

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА ПИСМЕНИ ДЕО ИСПИТА ИЗ ПРЕДМЕТА
МЕХАНИКА III - ДИНАМИКА
МЕХАНИКА III - ДИНАМИКА

PRVI ZADATAK. Materijalna tačka mase m , puštena je početnom brzinom \vec{v}_0 , u polju Zemljine teže, iz položaja A na visini h_0 u odnosu na referentni horizont, da se kliza bez trenja niz glatku strmu ravan, koja sa horizontom zaklapa ugao α . Linija $A N B$ sa slike 1. je u vertikalnoj ravni. Strma ravan se, u tački M , nastavlja u cilindričnu površ poluprečnika $R = R = 6r$, centralnog ugla 3α , tako da vertikala lroz centar krivine luka, deli taj ugao u odnosu 1:2, kao što je na slici 1. prikazano.

a* Koji uslov treba da zadovoljava početna brzina \vec{v}_0 materijalne tačke da bi se klizala po strmoj glatkoj ravni, zadržavši svoje položaje kroz koje prolazi na toj strmoj ravni, ostajući sve vreme u vertikalnoj ravni?

b* Koliko stepeni slobode kretanja ima materijalna tačka dok se kliza niz strmu ravan i po cilindričnoj površi, a koliko stepeni kada napusti tu površ po prolasku kroz položaj B ? Obrazloži odgovor.

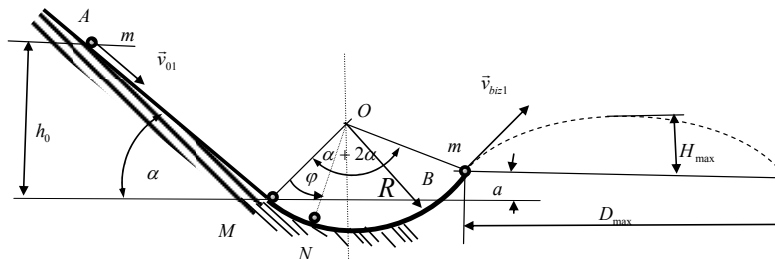
c* Napisati kinetičku i potencijalnu energiju materijalne tačke pri klizanju bez trenja niz strmu ravan, po cilindričnoj površi i po napuštanju iste, a u položajima A (početni položaj), L (proizvoljan položaj na strmoj ravni), N (položaj određen uglom φ na cilindričnoj površi), B i D (kada napusti cilindričnu površ). Da li je sistem konzervativan? Ako je odgovor DA, napisati integral energije;

d* Odrediti brzine materijalne tačke, pri njenom prolasku kroz tačku N određenu uglom φ na cilindričnoj površi, kao i pri prolasku kroz tačku B u kojoj napušta cilindričnu površ;

e* Odrediti jednačine kretanja materijalne tačke po napuštanju cilindrične površi u tački B . Kolika je maksimalna visina $H_{\max} = ?$ koju će postići materijalna tačka u fazi kretanja po napuštanju cilindrične površi, kao i njen maksimalni domet $D_{\max} = ?$ u toj fazi kretanja.

g* Kolika je ugaona brzina materijalne tačke u položaju dostizanja maksimalne visine H_{\max} ?

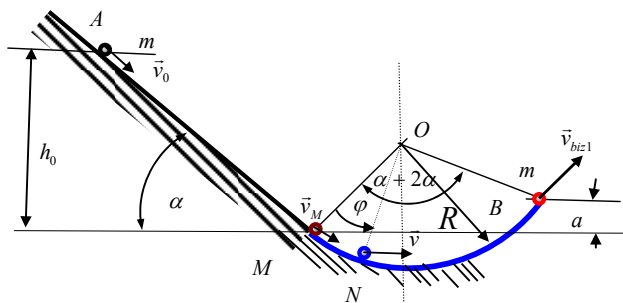
h* Kolika je sila pritiska na cilindričnu površ u proizvoljnom položaju materijalne tačke na njoj? Koliki treba da bude ugao α , odnosno početna brzina \vec{v}_0 materijalne tačke, te da se ona odvoji od cilindrične površi pre izlaska sa iste (njenog kraja)?



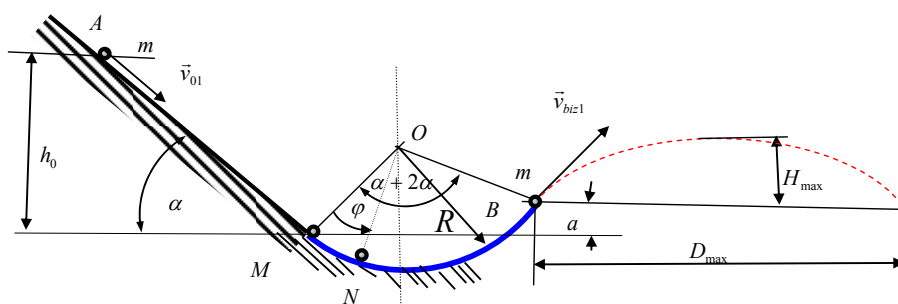
Slika 1.

