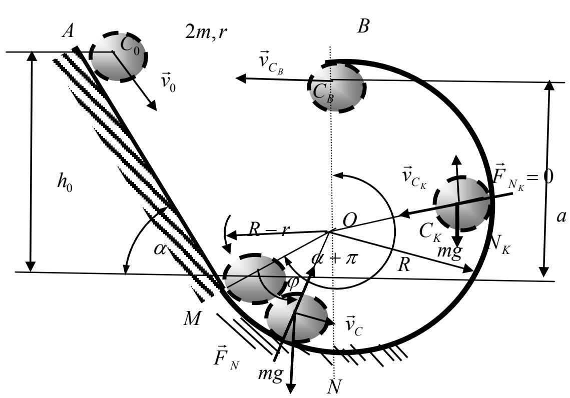
d* Odrediti brzine centra diska, kao i ugaonu brzinu sopstvene rotacije diska, pri njenom prolasku kroz tačku N odredjenu uglom φ na cilindričnoj površi, kao i pri prolasku kroz tačku B u kojoj napušta cilindričnu površ;

e* Odrediti jednačine kretanja diska po napuštanju cilindrične površi u tački B .

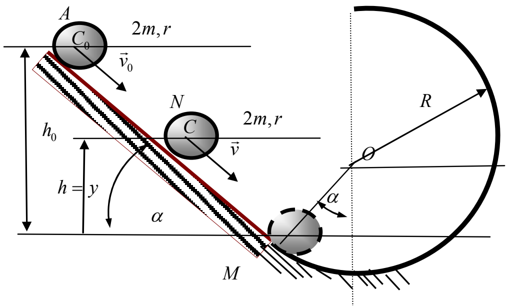
f* Kolika je ugaona brzina sopstvenog obrtanja diska u trenutku udara u kosu ravan, po našustanju cilindrične površi?

g* Kolika je sila pritiska na cilindričnu površ u proizvoljnom polžaju diska na njoj?

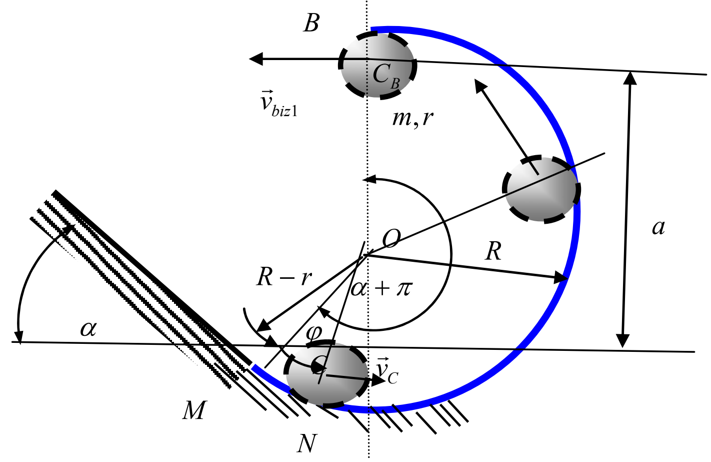
h* Koliki treba da bude ugao α , odnosno početna brzina $\vec{v}_0$ centra mase C_0 diska te da se disk odvoji od cilindrične površi pre pre dospeća u tačku B (njenog kraja)?



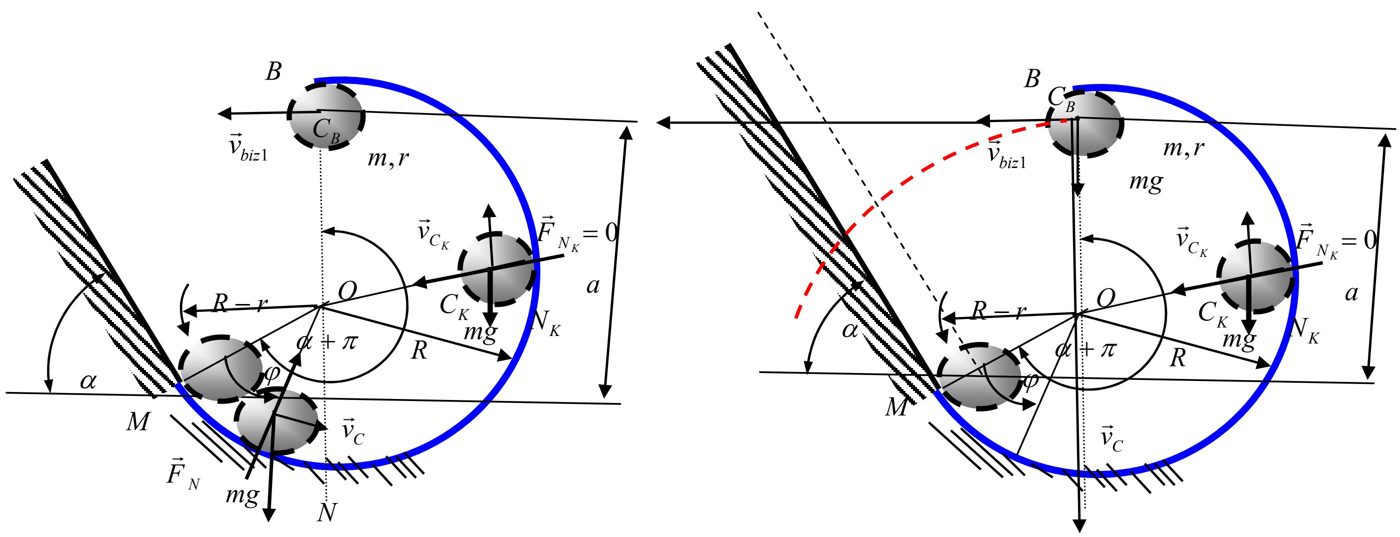
Slika 1.



Slika 1. a* Disk u vertikalnoj ravni i kotrlja se bez klizanja po strmoj ravni – još dva stepena slobode kretanja manje – sistem ima jedan stepen slobode kretanja – Prva faza kretanja



Slika 1. b* **D**isk u vertikalnoj ravni i kotrlja se bez klizanja po cilindričnoj površi – sistem sa jednim stepenom slobode kretanja



Slika 1. c* Disk prestaje da se kotrlja po cilindričnoj površi napuštajući jednostrano zadržavajuću vezu kada sila pritiska (otpor veze) postane jednak nuli.

REŠENJE PRVOG ZADATKA: Zadati materijalni sistem vrši ravansko kretanje i ima jedan stepen slobode kretanja, jer su nametnute veze disku smanjile pet stepeni slobode kretanja, jer mu veze smanjuju za pet broj stepeni slobode kretanja, te mu je preostao samo jedan spen slobode kretanja kotrljanje bez klizanja po strmoj ravni, i u vertikalnoj ravni. Za generalisanu koordinatu u fazi kretanja diska po strmoj ravni usvojimo koordinatu x, pomeranje centra mase diska C u pravcu paralelnom strmoj ravni u vertikalnoj ravni i usmerenu niz kosu racan.

Da bi smo odredili broj stepeni slobode kretanja ovog sistema, možemo postupiti i na sledeći način. Ako učvrstimo disk u njegovom centru mada, on se ne može lretati'kotrljati bez klizanja po strmoj ravni. To znači da smo mu time sputali jedan stepen slobode pokretljivosti, pa znači da sistem ima jedan stepen slobode kretanja.

Brzina centra diska C je: $v_C = \dot{x}$. S obzirom da je strma raven nezadržavajuća veza, da bi disk ostao da se kotrlja po toj ravni potrebno je da je početna brzina (u početnom trenutku) njegovog centra mase paralelna strmoj ravni, jer da joj nije paralelna i da je usmerena od ravni, disk bi napustio vezu I odvojio se od ravni.