REŠENJE DRUGOG ZADATKA: Materijalna tačka u prostoru ima tri stepeni slobode kretanja. Kad se podvrne vezi: kretanje u vertikalnoj ravni, onda njoj ostanu dva stepena slobode kretanja u toj ravni. Veza izražena time da se kreće po strmoj ravni znači da se ona može kretati po presečnoj liniji strme ravni i vertikalne ravni, pa joj je preostao samo jedan stepen slobode kretanja. Međutim veza po strmoj ravni je jednostrano zadržavajuća, pa materijalna tačka može ostati na toj ravni, samo ako je njena brzina u svakom trenutku kretanja paralelna toj ravni i leži u vertikalnoj ravni. Zto i njena početna brzina (u početnom trenutku) mora da zadovoljava taj uslov, (a ovaj uslov se izražava i relacijom $(\vec{v} \cdot \text{grad} f) = 0$, brzina materijalne tačke i normala na ravni ili površ u tačku u kojoj se nalazi su ortogonalne).

Kada materijalna tačka predje na kretanje po cilindričnoj površi ona mora da se kreće po presečnoj liniji (kružni luk) cilindrične površi i vertikalne ravni, te i u toj drugoj fazi kretanja ima jedan stepen slobode kretanja. Kako je i tu veza jednostrano zafržavajuća na toj vezi će ostati sve dok sila pritiska materijalne tačke na tu cilindričnu površ bude veća od nule. Kada postane jednaka nuli, materijalna tačka će se odvojiti od cilindrične površi i nastaviti da se kreće u vertikalnoj ravni pod dejstvom sile zemljine teže, i imajući pri tome dva stepena slobode kretanja, a sa početnom brzinom, koja je jednaka brzini koju je imala u trenutku, kada je pritisak na cilindričnu površ postao jednak nuli. Ako na cilindričnoj površi, u toj fazi kretanja materijalne tačke, ne postoji položaj u kome je pritisak materijalne tačke na cilindričnu površ jednak nuli, materijalna tačka će se kretati do kraja po toj površi i u tački B napustiti tu površ brzinom \vec{v}_B , a posle toga se kretati u vertikalnoj ravni pod dejstvom sile sopstvene težine i imati dva stepena slobode kretanja (tip kretanja je kosi hitac, u opštem slučaju) i sa početnom brzinom, koja je jednaka brzini \vec{v}_B napuštanja cilindrične površi u tački B . I da zaključimo, kretanje materijalne tačke se odvija kroz tri faze kretanja, prve dve faze sa po jednim stepenom slobode kretanja i treće sa dva stepena slobode kretanja (vidi slike 1.a* i 1.b*).



Slika 1.a* Materijalni sistem sa jednim stepenom slobode kretanja-prva i druga faza kretanja: po strmoj ravni i po cilindričnoj površi i u vertikalnoj ravni



Slika 1. b* Materijalni sistem sa jednim stepenom slobode kretanja-prva i druga faza kretanja : po strmoj ravni i po cilindričnoj površi i u vertikalnoj ravni i sistem sa dva stepena slobode kretanja u trećoj fazi kretanja, po izlasku iz cilindrične površi ostajući u vertikalnoj ravni

Za prvu fazu kretanja, kada materijalna tačka ima jedan stepen slobode kretanja, za generalisanu koordinatu možemo usvojiti koordinatu x merenu od početnog položaja i u pravcu strme ravni, ili koordinatu h visinu položaja materijalne tačke merenu od istog referentnog nivoa od koga je merena i zadata početna visina h_0 položaja materijalne tačke u početnom trenutku. Ovo je pitanje volje izbora onoga ko rešava zadatak, ali se samo jedna od tih koordinata može progasiti generalisanom, a druga izraziti pomoću funkcionalne veze sa izabranom i proglašenom koordinatom za generalisanu koordinatu. Ta veza je: $h = h_0 - x \sin \alpha$.

Kinetička energija sistema u prvoj fazi kretanja materijalne tačke po strmoj ravni jednaka je kinetičkoj energiji translacije te materijalne tačke:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2,$$

Na sistem, od aktivnih sila dejstvuje samo sila Zemljine teže, koja je konzervativna sila i ima funkciju sile, odnosno potencijal. Potencijalna energija sistema je:

$$E_p = mgh = mg(h_0 - x \sin \alpha)$$

i izražena je pomoću koordinate h u pravcu vertikale, ili pomoću koordinate x koju smo izabrali za generalisanu koordinatu. Mogli smo umesto koordinate x za generalisanu koordinatu izabrati koordinate h u pravcu vertikale.

Kako se zadatkom traži brzina v materijalne, koristićemo integral energije, odnosno teoremu o ukupnoj mehanučkoj energiji sistema, koja je konstantna i nepromenljiva u toku kretanja za konzervativne sisteme i jednaka ukupnoj mehanučkoj energiji sistema, koju je sistem imao u početnom trenutku kretanja. Na osnovu toga pišemo da je:

$$E_k + E_p = E_0 = E_{k0} + E_{p0}$$

odnosno:

$$\mathbf{E}_k + \mathbf{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{k0} + \mathbf{E}_{p0} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0$$

odakle sledi da je:

$$v^2 = v_0^2 + 2g(h_0 - h)$$

odnosno

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h)}$$

Ako prethodnu vezu izrazimo preko generalisane koordinate x možemo da napišemo sledeće:

$$v = \dot{x} = \sqrt{v_0^2 + 2gx \sin \alpha}$$

Prethodnim obrascima smo odredili brzinu materijalne tačke u funkciji generalisane koordinate za vreme njenog kretanja po strmoj ravni. Brzina materijalne tačke v_M u položaju M , tački prelaska sa strme ravni na cilindričnu površ je:

$$v_M = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}.$$

U drugoj fazi kretanja materijalne tačke po cilindričnoj površi sistem ima, takodje, jedan stepen slobode kretanja, i za tu fazu kretanja, za generalisanu koordinatu izaberimo centralni ugao φ , koji poluprečnik koji prolazi kroz tačku u kojoj je materijalna tačka i centar krivine cilindrične površi (luka) čini sa poluprečnikom kroz materijalnu tačku kada je ona u položaju M , ulaska na cilindričnu površ. Tu generalisanu koordinatu smo obeležili sa φ . U toj fazi kretanja, za generalisanu koordinatu smo mogli izabrati i krivolinijsku koordinatu luk s , koji je sa prethodno izabranom generalisanom koordinatim vezan sledećom vezom: $s(\varphi) = R\varphi$. Da napomenemo, da za sistem sa jednim stepenom slobode kretanja, što smo ovde utvrdili, da samo jednu koordinatu možemo proglasiti (izaabrati) za generalisanu, a ostale koordinate položaja sistema izraziti preko izabrane koordinate. Izbor generalisane koordinate se prepusta volji onoga ko rešava zadatak, ali od izbora generalisane koordinate nekada zavisi i "eleganost" i kraći put rešavanja zadatka, o čemu je vazno voditi računa.

Brzina materijalne tačke u funkciji generalisane koordinate φ pri kretanju po cilindričnoj površi je:

$$v_C = \frac{ds(\varphi)}{dt} = R\dot{\varphi}$$

Kinetička energija sistema je jednaka kinetičkoj energiji translacije materijalne tačke:

$$\mathbf{E}_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2$$

Na sistem, i u ovoj fazi kretanja, od aktivnih sila na materijalnu tačku deluje samo sila Zemljine teže, koja je konzervativna sila i ima funkciju sile, odnosno potencijal. Potencijalna energija sistema je:

$$\mathbf{E}_p = -mgh = mgR[\cos \alpha - \cos(\alpha - \varphi)]$$

i izražena je pomoću koordinate h u pravcu vertikale, ili pomoću koordinate φ , koju smo izabrali za generalisanu koordinatu, jer se centar masa diska, koji je napadna tačka sile težine spušta za visinu

$$(\downarrow) h = R[\cos(\alpha - \varphi) - \cos \alpha]$$

štp je uočljivo sa slike. Mogli smo, umesto koordinate φ , za generalisanu koordinatu izabrati koordinatu s u pravcu luka poluprečnika R putanje, koju opisuje materijalna tačka pri kretanju po cilindričnoj površi. Tada je izraz za potencijalu energiju:

$$\mathbf{E}_p = -mgh = mgR\left[\cos \alpha - \cos\left(\alpha - \frac{s}{R}\right)\right]$$