Aksijalni moment inercije mase diska za horizontalnu osu kroz centar mase diska, odnosno kroz trenutni pol brzine su:

$$\mathbf{J_C} = \frac{2mr^2}{2} \quad \text{i} \quad \mathbf{J}_P = \frac{3 \cdot 2mr^2}{2}$$

Kinetička energija sistema je jednaka zbiru kinetičke energije translacije brzinom centra mase diska i kinetičke ekergije rotacije oko ose upravne na površ diska i kroz centar mase diska :

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}\mathbf{J_C}\omega_C^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{3}{2}mv_C^2 = \frac{3}{2}m\dot{x}^2,$$

ili kinetičkoj energiji rotacije diska oko ose upravne na površ diska i kroz trenutni pol P brzine pri kotrljanju diska po strmoj ravni:

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_P\omega_P^2 = \frac{3}{2}mv_C^2 = \frac{3}{2}m\dot{x}^2$$

jer su ugaone brzine ω_C odnosno ω_P obrtanja diska oko ose, upravne na površ diska, i kroz centar mase diska C, odnosno kroz trenutni pol brzine P diska:

$$\omega_C = \omega_P = \frac{v_C}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$$

Na sistem, od aktivnih sila dejstvuje samo sila Zemljine teže, koja je konzervativna sila i ima funkciju sile, odnosno potencijal. Potencijalna energija sistema je:

$$\mathbf{E_p} = 2mgh = 2mg(h_0 - x\sin\alpha)$$

i izražena je pomoću koordinate h u pravcu vertikale, ili pomoću koordinate x , koju smo izabrali za generalisanu koordinatu. Mogli smo umesto koordinate x za generalisanu koordinatu izabrati koordinatu h u pravcu vertikale.

Kako se, zadatkom, traži brzina v_C centra C masa diska, koristićemo integral energije, odnosno teoremu o ukupnoj mehanučkoj energiji sistema koja je konstantna za konzervativne sisteme sa idealnim vezama, i jednaka ukupnoj mehaničkoj energiji sistema, koju je sistem imao u poetnom trenutku kretanja. Na osnovu toga pišemo da je:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \mathbf{E_0} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}}$$

odnosno:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \frac{3}{2}mv_C^2 + 2mgh = \mathbf{E_0} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}} = \frac{3}{2}mv_{C0}^2 + 2mgh_0$$

odakle sledi da je:

$$v_C^2 = v_{C0}^2 + \frac{4}{3}g(h_0 - h)$$

odnosno

$$v_C = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}g(h_0 - h)}$$

Ako prethodnu vezu izrazimo preko generalisane koordinate x možemo da napišemo sledeće:

$$v_C = \dot{x} = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gx\sin\alpha}$$

Prethodnim obrascima smo odredili brzinu centra masa diska u funkciji generalisane koordinate za vreme kretanja diska po strmoj ravni. Brzina centra masa diska v_{CM} u položaju M , tački prelaska sa strme ravni na cilindričnu površ je:

$$v_{CM} = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0}$$

Za drugu fazu kotrljanja bez klizanja diska po cilindričnoj površi, sistem uma, takodje, jedan stepen slobode kretanja, i za tu fazu kretanja za generalisanu koordinatu izaberimo centralni ugao φ, koji poluprečnik koji prolazi kroz centar masa diska C i centar krivine cilindrične površi (lukea), čini sa sa poluprečnikom kroz centar masa diska kada je on u položaju M , ulaska na cilindričnu površ. Tu generalisanu koordinatu smo obeležili sa φ. U toj fazi kretanja, za generalisanu koordinatu smo mogli izabrati i krivolinijsku koordinatu luk s , koji je sa prethodno izabranom generalisanom koordinatim vezan sledećom vezom: $s(\varphi) = (R - r)\varphi$. Da napomenemo, da za sistem sa jednim stepenom slobode kretanja, što smo ovde utvrdili, da samo jednu koordinatu možemo proglasiti (izabrati) za generalisanu, a ostale koordinate položaja sistema izraziti preko izabrane koordinate. Izbor generalisane koordinate se prepusta volji onoga ko rešava zadatak, ali od izbora generalisane koordinate nekada zavisi i ''elegantnost'' i kraći put rešavanja zadatka, o čemu je vazno voditi računa.

Brzina centra C mase diska u funkciji generalisane koordinate φ pri kotrljanju bez klizanja doska po cilindričnoj površi je:

$$v_C = \frac{ds(\varphi)}{dt} = (R-r)\dot{\varphi}$$

dok su ugaone brzine obrtanja diska ω_C odnosno ω_P, obrtanja diska oko ose kroz centar mase diska C, odnosno kro trenutni pol brzine P diska:

$$\omega_C = \omega_P = \frac{v_C}{r} = \frac{(R-r)\dot{\varphi}}{r}$$

Kinetička energija sistema je jednaka zbiru kinetičke energije translacije brzinom centra mase diska i kinetičke ekergije rotacije oko ose, upravne na površ diska, kroz centar mase diska :

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{\mathbf{C}}\omega_C^2 + \frac{1}{2}2mv_C^2 = \frac{3}{2}mv_C^2 = \frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2$$

ili kinetičkoj energiji rotacije diska oko ose, upravne na površ diska, kroz trenutni pol P brzine pri kotrljanju diska po strmoj ravni:

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_P\omega_P^2 = \frac{3}{2}mv_C^2 = \frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2$$

Na sistem, i u ovoj fazi kretanja, od aktivnih sila dejstvuje samo sila Zemljine teže, koja je konzervativna sila i ima funkciju sile, odnosno potencijal. Potencijalna energija sistema je:

$$\mathbf{E_p} = -2mgh = 2mg(R-r)[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi)]$$

i izražena je pomoću koordinate h u pravcu vertikale, ili pomoću koordinate φ, koju smo izabrali za generalisanu koordinatu, jer se centar masa diska - koji je napadna tačka sile težine spušta, pomera (spušta) u vertikalnom pravcu za

$$(\downarrow)\, h = (R-r)[\cos(\alpha-\varphi) - \cos\alpha]$$

štp je uočljivo sa slike. Mogli smo umesto koordinate φ za generalisanu koordinatu izabrati koordinatu s u pravcu luka poluprečnika $(R-r)$ putanje koju opisuje centar masa diska pri kotrljanju po cilindričnoj površi. Tada je izraz za potencijalu energiju:

$$\mathbf{E_p} = -2mgh = 2mg(R-r)\left[\cos\alpha - \cos\left(\alpha - \frac{s}{R-r}\right)\right]$$

Kako se zadatkom, i u ovoj fazi kretanja, traži brzina v_C centra C masa diska pri kotrljanju bez klizanja po cilindričnoj površi, koristićemo integral energije, odnosno teoremu o šromeni ukupne mehanučke energije sistema, a kako je ta ukupna mehanička energija sistema konstantna za konzervativne sisteme i slučaj idealnih veza, i kako je jednaka ukupnoj mehaničkoj energiji sistema koju je sistem imao u poetnom trenutku kretanja. Na osnovu toga pišemo da je:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \mathbf{E_0} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}}$$

odnosno:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \frac{3}{2}mv_C^2 - 2mg(R-r)[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi)] = \mathbf{E_0} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}} = \frac{3}{2}mv_{C0}^2 + 2mgh_0$$

to sledi da je:

$$v_C^2 = v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi)]$$

odnosno

$$v_C = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi)]}$$

Ako prethodnu vezu izrazimo preko dužine luka - krivolinijske koordinate s možemo da napišemo sledeće:

$$v_C = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3} g h_0 - \frac{4}{3} g (R-r)\left[\cos\alpha - \cos\left(\alpha - \frac{s}{R-r}\right)\right]}$$