Kako se zadatkom, i u ovoj fazi kretanja, traži brzina v kretanja materijalne tačke po cilindričnoj površi, koristićemo integral energije, odnosno teoremu o ukupnoj mehanučkoj energiji sistema, koja je, za konzervativne sisteme, konstantna i jednaka ukupnoj mehaničkoj energiji sistema, koju je sistem imao u početnom trenutku kretanja. Na osnovu toga pišemo da je:

$$\mathbf{E}_k + \mathbf{E}_p = \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{k0} + \mathbf{E}_{p0}$$

odnosno:

$$\mathbf{E}_k + \mathbf{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 - mgR[\cos \alpha - \cos(\alpha - \varphi)] = \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{k0} + \mathbf{E}_{p0} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0$$

odakle sledi da je:

$$v_C^2 = v_{C0}^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos(\alpha - \varphi)]$$

odnosno

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos(\alpha - \varphi)]}$$

Ako prethodnu vezu izrazimo preko luka - krivolinijske koordinate s , možemo da napišemo sledeći analitički izraz za brzinu:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 - 2gR \left[\cos \alpha - \cos \left(\alpha - \frac{s}{R} \right) \right]}$$

Prethodnim obrascima smo odredili brzinu materijalne tačke u funkciji generalisane koordinate za vreme kretanja materijalne tačke po cilindričnoj površi. Brzina materijalne tačke v_B u položaju B , tački njenog izlaska sa cilindrične površi i prelaska na slobodno kretanje u vertikalnoj ravni je:

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos 2\alpha]}$$

U trećoj fazi kretanja materijalna tačka ima dva stepena slobode kretanja, jer se kreće u vertikalnoj ravni izvodeći ravansko kretanje, tipa kosi hitac, početnom brzinom:

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos 2\alpha]}.$$

Za generalisane koordinate u trećoj fazi kretanja, sada takodje ravanskog kretanja, ali sa dva stepena slobode kretanja u vertikalnoj ravni za generalisane koordinate biramo dve koordinate njenog pomeranja u dva ortogonalna pravca x i y . Na materijalnu tačku deluje samo aktivna sila sopstvene težine mg . Diferencijalne jednačine ravanskog kretanja materijalne tačke u vertikalnoj ravni i sa dva stepena slobode kretanja su:

$$m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{y} = -mg$$

odnosno

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = -g$$

Integraljenjem diferencijalnih jednačina prethodnog sistema dobijamo sledeće:

$$\dot{x} = C_1$$

$$\dot{y} = -gt + C_2$$

Još jednim integraljenjem diferencijalnih jednačina prethodnog sistema dobijamo sledeće:

$$x(t) = C_1 t + C_3$$

$$y(t) = -g \frac{t^2}{2} + C_2 t + C_4$$

U prethodnim jednačinama pojavilo se šest integracionih konstanti, koje treba odrediti iz sledećih početnih uslova.

$$x(0) = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_B \cos 2\alpha = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos 2\alpha]} \cos 2\alpha$$

$$\dot{y}(0) = v_B \sin 2\alpha = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos 2\alpha]} \sin 2\alpha$$

Iz početnih uslova sledi:

$$C_4 = 0, C_3 = 0,$$

$$C_1 = v_B \cos 2\alpha = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos 2\alpha]} \cos 2\alpha$$

$$C_2 = v_B \sin 2\alpha = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos 2\alpha]} \sin 2\alpha$$

Jednačine kretanja materijalne tačke su sada:

$$x(t) = v_B t \cos 2\alpha = t \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos 2\alpha]} \cos 2\alpha$$

$$y(t) = v_B t \sin 2\alpha - g \frac{t^2}{2} = -g \frac{t^2}{2} + t \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos 2\alpha]} \sin 2\alpha$$

Maksimalna visina, koju materijalna tačka dostiže je u trenutku t_1 , kada njena brzina ima samo horizontalnu komponentu, tj. kada je

$$\dot{y}(t_1) = v_B \sin 2\alpha - gt_1 = 0.$$

Iz prethodnog uslova određujemo taj trenutak t_1

$$t_1 = \frac{v_B \sin 2\alpha}{g}$$

U tom trenutku t_1 koordinate materijalne tačke su:

$$x(t_1) = \frac{v_B^2}{2g} \sin 4\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{2g} [v_{C0}^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos 2\alpha]]$$

$$y_{MAX} = y(t_1) = \frac{v_B^2}{2g} \sin^2 2\alpha = \frac{\sin^2 2\alpha}{2g} [v_0^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos 2\alpha]]$$