Prethodnim obrascima smo odredili brzinu centra masa diska u funkciji generalisane koordinate za vreme kretanja diska po cilindričnoj površi. Brzina centra masa diska v_{CB} u položaju B, tački izlaska diska sa cilindrične površi $\varphi = \alpha + \pi$ i prelaska na slobodno kretanje u vertikalnoj ravni je::

$$v_{CB} = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3} g h_0 - \frac{4}{3} g (R-r)(\cos\alpha + 1)}$$

dok je ugaona brzina ω_{CB} diska, odnosno ω_{PB}:

$$\omega_{CB} = \omega_{Pb} = \frac{v_{CB}}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3} g h_0 - \frac{4}{3} g (R-r)(\cos\alpha + 1)}$$

U trećoj fazi kretanja disk ima tri stepeni slobode kretanja, jer se kreće u vertikalnoj ravni izvodeći ravansko kretanje početnom brzinom centra masa

$$v_{CB} = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3} g h_0 - \frac{4}{3} g (R-r)(\cos\alpha + 1)}.$$

u horizontalnom ptavcu i ugaonom brzinom sopstvenog obtzanja oko sopstvene ose kroz centar masa C, koja iznosi:

$$\omega_{CB} = \frac{1}{r}\sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3} g h_0 - \frac{4}{3} g (R-r)(\cos\alpha + 1)}$$

Za generalisane koordinate u trećoj fai kretanja, sada takodje ravanskog kretanja, ali sa tri stepeni slobode kretanja u vertikalnoj ravni za generalisane koordinate biramo dve koordinate pomeranja centra masa diska u dva ortogonalna pravca x_C i y_C i ugao φ_C obrtanja diska oko ose upravne na vertikalnu ravan kretanja kroz njegov centar masa C. Na disk dejstvuje samo aktivna sila sopstvene težine mg, a veza sa cilindričnom površi je idealna.

Diferencijalne jednačine ravanskog kretanja diska u vertikalnoj ravni i sa tri stepeni slobode kretanja su:

$$m\ddot{x}_C = 0$$
$$m\ddot{y}_C = -mg$$
$$\mathbf{J_C}\ddot{\varphi}_C = 0$$

odnosno

$$\ddot{x}_C = 0$$
$$\ddot{y}_C = -g$$
$$\ddot{\varphi}_C = 0$$

Integraljenjem diferencijalnih jednačina prethodnog sistema dobijamo sledeće:

$$\dot{x}_C = C_1$$
$$\dot{y}_C = -gt + C_2$$
$$\dot{\varphi}_C = C_3$$

Još jednim integraljenjem diferencijalnih jednačina prethodnog sistema dobijamo sledeće:

$$x_C = C_1 t + C_4$$
$$y_C = -g\frac{t^2}{2} + C_2 t + C_5$$
$$\varphi_C = C_3 t + C_6$$

U prethodnim jednačinama pojavilo se šest integracionih konstanti, C_k, $k=1,2,3,4,5,6$, koje treba odrediti iz pčetnih uslova.

$$x_C(0)=0$$
$$y_C(0)=0$$
$$\varphi_C(0)=0$$
$$\dot{x}_C(0)=v_{CB}=\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{4}{3}g(R-r)(\cos\alpha+1)}$$
$$\dot{y}_C(0)=0$$
$$\varphi_C(0)=\omega_{CB}=\frac{1}{r}\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{4}{3}g(R-r)(\cos\alpha+1)}$$

Iz početnih određujemo nepoznate integracione konstante C_k, $k=1,2,3,4,5,6$ u sledećem obliku:

$$C_4=0,\ C_5=0,\ C_6=0$$
$$C_1=v_{CB}=\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{4}{3}g(R-r)(\cos\alpha+1)}$$
$$C_2=0$$
$$C_3=\omega_{CB}=\frac{1}{r}\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{4}{3}g(R-r)(\cos\alpha+1)}$$

Jednačine kretanja,posle unošenja vrednosti određenih integracionih konstanti C_k, $k=1,2,3,4,5,6$ su sada u obliku:

$$x_C(t)=v_{CB}t==t\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{4}{3}g(R-r)(\cos\alpha+1)}$$
$$y_C(t)=-g\frac{t^2}{2}$$
$$\varphi_C(t)=\omega_{CB}t=\frac{t}{r}\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{4}{3}g(R-r)(\cos\alpha+1)}$$

Disk se sada obrće konstantnom ugaonom brzinom:

$$\dot{\varphi}_C(t)=\omega_{CB}=\frac{1}{r}\sqrt{v_{C0}^2+\frac{4}{3}gh_0-\frac{4}{3}g(R-r)(\cos\alpha+1)}=const$$

Da bi smo odredili silu pritiska diska na cilindričnu površ oslobodimo disk veza i umesto veza postavimo odgovarajuće reakcije veza. To su normalna komponenta otpora veze F_N upravna na putanju centra masa diska , i sila otpora kotrljanju F_K koja pada u pravac tangente na cilindričnu površ. Sada koristimo princip dinamičke ravnoteže i pišemo jednačine dinamičke ravnoteže sila koje dejstvuju na disk u radijalnom, tangencijalnom pravcima, kao i jednačinu ravnoteže momenata sila oko ose kroz centar masa diska. Na osnovu toga pišemo sledeće:

$$2ma_{CT}=2m(R-r)\ddot{\varphi}=2mg\sin(\alpha-\varphi)-F_k$$
$$2ma_{CN}=2m\frac{v_C^2}{(R-r)}=2m(R-r)\dot{\varphi}^2=F_N-2mg\cos(\alpha-\varphi)$$
$$J_C\ddot{\varphi}_C=J_C\frac{(R-r)\ddot{\varphi}}{r}=F_k r$$

S obzirom da smo koristeći teoremu o ukupnoj mehaničkoj energiji konzervativnog sistema sa idealnim vezama odredili brzinu v_C centra mease diska, to ne moramo integraliti diferencijalne jednačine prethodnog sistema diferencijalnih jednačina, već ćemo koristiti samo drugu jednačinu iz koje dredjujemo otpor veze F_N – cilindrične površi u funkciji generalisane koordinate φ, kao i prethodno odredjen izraz za brzinu centra mase diska v_C, takodje u funkciji generalisane koordinate φ. Na osnovu toga dobijamo:

$$F_N = 2m\left[\frac{v_C^2}{(R-r)} + g\cos(\alpha-\varphi)\right]$$

a kako je:

$$v_C = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi)]}$$

to sledi da je:

$$F_N = 2mg\cos(\alpha-\varphi) + \frac{2m}{(R-r)}\left[v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi)]\right]$$

odnosno, posle sredjivanja za silu pritiska dobijamo sledeci izraz:

$$F_N = \frac{2m}{(R-r)}\left[v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4}{3}g(R-r)[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi)] + (R-r)g\cos(\alpha-\varphi)\right]$$

Posle sredjivanja dobijamo sledeći izraz za silu pritiska diska na cilindričnu površ, pri njegovom kotrljanju bez klizanja:

$$F_N = \frac{2m}{(R-r)}\left[v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{1}{3}g(R-r)[4\cos\alpha - 7\cos(\alpha-\varphi)]\right]$$

Silu otpora kotrljanju diska bez klizanja po cilindričnoj površi, odredjujemo iz poslednje jednačine prethodnog sistema jednačina dobijenih na osnovu principa dinamičke ravnoteže:

$$J_C\ddot{\varphi}_C = J_C\frac{(R-r)\ddot{\varphi}}{r} = F_k r$$

odakle je

$$F_k = J_C\frac{(R-r)\ddot{\varphi}}{r^2} = mr^2\frac{(R-r)}{r^2}\ddot{\varphi}$$

Zatim unošenjem u prvu jednačinu dobijamo:

$$2m(R-r)\ddot{\varphi} = 2mg\sin(\alpha-\varphi) - F_k$$

$$2m(R-r)\ddot{\varphi} = 2mg\sin(\alpha-\varphi) - mr^2\frac{(R-r)}{r^2}\ddot{\varphi}$$

$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\varphi} = g\sin(\alpha-\varphi)$$

Diferencijalna jednačina kretanja centra mase diska pri njegovom kotrljaju bez klizanja po cilindričnoj površi je:

$$\ddot{\varphi} - \frac{2}{3(R-r)}g\sin(\alpha-\varphi) = 0$$

Za silu kotrljanja diska bez klizanja po cilindričnoj površi možemo da napišemo sledeći izraz:

$$F_k = m(R-r)\ddot{\varphi} = \frac{2}{3}mg\sin(\alpha-\varphi)$$

Diferencijalnu jednačinu kretanja centra mase diska u funkciji generalisane koordinate nije teško integraliti, jer razdvaja promenljive, na sledeći način:

$$\ddot{\varphi} - \frac{2}{3(R-r)}g\sin(\alpha-\varphi) = 0 \text{ - } 2\dot{\varphi}dt = 2d\varphi$$

$$2\ddot{\varphi}\dot{\varphi}dt - \frac{2}{3(R-r)}g\sin(\alpha-\varphi)2d\varphi = 0$$

$$2\dot{\varphi}d\dot{\varphi} - \frac{2}{3(R-r)}g\sin(\alpha-\varphi)2d\varphi = 0$$

$$\int_{\dot\varphi_M}^{\dot\varphi} 2\dot\varphi d\dot\varphi - \frac{2}{3(R-r)} g \int_0^{\varphi} \sin(\alpha-\varphi) 2 d\varphi = 0$$

Granice integraljenja smo odredili od položaja pri ulasku u cilindričnu površ gde je generalisana koordinata - ugao $\varphi = 0$ do prouzvoljnog položaja odredjenog generakusanm koordinatim - uglom φ, kada je ugaina brzina okretanja centra masa oko centra krivine njegove putanje O vezana sa njegovom brzinom: $v_C = (R-r)\dot\varphi$. Posle naznačenog integraljenja dobijamo:

$$\dot\varphi^2 - \dot\varphi_M^2 + \frac{4}{3(R-r)} g[\cos(\alpha-\varphi) - \cos\alpha] = 0$$

odnosno

$$\dot\varphi^2 = \dot\varphi_M^2 - \frac{4}{3(R-r)} g[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi)]$$

odnosno

$$(R-r)^2\dot\varphi^2 = (R-r)^2\dot\varphi_M^2 - \frac{4(R-r)}{3} g[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi)]$$

odnosno

$$v_C^2 = v_{CM}^2 - \frac{4(R-r)}{3} g[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi)]$$

$$v_C = \sqrt{v_{CM}^2 - \frac{4(R-r)}{3} g[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi)]}$$

Kako je:

$$v_{CM} = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3} g h_0}$$

to sledi da je:

$$v_C = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3} g h - \frac{4(R-r)}{3} g[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi)]}$$

Vidimo da je ovaj izraz isti kao onaj koji smo dobili iz teoreme o ukupnoj mehaničkoj energiji konzervativnog sistema sa idealnim vezama.

Sada da se vratimo na analizu intenziteta sile pritiska F_N, za koju smo odredili sledeći analitički izraz:

$$F_N = \frac{2m}{(R-r)}\left[v_{C0}^2 + \frac{4}{3} g h_0 - \frac{1}{3} g (R-r)[4\cos\alpha - 7\cos(\alpha-\varphi)]\right] > 0$$

Da se disk nebi odvojio od cilindrične površi, koja je jednostrano zadržavajuća veza, intenzitet ove sile pritiska mora da bude veći od nule. Iz tog uslova dobijamo sledeću relaciju:

$$v_{C0}^2 + \frac{4}{3} g h_0 - \frac{1}{3} g (R-r)[4\cos\alpha - 7\cos(\alpha-\varphi)] > 0$$

odnosno:

$$\frac{3v_{C0}^2}{7(R-r)g} + \frac{4h_0}{7(R-r)} - \frac{4}{7}\cos\alpha > -\cos(\alpha-\varphi) \le 1$$

Da bi postojao položaj u kome bi se disk odvojio od cilindrične, površi potrebno je da zadovoljena relacija

$$\frac{3v_{C0}^2}{7(R-r)g} + \frac{4h_0}{7(R-r)} - \frac{4}{7}\cos\alpha = -\cos(\alpha-\varphi) \le 1$$

odakle sledi

$$\frac{3v_{C0}^2}{7(R-r)g} + \frac{4h_0}{7(R-r)} - 4\cos\alpha \le 1$$

odnosno

$$\cos\alpha \le 1 - \frac{3v_{C0}^2 + 4gh_0}{28(R-r)g}$$

Ovo je uslov koji ograničava veličinu ugla α u odnosu na početnu brzinu centra mase diska i visinu početnog položaja za kotrljanje diska bez klizanja niz strum raven da u fazi kretanja kotrljanja bez klizanja diska po cilindričnog površi nebi došlo do odvajanja diska od nje i veza dejstvovala kao jednostrano zadržavajuća, odnosno nezadržavajuća.

Ako je zadovoljen uslov

$$F_N = \frac{2m}{(R-r)}\left[v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{1}{3}g(R-r)[4\cos\alpha - 7\cos(\alpha-\varphi)]\right] = 0$$

to dolazi do odvajanja diska od cilindrične površi po kojoj se kotrljao bez klizanja i potrebno je odrediti i brzinu centra masa diska pri njegovom odvajanju od veze, kao i ugao na kome nastupa to odvajanje.

Kako je

$$\cos(\alpha-\varphi_K) = \frac{3v_{C0}^2}{7(R-r)g} + \frac{4h_0}{7(R-r)} - \frac{4}{7}\cos\alpha \le 1$$

to je brzina centra mase diska kojom se disk odvaja od cilindrične površi to dobijamo sledeći izraz:

$$v_{CK} = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4(R-r)}{3}g[\cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi_K)]}$$

$$v_{CK} = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \frac{4(R-r)}{3}g\left[\cos\alpha - \frac{3v_{C0}^2}{7(R-r)g} - \frac{4h_0}{7(R-r)} + \frac{4}{7}\cos\alpha\right]}$$

$$v_{CK} = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh - \frac{4(R-r)}{3}g\left[\frac{11}{7}c\cos\alpha - \frac{3v_{C0}^2}{7(R-r)g} - \frac{4h_0}{7(R-r)}\right]}$$

$$v_{CK} = \sqrt{v_{C0}^2 + \frac{4}{3}gh_0 - \left[\frac{44(R-r)g}{21}c\cos\alpha - \frac{4v_{C0}^2}{7} - \frac{11gh_0}{21}\right]}$$

$$v_{CK} = \sqrt{\frac{11}{7}v_{C0}^2 + \frac{39}{21}gh_0 - \frac{44(R-r)g}{21}c\cos\alpha}$$

$$\frac{11}{7}v_{C0}^2 + \frac{39}{21}gh_0 \ge \frac{44(R-r)g}{21}c\cos\alpha$$ **PROVERI????????????????????????????**

$$\frac{3}{4}\frac{v_{C0}^2}{g(R-r)} + \frac{39}{44}\frac{h_0}{(R-r)} \ge c\cos\alpha$$

DRUGI ZADATAK. *Ma**terijalni sistem*** na slici 2. se sastoji od tri tanka homogena diska D_1, D_2 i D_3, masa i poluprečnika redom $4m, R$, $m, 2R$ i $4m, 2R$ kao što je to prikazano na slici 2. Preko prvog diska D_1, koji može da se lotrlja brz klizanja po strmoj ravni nagiba ugla α u odnosu na horizonat, namotano je, lako, nerastegljivo uže, koje je zatim prebačeno preko drugog diska D_2, čiji je centar masa C_2 zglobno vezan za nepokretni oslonac, a za čiji je drugi kraj vezan treći disk D_3, mase i polupračnika redom $4m, 2R$, koji visi na tom užetu u vertikalnom pravcu istovremeno se kotrljajući bez klizanja po vertikalnom zidu (površi). Ceo sistem pri kretanju se se nalazi u vertikalnoj ravni i u polju Zemljine teže.