Razlika u visini položaja materijalne tačke pri ulasku u cilindričnu površ i izlaska sa iste je:

$$a = R(\cos \alpha - \cos 2\alpha)$$

Sada možemo odrediti maksimalnu visinu H_{C-MAX} na koju će dospeti materijalna tačka, po napuštanju veze sa cilindričnom površi:

$$H_{MAX} = a + y_{MAX} = a + y(t_1) = R(\cos \alpha - \cos 2\alpha) + \frac{v_B^2}{2g} \sin^2 2\alpha$$

$$H_{MAX} = R(\cos \alpha - \cos 2\alpha) + \frac{\sin^2 2\alpha}{2g} [v_0^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos 2\alpha]] > h_0$$

a to je visina, veća id visine h_0 , na kojoj je bila materijalna tačka, kada je ona puštena sa početnom brzion v_0 , da se kreće po strmoj ravni, ako je ispunjen prethodni uslov. Da bi ovaj zaključak bio dobar, potrebno je da je zadovoljen uslov da je ugao α takav da materijalna tačka može da dospe u krajnju tačku B brzinom koja je veća od nule:

$$v_B^2 = v_0^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos 2\alpha] > 0$$

odnosno potrebno je da je zadovoljen i uslov:

$$\frac{1}{2g} v_{C0}^2 + h_0 > R[\cos \alpha - \cos 2\alpha] = a$$

kao i da je sila pritiska materijalne tačke na cilindričnu površ veća ili najmanje jednaka nuli kada je ona u položaju B .

Ako tražimo najveći domet na visini na kojoj diska napušta cilindričnu površ, najveći domet materijalne tačke je kada je:

$$y(t_2) = v_B t_2 \sin 2\alpha - g \frac{t_2^2}{2} = 0$$

Iz prethodnog uslova određujemo trenutak vremena t_2 , u kome se materijalna tačka ponovo nalazi na visinu na kojoj je bio kada je napuстила cilindričnu površ, a taj trenutak vremena je:

$$t_2 = \frac{2v_B \sin 2\alpha}{g}$$

U tom trenutku t_2 koordinata $x(t_2)$ materijalne tačke je:

$$D_{MAX} = x_{MAX} = x(t_2) = \frac{v_B^2 \sin 4\alpha}{g} = \frac{\sin 4\alpha}{g} \{v_0^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos 2\alpha]\}$$

Ako se traži najveći domet materijalne tačke na vidini h_0 , na kojoj je bila materijalna tačka u početku kretanja po strmoj glatkoj ravni, onda je potrebno odrediti vreme t_3 njenog dospeća na tu visinu po napuštanju cilindrične površi i odgovarajuću koordinatu $x(t_3)$. Na osnovu toga pišemo:

$$y(t_3) = h_0 - a = h_0 - R(\cos \alpha - \cos 2\alpha)$$

odnosno

$$y(t_3) = v_B t_3 \sin 2\alpha - g \frac{t_3^2}{2} = h_0 - a$$

pa dobijamo kvadratnu jednačinu :

$$g \frac{t_3^2}{2} - v_B t_3 \sin 2\alpha + h_0 - a = 0$$

$$t_3^2 - \frac{2}{g} v_B t_3 \sin 2\alpha + \frac{2}{g} (h_0 - a) = 0$$

iz koje određujemo korene, odnosno vreme dospeća materijalne tačke na početnu visinu h_0 .

$$t_{3(1,2)} = \frac{1}{g} v_B \sin 2\alpha \mp \sqrt{\left(\frac{2}{g} v_B t_3 \sin 2\alpha\right)^2 - \frac{2}{g}(h_0 - a)}$$

Koristimo drugi koren, jer prvo trenutak $t_{3(1)}$ vremena dospeća materijalne tačke na visinu h_0 , sa koordinatom x manjom nego prilikom dospeća na tu visinu za drugi trenutak $t_{3(2)}$ vremena, koje odgovara drugom korenu. Ova dva korena ukazuju da će se materijalna tačka naći još dva puta na visini na kojoj je bila u početku kretanja niz strmu ravan. Maksimalnom dometu odgovara trenutak t_3 vremena koje je određeno sledećim analitičkim izrazom:

$$t_{3(2)} = \frac{1}{g} v_B \sin 2\alpha + \sqrt{\left(\frac{2}{g} v_{CB} t_3 \sin 2\alpha\right)^2 - \frac{2}{g}(h_0 - a)}$$