Odrediti:

a* broj stepeni slobode kretanja sistema i načiniti izbor generalisanih koordinata (ili koordinate) sistema; Nabroji veze kojima je svaki od diskova podvrgnut i obrazloži.

b* sve koordinate položaja i konfiguracije sistema, kao i ugaone brzine diskova pomoću izabranih generalisanih koordinata sistema;

c* izraze za ***kinetičku i potencijalnu energiju sistema***. Da li se ukupna mehanička energija datog sistema menja u toku vremena i toku kretanja sistema? Da li je sistem konzervativan ili nekonzervativan? Obrazloži odgovor.

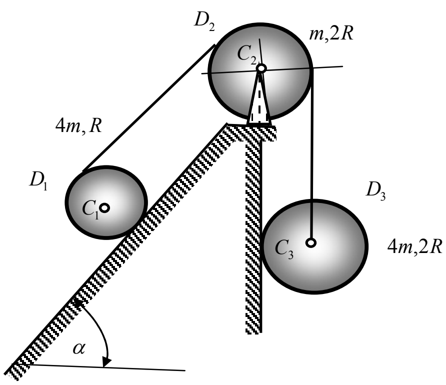
d* snagu rada sila koje dejstvuju na sistem, kao i ukupnu snagu rada celog sistema;

e* napisati integral energije sistema;

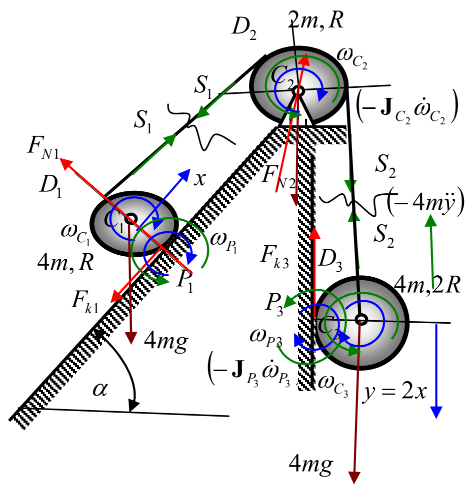
f* diferencijalne jednačine kretanja sistema pomoću generalisanih koordinata i Lagrage-ovih jednačina druge vrste. Koliki je najmanji broj diferencijalnih jednačina kretanja sistema? Odrediti ubrzanja sistema.

g* ubrzanja centra diska C_1;

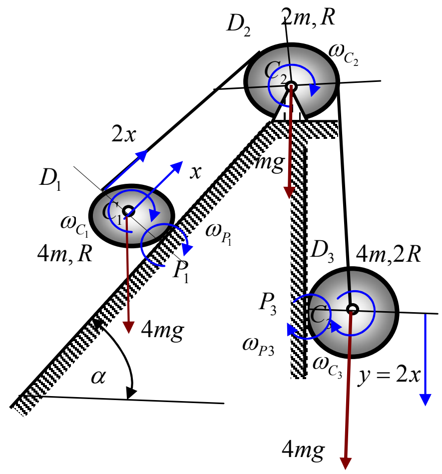
h* sile u užadima.



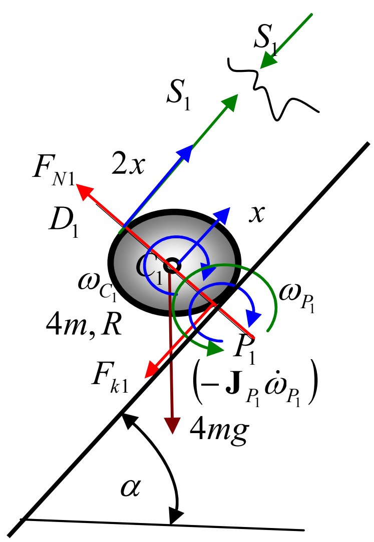
Slika 2.



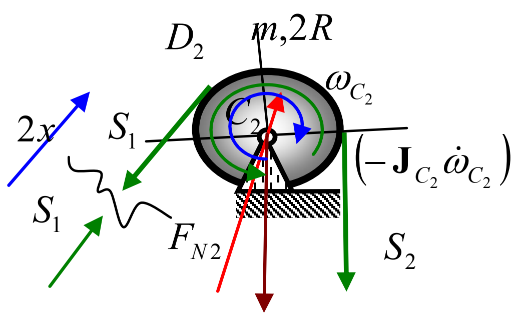
Slika 2. a*



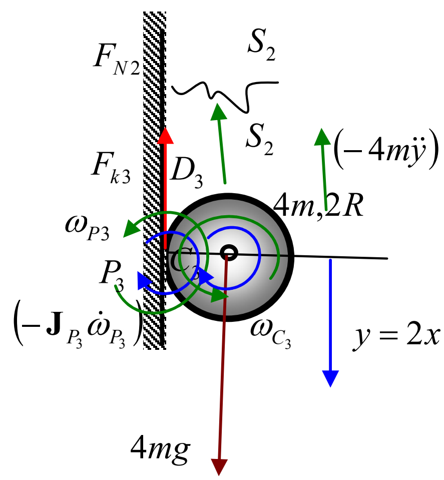
Slika 2. b*



Slika 2. c*



Slika 2. d*



Slika 2. e*

REŠENJE DRUGOG ZADATKA: Materijalni sistem ima jedan stepen slobode kretanja jer disk, koji se kotrlja bez klizanja po strmoj ravni, ostajući pri tome u vertikalnoj ravni, ima jedan stepen slobode kretanja (detaljnije objasnjenje vidi u pocetku prvog zadatka) , a takodje i treći disk koji se kotrlja bez klizanja po vertikalnoj ravni i u vertikalnoj ravni, a koji i visi na koncu ima jedan stepen slobode kretanja, aki kako su vezani nerastegljivim koncem to znaci da sistem ima samo jedan stepen slobode. Disk preko koga je prebaceno uže ima takodje samo jedan stepen slobode kretanja-obrtanje oko zglobne veze u centru masa C_2, ali kako uže ne klizi po njegovom obimu, već se zajedno sa njim pomera istom brzinom obima, to znači da u finalu ceo mehanički sistem ima samo jedan stepen slobode kretanja. To znači da možemo izabrati samo jednu generalisanu koordinatu, a preko nje izraziti sve ostale koordinate položaja diskova pri kretanju sisema i u prozvoljnoj konfiguraciji. Za generalisanu koordinatu izaberimo koordinatu x usmerenu naviše i paralelnu strmoj ravni i vetikalnoj ravni. Pomeranje centra masa trećeg diska koji se kotrlja bez klizanja po vertikalnoj ravni naniže označimo sa y i kako je uže nerastegljivo to je $y = 2x$. Koordinatu položaja drugog diska sa centrom u C_2 oko koga se obrće označimo sa φ_{C_2}, a ugaonu brzinu njegovog obrtanja označimo sa $\omega_{C_2} = \dot{\varphi}_{C_2}$. Imajući u vidu da je obimna brzina tačke na obimu tog diska jednaka brzini užete to sledi da je njegova ugaona brzina jednaka

$$\omega_{C_2} = \dot{\varphi}_{C_2} = \frac{\dot{x}}{r}$$

Ugaona brzina ω_{C_1} obrtanja prvog diska oko ose, upravne na vertikalnu ravan i ravan diska, kroz njegov centar masa C_1, odnosno, ugaona brzina ω_{P_1} oko paralelne ode kroz pol brzine u P_1 oko koga se u svakom trenutku obrne disk kortljajući se bez klizanja po strmoj ravni. Treba uočiti da se taj trenutni pol P_1 pomera po strmoj ravni, ali kako je disk osnosimetrican, a odgovarajuća tačka na konturi diska u kojoj se tokom njegovog kotreljanja bez klizanja po stmoj ravni dodiruje sa njim. To znači da se osa trenutne rotacije pomera i po konturi diska, ali je aksijalni moment inercije diska za taj sistem osa uvek isti i konstantan pa se ta osobina može koristiti pri pisanju jednačina dinamike diska, što ne bi bio slučaj da kontura nije krug (cilindar), a disk je homogen i sa centom masa u centru konture.

$$\omega_{P_1} = \omega_{C_1} = \frac{\dot{x}}{r}$$

Aksijalni moment inercije mase prvog diska za horizontalnu osu, upravnu na površ diska, kroz centar C_1 mase diska $\mathbf{J}_{\mathbf{C}_1}$, odnosno kroz trenutni pol brzine P_1, $\mathbf{J}_{P_1}$, a čija je masa $4m$ i poluprečnik r, su:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{C}_1} = \frac{4mr^2}{2} \quad \text{i} \quad \mathbf{J}_{P_1} = \frac{12mr^2}{2}$$

Aksijalni moment inercije mase drugog diska za horizontalnu osu, upravnu na površ diska, kroz centar C_2 mase diska $\mathbf{J}_{\mathbf{C}_2}$ je:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{C}_2} = \frac{m(2r)^2}{2} = 2mr^2$$

Aksijalni moment inercije mase trećeg diska za horizontalnu osu, upravnu na površ diska, kroz centar C_3 mase diska $\mathbf{J}_{\mathbf{C}_3}$ odnosno kroz trenutni pol brzine P_3, $\mathbf{J}_{P_3}$, a čija je masa $4m$ i poluprečnik $2r$, su:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{C}3} = \frac{4m(2r)^2}{2} = 8mr^2 \quad \text{i} \quad \mathbf{J}_{P_3} = 24mr^2$$

Ukupna kinetička energija sistema jednaka je zbiru kinetičkih energija rotacije prvog diska oko njegove ose trenutne rotacije pri kotrljanju bez klizanja po strmoj ravni , kinetičke energije rotacije drugog diska oko ose kroz njegov centar masa i kinetičke energije translacije tega:

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P_1}\omega_{P_1}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C_2}\omega_{C_2}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P_3}\omega_{P_3}^2 = 16m\dot{x}^2$$

Na sistem od aktivnih sila dejstvuju sile težine diskova, ali sila težine drugog diska ne vrši nikakav rad, jer se njena napadna tačka ne pomera u vertikalnom pravcu, pa je rad nula, a promena potencijalne eenergije je takodje jednaka nuli. Promena potencijalne energije sistema od dejstva sile težine $4mg$ prvog diska je različita od nule, jer se napadna tačka te sile težine podiže za $x\sin\alpha$, dok se napadna tačka sile težine $4mg$ trećeg diska spišta za $y = 2x$, te se potencijalna energija sistema smanjuje. Ukupna promena potencijalne energije posmatranog materijalnog sistema je sada:

$$\mathbf{E_p} = 4mgx\sin\alpha - 4my = -4mgx(2 - \sin\alpha)$$

Kako na sistem dejstvuju aktivne sile koje su konzervativne, a veze su idealne, to je ukupna mehanička energija sistema konstantna i jednaka onoj koju je sistem imao u početnom trenutku kretanja sistema:

$$\mathbf{E_k} + \mathbf{E_p} = \mathbf{E_0} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E_{p0}}$$

$$32m\dot{x}^2 - 4mgx(2 - \sin\alpha) = \mathbf{E_0} = \mathbf{E_{k0}} + \mathbf{E}_{Po} = const$$

Ovo je i integral energije.

Diferenciranjem po vremenu dobijamo diferencijalnu jednačinu kretanja u sledećem obliku:

$$\frac{d\left(\mathbf{E_k}+\mathbf{E_p}\right)}{dt}=0$$

$$32m\dot{x}\ddot{x}-4mg\dot{x}\left(2-\sin\alpha\right)=0$$

odnosno

$$8m\ddot{x}-mg\left(2-\sin\alpha\right)=0\,.$$

Iz poslednje diferencijalne jednačine odredjujemo ubrzanje sistema u obliku

$$\ddot{x}=\frac{1}{8}g\left(2-\sin\alpha\right)$$

Snaga rada neke sile koja dejstvuje na telo se izražava pomoću skalarnoh proizvoda sile i brzine kretanja materijalne tačke na koju dejstvuje ta sila. $P=\left(\vec{F},\vec{v}\right)$.

Snaga rada aktivnih sila koje dejstvuju na posmatrani materijalni sistem pojedinačno je:

$$P_1=-4mg\dot{x}\sin\alpha$$

$$P_2=mgv_{C_2}=0$$

$$P_3=4mg\dot{y}=8mg\dot{x}$$

Snaga rada sila inercije koje dejstvuju na posmatrani system je:

$P_{11,j}=-\mathbf{J}_{P_1}\dot{\omega}_{P_1}\omega_{P_1}=-6m\dot{x}\ddot{x}$ snaga rada sila inercije rotacije prvog diska

$P_{22,j}=-\mathbf{J}_{C_2}\dot{\omega}_{C_2}\omega_{C_2}=-2m\dot{x}\ddot{x}$ snaga rada sila inercije rotacije drugog diska

$P_{33,j}=-\mathbf{J}_{P_3}\dot{\omega}_{P_3}\omega_{P_3}=-24m\dot{x}\ddot{x}$ snaga rada sila inercije trećeg diska

S obzirom da se radi o idealnim vezama i konzervativnom sistemu, to je snaga rada otpora idealnih veza jednaka nuli, jer su brzine u tangencijalnom pravcu na veze, a otpori idealnih veza upravni na brzine, pa je snaga rada tih sila jednaka nuli. S obzirom da je sistem konzervativan, a ukupna mehanička energija sistema konstantna, to je ukupna snaga rada svih sisal sistema jednaka nuli.

$$\frac{d\left(\mathbf{E_k}+\mathbf{E_p}\right)}{dt}=P=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i,\vec{v}_i\right)=0$$

$$\frac{d\left(\mathbf{E_k}+\mathbf{E_p}\right)}{dt}=P=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i,\vec{v}_i\right)=P_1+P_2+P_3+P_{11,j}+P_{22,j}+P_{33,j}=0$$

$$P_1+P_2+P_3+P_{11,j}+P_{22,j}+P_{33,j}=\left[mg\left(21-\sin\alpha\right)-8m\ddot{x}\right]\dot{x}=0$$

Da bi smo odredili sile u užadima, napravićemo dekompoziciju sistema na sastavne proste podsisteme - diskove i teg, fiktivnim (zamišljenim) ’’presecanjem’’ užadi i zamenom dejstva nerastegljivih užadi parovima suprotnih sila u užadima. Zatim ćemo na osnovu principa dinamičke ravnoteže za svaki od podsistema napisati jednačine dinamičke (kinetičke) ravnoteže sila, uključujući i aktivne i reaktivne sile, kao i sile inercije. Iz tih jednačina odredjujemo nepoznate sile u užadima , kao i odgovarajuće sile otpora veza i odgovarajuće diferencijalne jednačine kretanja podsistema. Medjutim, kako smo već odredili ubrzanje sistema, dovoljno je iz tih sistema jednačina dinamičke ravnoteže, koristiti samo one jednačine koje su potrebne da odredimo nepoznate sile u uzadima, jer se to zadatkom traži, i jos jednu jednačinu kojom ćemo proveriti tačnost odredjenih analitičkih izraza za intenzitete sila u užadima.