Sada najveći domet materijalne tačke je:

$$D_{MAX}(t_{3(2)}) = \frac{h_0}{\tan \alpha} + R(\sin \alpha + \sin 2\alpha) + x(t_{3(2)})$$

gde je:

$$x(t_{3(2)}) = v_B t_{3(2)} \cos 2\alpha = \frac{v_B^2 \sin 4\alpha}{g} + v_B \cos 2\alpha \sqrt{\left(\frac{2}{g} v_B t_3 \sin 2\alpha\right)^2 - \frac{2}{g}(h_0 - a)}$$

$$v_B = \sqrt{v_{C0}^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos 2\alpha]}$$

$$a = R(\cos \alpha - \cos 2\alpha)$$

Da bi smo odredili uslov pod kojim će za zadate početne uslove materijalna tačka dospeti u krajnji položaj B cilindrične površi, tako da njegova brzina bude veća od nule, i ne neapusti vezu, pre dospeća u njenu krajnju tačku B , potrebno je da odredimo silu pritiska materijalne tačke na cilindričnu površ po kojoj se kreće. Taj pritisak, odnosno otpor veze-cilindrične površi mora biti veći od nule, da bi veza - cilindrična površ imala svojstvo obostrano zadržavajuće veze. U trenutku i položaju kada pritisak materijalne tačke na cilindričnu površ postane jednak nuli, dolazi do pojave svojstva veze da je jednostrano zadržavajuća i materijalna tačka se odvaja od te veze i napusta istu.

Da bi smo odredili silu pritiska diska na cilindričnu površ oslobodimo materijalnu tačku veza i umesto veza postavimo odgovarajuće reakcije veza. To su normalna komponenta otpora veze F_N upravna na putanju materijalne tačke i veze. Sada koristimo princip dinamičke ravnoteže i pišemo odgovarajuće jednačine ravnoteže sila u radijalnom i tangencijalnom pravcima. Na osnovu toga pišemo sledeće jednačine:

$$ma_T = mR\ddot{\varphi} = mg \sin(\alpha - \varphi)$$

$$ma_N = m \frac{v_C^2}{R} = mR\dot{\varphi}^2 = F_N - mg \cos(\alpha - \varphi)$$

S obzirom da smo koristeći teoremu od ukupnoj mehaničkoj energiji sistema odredili brzinu v materijalne tačke, to ne moramo integraliti diferencijalne jednačine prethodnog sistema diferencijalnih jednačina, već ćemo koristiti samo drugu jednačinu iz koje određujemo otpor veze - cilindrične površi u funkciji generalisane koordinate φ , kao i prethodno određen izraz za brzinu materijalne tačke, takodje u funkciji generalisane koordinate φ . Na osnovu toga dobijamo:

$$F_N = m \left[\frac{v_C^2}{R} + g \cos(\alpha - \varphi) \right]$$

a kako je:

$$v = \sqrt{v_{C0}^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos(\alpha - \varphi)]}$$

to sledi da je analitički izraz sa silu normalnog pritiska materijalne tačke na cilindričnu površ u sledećem obliku:

$$F_N = mg \cos(\alpha - \varphi) + \frac{m}{R} [v_{C0}^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos(\alpha - \varphi)]]$$

odnosno, posle sredjivanja za silu pritiska dobijamo sledeći izraz:

$$F_N = \frac{m}{R} [v_{C0}^2 + 2gh_0 - 2gR[\cos \alpha - \cos(\alpha - \varphi)] + Rg \cos(\alpha - \varphi)]$$

Posle sredjivanja dobijamo sledeći izraz za silu pritiska materijalne tačke na cilindričnu površ, pri njenom kretanju po cilindričnoj površi:

$$F_N = \frac{m}{R} [v_{C0}^2 + 2gh_0 - gR[2 \cos \alpha - 3 \cos(\alpha - \varphi)]]$$

Diferencijalnu jednačinu kretanja materijalne tačke, nije teško integraliti, jer razdvaja promenljive, na sledeći način:

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{R} \sin(\alpha - \varphi) = 0$$

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{R} \sin(\alpha - \varphi) = 0 \quad / \quad 2\dot{\varphi}dt = 2d\varphi$$

$$2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}dt - \frac{g}{R} \sin(\alpha - \varphi)2d\varphi = 0$$

$$2\dot{\varphi}d\dot{\varphi} - \frac{g}{R} \sin(\alpha - \varphi)2d\varphi = 0$$

$$\int_{\dot{\varphi}_M}^{\dot{\varphi}} 2\dot{\varphi}d\dot{\varphi} - \frac{g}{R} \int_0^{\varphi} \sin(\alpha - \varphi)2d\varphi = 0$$