Primenjujući princip dinamičke ravnoteže za dinamikčku ravnotežu tega, na koji dejtvuje aktivna sila težine trećeg diska $4mg$, moment sila sila inercije $\mathbf{J}_{P_3}\ddot{\varphi}_{P_3}$, kao i sile inercije $-4m\ddot{x}$ translatornog kretanja, kao i sila veze – sila u užetu S_2, dobijamo sledeću jednačinu dinamičke ravnoteže momenata dila za trenutnu dilu rotacije oko ose kroz trenutni pol P_1 u sledećem obliku:

$$\mathbf{J}_{P_3}\ddot{\varphi}_{P_3}=4mg2r-S_2 2r$$

Iz prethodne jednačine, s obzirom da smo već ranije odredili ubrzanje sistema $\ddot{x}=\frac{1}{8}g\left(2-\sin\alpha\right)$, nije teško dobiti intenzitet sile u delu užeta, koje nosi trećio disk u obliku:

$$S_2 = \frac{1}{2}mg(2+3\sin\alpha)$$

Primenjujući princip dinamičke ravnoteže za dinamikčku ravnotežu drugog diska, koji se obrće oko svog centra masa C_2, a na koji dejtvuju dve obimne sile S_1 i S_2 u delovima užadi čineći momente obrtanja, kao i sile inercije koje redukovane na centar masa C_2, takodje čine jedan spreg momenta $-\mathbf{J}_{C_2}\ddot{\varphi}_{C_2}$, kao i sila težine i sila otpora zgloba u C_2 koje prolaze kroz isti pol, pa je njihov moment jednak nuli, možemo da napišemo sledeću jednačinu dinamičke ravnoteže momenata oko ose kroz centar masa C_2 tog diska:

$$\mathbf{J}_{C_2}\ddot{\varphi}_{C_2} = (S_2 - S_1)2r$$

Iz prethodne jednačine, a kako smo već odredili silu u drugom delu užeta $S_2 = \frac{1}{2}mg(2+3\sin\alpha)$, nije teško odrediti silu S_1 u prvom delu nerastegljivog užeta u sledećem obliku:

$$S_1 = \frac{1}{8}mg(6+13\sin\alpha)$$

Time smo odredili obe nepoznate sile u pojedinim delovima užadi. Ostaje nam još da proverimo tačnost, dobijenih izraza, a to možemo uraditi primenom principa dinamičke ravnoteže na dinamičku ravnotežu prvog diska. Na prvi disk koji se kotrlja bez klizanja po stmoj ravni dejstvuju sledeće sile: sula težine $4mg$, sila u prvom delu užeta S_1 , sila otpora strme ravni F_{N1}, sila otpora kotrljanju bez klizanja F_{k1} i sile inercije od translacije i rotacije, koje kada se redukuju na trenutni pol P_1 brzina (rotacije diska oko trenutne ose rotacije) cine spreg momenta $-\mathbf{J}_{P_1}\dot{\omega}_{P_1}$. Sila otpora strme ravni i sila otpora kotrljanju diska bez klizanja prolaze kroz tu tačku P_1 pa je njihov moment sila za tu tačku P_1 jednak nuli. Jednačina dinamičke ravnoteže momenata sila za trenutni pol P_1 daje sledeće:

$$\mathbf{J}_{P_1}\dot{\omega}_{P_1} = 2rS_1 - 4mgr\sin\alpha$$

odakle dobijamo da je:

$$S_1 = \frac{1}{8}mg(6+13\sin\alpha)$$

čime smo potvrdili tačnost prethodno dobijenih analitičkih izraza za intenzitete sila u užadima i ubrzanje sistema.

TREĆI ZADATAK. Na slici 3. prikazana je homogena tanka pločica, мace M , konture $ABDEMN$, sastavljena od četiri jednaka pravougaonika stranica a i $2a$, složenih kao na slici 3. a* prikazano šrafurom.

Pločica je kruto učvršćena na lakom vratilu, tako da je osa vratila na istom pravcu kao i osnovice konture pločice. Vratilo je sa ležištima, nepokretnim u A i cilindričnim u B , na međusobnom rastojanju $3a$. Odrediti:

a* period oscilovanja pločice oko ose vratila, kada je ta osa horizontalna.

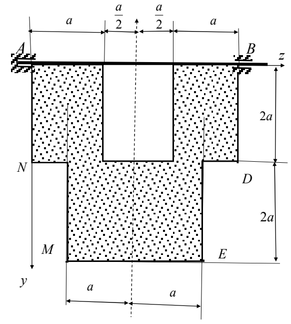
b*kolika treba da je masa materijalnih tačaka m , koje treba dodati na lakim krutim štapovima zanemarljive mase, dužine ℓ da bi pločica oko horizontalne ose vratila bila uravnotežena, slika 3.b *? Da li dužina štapa-prepusta ℓ treba da zadovoljava neki uslov? Da li bi pločica bila uravnotežena ako bi se obrtala oko ose vratila, koja nije horizonatalno,? Obrazloži odgovor!

c* vektor momenta inercije mase tela za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu A ;

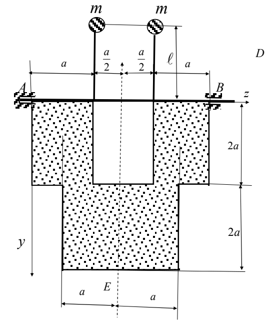
d* kinetičke pritiske na ležošta vratila za slučaj rotacije polčice pločice jenakoubrzano oko horizontalne ose (na slici 3. a*) početnom ugaonom brzinom ω_0 i ugaonim ubrzawem ε_0 ;.

e* devijacioni spreg koji desjtvuje na ležošta vratila za slučaj jenakoubrzanog obrtanja oko horizontalne ose (na slici 3. a*);

f* intenzitet vektora rotatora za taj slučaj.



Slika 3. a*



Slika 3. b*

REŠENJE TREĆEG ZADATKA: Pre nego što predjemo na rešavanje konkretnog zadatka, potrebno je odrediti koordinatu težišta pločice $y_C = ?$. Površona pločice se može posmatrati kao površina koja se se u odnosu na osu oko koje pločica osciluje može translacijom delova paralelno osi pretvoriti u jedan pravougaonika osnoviće $2a$ i visine $4a$, te zaključiti da je težište pločice na rastojanju $2a$ od ose rotacije i bez računa. Ali do tog zaključka se može doći i računom po obrascu za odredjivanje težišta. To znači da treba da je:

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = 2a \ .$$

Do tog zaključka smo mogli doći i bez računanja, analizom položaja pravougaonika na koje možemo dekomponovati površinu pločice i tanslacijom dva pravougaonika po zajedničkoj osnovici do njihovog sastavljanja, tako da dobijamo pravougaonik osnovice $2a$ i visine $4a$ pa je očigledno da je udaljenje centra masa od ose obrtanja jednako $2a$, a kako je pločica sa osom simetrije, to je to težište na toj osi simetrije.

Da bi smo odredili period oscilovanja pločoce potrebno je da odredimo aksijalni moment inercije pločice za osu oscilovanja. Imajući u vidu prethodnu analizu površine pločice, kao i da translacija dela površi pločice paralelno osi za koju se traži aksijalni moment površine, odnosno mase lako je shvatiti da je aksijalni moment inercije pločice moguće odrediti preko aksijalnog momenta inercije površine pravougaonika osnovice $2a$ i visine $4a$ za osu kroz osnovicu.