Granice integraljenja smo odredili od položaja pri ulasku u cilindričnu površ gde je ugao $\varphi = 0$ do prouzvoljkon položaja određenog uglom φ , kada je ugaina brzina okretanja materijalne tačke oko centra krivine njegove putanje O vezana sa njegovom brzinom izrazom: $v = R\dot{\varphi}$. Posle naznačenog integraljenja dobijamo:

$$\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_M^2 + \frac{2g}{R} [\cos(\alpha - \varphi) - \cos \alpha] = 0$$

odnosno

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_M^2 - \frac{2g}{R} [\cos \alpha - \cos(\alpha - \varphi)]$$

odnosno

$$R^2 \dot{\varphi}^2 = R^2 \dot{\varphi}_M^2 - 2gR [\cos \alpha - \cos(\alpha - \varphi)]$$

odnosno

$$v^2 = v_M^2 - 2gR [\cos \alpha - \cos(\alpha - \varphi)]$$

$$v = \sqrt{v_M^2 - 2gR [\cos \alpha - \cos(\alpha - \varphi)]}$$

A kako je:

$$v_M = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}$$

to sledi da je:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 - 2gR [\cos \alpha - \cos(\alpha - \varphi)]}$$

Vidimo da je ovaj izraz isti kao onaj koji smo dobili iz teoreme o ukupnoj mehaničkoj energiji konzervativnog sistema.

Sada da se vratimo na analizu sile pritiska F_N za koju smo odredili sledeći analitički izraz:

$$F_N = \frac{m}{R} [v_{C0}^2 + 2gh_0 - gR [2 \cos \alpha - 3 \cos(\alpha - \varphi)]] > 0$$

Da se materijalna tačka nebi odvojila od cilindrične površi, koja je jednostrano zadržavajuća veza, ova sila pritiska materijalne tačke na cilindričnu površ, mora da bude veća od nule. Iz tog uslova dobijamo sledeću relaciju izraženu sledećom nejednačinom:

$$v_0^2 + 2gh_0 - gR [2 \cos \alpha - 3 \cos(\alpha - \varphi)] > 0$$

odnosno:

$$\frac{v_{C0}^2}{3Rg} + \frac{2h_0}{3R} - \frac{2}{3} \cos \alpha > -\cos(\alpha - \varphi) \leq 1$$

Da bi postojao položaj u kome bi se materijalna tačka odvojila od cilindrične površi potrebno je da zadovoljena relacija

$$\frac{v_0^2}{3Rg} + \frac{2h_0}{3R} - \frac{2}{3} \cos \alpha > -\cos(\alpha - \varphi) \leq 1$$

odakle sledi

$$\frac{v_0^2}{3Rg} + \frac{2h_0}{3R} - \frac{2}{3} \cos \alpha \leq 1$$

odnosno

$$\cos \alpha \leq \frac{3}{2} \frac{v_0^2 + 2gh_0}{2Rg}$$

Prethodna relacija nejednakosti je uslov koji ograničava veličinu ugla α u odnosu na početnu brzinu materijalne tačke i visinu početnog položaja kretanja niz strum raven, da u fazi kretanja materijalne tačke, po cilindričnoj površi, nebi došlo do odvajanja materijalne tačke od nje i veza dejstvovala kao jednostrano zadržavajuća, odnosno nezadržavajuća.

Ako je zadovoljen uslov

$$F_N = \frac{m}{R} [v_{C_0}^2 + 2gh_0 - gR[2 \cos \alpha - 3 \cos(\alpha - \varphi)]] = 0$$

to dolazi do odvajanja materijalne tačke od cilindrične površi po kojoj se kreće ista i potrebno je odrediti i njenu brzinu pri odvajanju od te veze. Kako je

$$-\cos(\alpha - \varphi_K) = \frac{v_{C_0}^2}{3Rg} + \frac{2h_0}{3R} - \frac{2}{3} \cos \alpha$$

to je brzina materijalne tačke, kojom se ona odvaja od cilindrične površi, određena sledećim analitičkim izrazom:

$$v_K = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 - 2Rg[\cos \alpha - \cos(\alpha - \varphi_K)]}$$

$$v_K = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 - 2Rg \left[\cos \alpha + \frac{v_{C_0}^2}{3Rg} + \frac{2h_0}{3R} - \frac{2}{3} \cos \alpha \right]}$$

$$v_K = \sqrt{\frac{1}{3}v_0^2 + \frac{2}{3}gh_0 - \frac{2}{3}Rg \cos \alpha}$$

$$\text{za } v_0^2 + 2gh_0 > 2Rg \cos \alpha$$

DRUGI ZADATAK. Materijalni sistem na slici 2. se sastoji od tri tanka homogena diska D_1 , D_2 i D_3 , masa i poluprečnika redom $4m, R$, $m, 2R$ i $4m, 2R$ kao što je to prikazano na slici 2. Preko prvog diska D_1 , koji može da se lotrlja brz klizanja po strmoj ravni nagiba ugla α u odnosu na horizonat, namotano je, lako, nerastegljivo uže, koje je zatim prebačeno preko drugog diska D_2 , čiji je centar masa C_2 zglibno vezan za nepokretni oslonac, a za čiji je drugi kraj namotan na treći disk D_3 , mase i polupračnika redom $4m, 2R$, koji "visi" na tom užetu u vertikalnom pravcu istovremeno se kotrljajući bez klizanja po po užetu koje se odmotava. Ceo sistem pri kretanju se se nalazi u vertikalnoj ravni i u polju Zemljine teže.