Znači da aksijalni moment inercije površina pravougaonika osnovice $2a$ i visine $4a$ za osu koje prolazi pravcem osnovice treba pomnožiti površinskom gustinom homogene pločice. Površinska gustna pločice je:

$$\rho = \frac{M}{A} = \frac{M}{8a^2}$$

$$\mathbf{J}_u = \rho I_u = \frac{M}{8a^2}\frac{1}{3}2a \cdot (4a)^3 = \frac{16}{3}Ma^2$$

Redukovana dužina fizičkog klatna je:

$$\ell_r = \frac{\mathbf{J}_u}{My_C} = \frac{8}{3}a$$

Kružna frekvencija malih oscilacija pločice oko ose u je:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell_r}} = \sqrt{\frac{3g}{8a}}$$

Dok je period oscilovanja za male elongacije:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{8a}{3g}} = 4\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$$

Vektor momenta inercije mase pločice za pol u neporetnom ležištu vratila A i osu rotacije pločice i vratila ima kolinearni deo sa osom, koji je jednak aksijalnom momentu inercije $\mathbf{J}_u$ mase pločice za tu osu i devijacioni deo koji je upravan na osu i leži u devijacionoj ravni za tu pločicu i osu i pol u nepokretnom lištu

A, a jednak je centifugalnom momentu za par osa, sa promenjenim znakom i od kojih je jedna osa rotacije, a druga osa upravna na istu a kroz nepokretno ležište u ravni pločice. S obzirom da smo postavili ravan pločice u ravni $u-v$ to treba odrediti centrifugalni moment mase pločice za te dve ose. Imajući u vidu da pločica ima jednu osu aksijalne simetrije, koja prolazi kroz centar masa pločice (težište) to je centrifugalni moment masa pločice za centralne ose, od kojih je jedna osa simetrije, jednak nuli, pa je za odredjivanje devijacionog dela vektora momenta inercije mase za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu dovoljno odrediti položajni deo, koji je jednak proivodu mase pločice i koordinata njenog težišta u odnosu na taj sistem koordinatnih osa. Na osnovu toga pišemo:

$$\mathbf{J}_{Auv} = \mathbf{J}_{Cuv} + My_C u_C = \frac{3}{2}a \cdot 2aM = 3Ma^2$$

Vektor momenta inercije mase za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu A je sada:

$$\vec{\mathfrak{J}}_A^{(\vec{u})} = \mathbf{J}_u \vec{u} + \mathbf{D}_{uv}\vec{v} = \frac{16}{3}Ma^2\vec{u} + 3Ma^2\vec{v} = \mathbf{J}_u\vec{u} + \vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}$$

Devijacioni deo vektora momenta inercije mase za pol u neporetnom ležištu vratila i osu rotacje je:

$$\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})} = 3Ma^2\vec{v}$$

Prema teoriji uz korišćenje vektora momenata masa dobili smo (vidi predavanja) das u kinetički pritisci na ležišta vratila:

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_{A(dev)} = \frac{1}{r_{AB}}\left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}\right|\mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_{01} = \frac{1}{r_{AB}}\left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_{01}\sqrt{\dot{\omega}^2+\omega^4}$$

$$\vec{F}_{A(S-dev)} = \left|\vec{\mathfrak{S}}_A^{(\vec{u})}\right|\mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_{02} = \left|\vec{\mathfrak{S}}_A^{(\vec{u})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_{02}\sqrt{\dot{\omega}^2+\omega^4}$$

dok je devijacioni spreg intenziteta

$$\mathfrak{M}_{dev} = \left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}\right|\mathfrak{R} = \left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{u})}\right|\sqrt{\dot{\omega}^2+\omega^4}$$

Kako je zadato da se vratilo i pločica obrću jednoliko ubrzano početnom ugaonom brzinom ω_0 i ugaonim ubrzawem ε_0, to nije teško dobiti kinetičke pritiske i devijacioni spreg koji dejstvuju na ležista vratila pločice. Za posmatrani slučaj kinetički pritisci na ležišta vratila:

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_{A(dev)} = Ma\sqrt{\varepsilon_0^2 + (\varepsilon_0 t + \omega_0)^4}\,\vec{\mathfrak{R}}_{01}$$

$$\vec{F}_{A(S-dev)} = 2Ma\sqrt{\varepsilon_0^2 + (\varepsilon_0 t + \omega_0)^4}\,\vec{\mathfrak{R}}_{02}$$

dok je devijacioni spreg intenziteta

$$\mathfrak{M}_{dev} = 3Ma^2\sqrt{\varepsilon_0^2 + (\varepsilon_0 t + \omega_0)^4}$$

Centar udara C_u pločice ima koordinate $C_u\left(y_{C_u}, u_{C_u}\right)$:

$$y_{C_u} = \ell_r = \frac{\mathbf{J}_u}{My_C} = \frac{8}{3}a\,,$$

$$u_{C_u} = \frac{\mathbf{J}_{uv}}{My_C} = \frac{3}{2}a$$

Uslov da je materijalni sistem koji se sastoji od prethodno definisane pločice i dve dodate materijalne tačke na lakim krutim prepistima je da je centar masa pločice na osi rotacije, i da je osa rotacije glavna osa inercije za pol u nepokretnom ležištu, odnosno da je centrifugalni devijacioni deo vektora momenta inercije mase materijalnog tela za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu kolinearan sa osom, odnosno fa je devijacioni deo jednak nuli.

Na osnovu ovoga pišemo tri uslova od kojih se dva svode na isti uslov za slučaj da je ceo sistem u jednoj ravni, uklučujući i osu rotacije.

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = 0$$

$$\mathbf{D}_{uv} = 0$$

$$\mathbf{J}_{u1}^{\ell} = \mathbf{J}_{u2}^{d}$$

Za naš konkretni zadatak dobijamo sledeća dva uslova:

$$2m\ell = 2Ma$$

$$2m\ell^2 = \frac{16}{3}Ma^2$$

odakle sledi

$$m\ell = Ma$$

$$3m\ell^2 = 8Ma^2$$

$$3Ma\ell = 8Ma^2$$

$$3\ell = 8a$$

Na osnovu tih uslova dobijamo da je uslov uravnoteženja posmatranog materijalnog objekta da je

$$m = \frac{3}{8}M$$

$$\ell = \frac{8}{3}a$$

Напомена: *Писмени део испита траје 4 сата. Дозвољено је коришћење само штампане литературе (уџбеник и таблице). Студенти који имају одложен усмени део испита дужни су да то видно означе на корицама писменог задатка, заједно са бројем поена, као и подацима о испитном року у коме су стекли то право. Такође,* ***НАПОМИЊЕМО*** *да је студент који има одложен усмени део испита* ***обавезан да ради писмени део испита и у испитном року у коме ће полагати усмени део испита*** *и да се труди да исти што боље уради.*

Писмени део испита је елиминаторан. Студент остварује право на полагање усменог дела испита и позитивну оцену писменог дела испита ако оствари најмање 18 поена од укупно 30 поена (три задатка по десет поена) или ако тачно реши и уради најмање два цела испитна задатка. Студент који оствари право *«условно позван на усмени део испита»* ***као доквалификацију*** за остварење права на усмени део испита ради један теоријски задатак у трајању од једног часа и без коришћења литературе.

Резултати писменог дела испита биће саопштени у писменом облику на огласној табли факултета до 12 часова. један дан по одржаном писменом делу испита, ако дежурни асистент или наставник не саопшти другачије. Студенти који желе да добију објашњење у вези са оценом писменог дела испита или да поново виде свој писмени рад, потребно је да се обрате предметном наставнику, или асистенту у време редовних консултација са студентима. То право треба искоридтити до термина одржавања усменог дела испита. Ако студент није искористио то право до почетка усменог дела испита сматраће се није хтео да коридти то право. Термини консултација наставника су: понедељак 10-12 h, и петак 10-12 h у кабинету 221. Консултације асистента су у кабинету 307: понедељком 10-12 h, средом 10-12 h.

Термин за полагање усменог дела испита по правилу први понедељак после писменог дела испита, а са почетком у 8,00 часова, ако студенти не изразе другачији захтев и договоре се са предметним наставником. На усменом делу испита није дозвољено коришћење литературе нити прибележака. За успешнију припрему испита из Механике III – Динамике пожељно је да су студенти положили испите из претходне године.

Резултате писменог дела испита, текстове испитних задатака и огледне примере решених испитних задатака из претходних испитних рокова, студенти могу наћи на **WEB** презентацији предмета Механика III – Динамика, а на адреси **www.masfak.ni.ac.yu** или интернет страници **http:/www.hm.co.yu/mehanika.**