Odrediti:

a* broj stepeni slobode kretanja sistema i načiniti izbor generalisanih koordinata (ili koordinate) sistema;

b* sve koordinate položaja i konfiguracije sistema, kao i ugaone brzine diskova pomoću izabranih generalisanih koordinata sistema;

c* izraze za kinetičku i potencijalnu energiju sistema. Da li se ukupna mehanička energija datog sistema menja u toku vremena i toku kretanja sistema? Da li je sistem konzervativan?

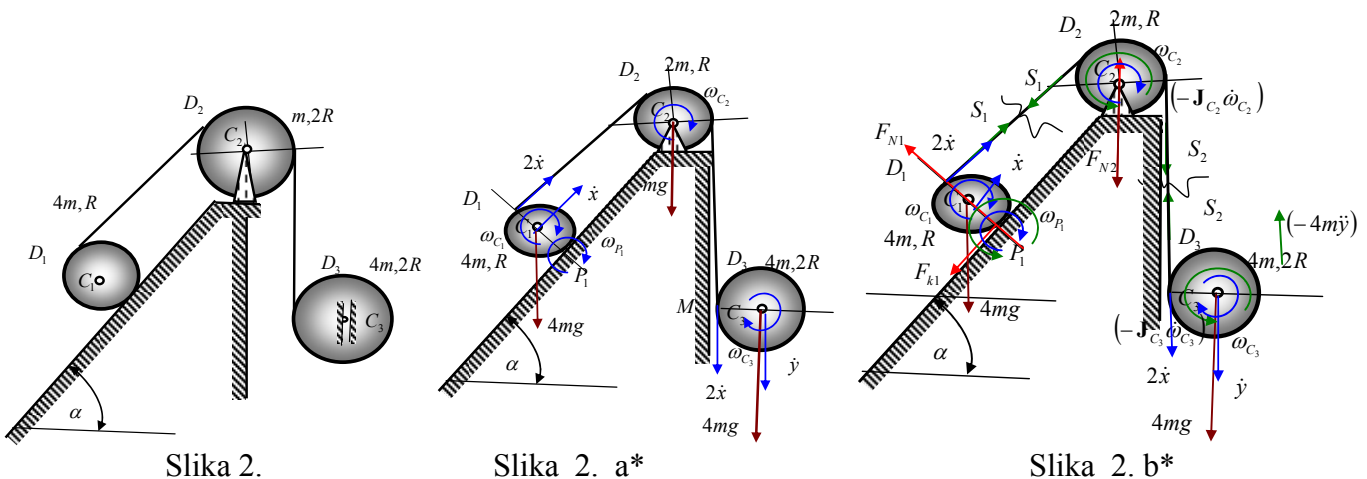
d* snagu rada sile koje dejstvuju na sistem;

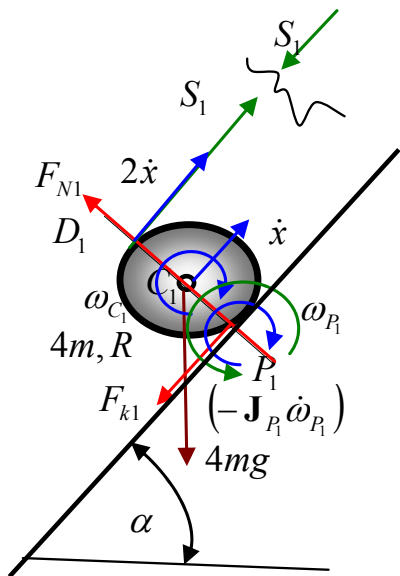
e* napisati integral energije sistema;

f* diferencijalne jednačine kretanja sistema pomoću generalisanih koordinata i Lagrange-ovih jednačina druge vrste. Koliki je najmanji broj diferencijalnih jednačina kretanja sistema? Odrediti ubrzanja sistema.

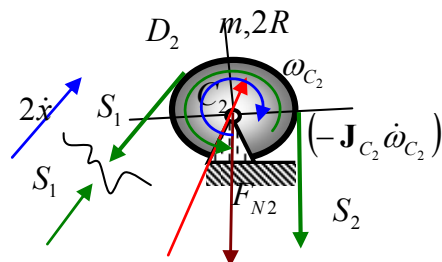
g* ubrzanja centra diska C_1 ;

h* sile u užadima.

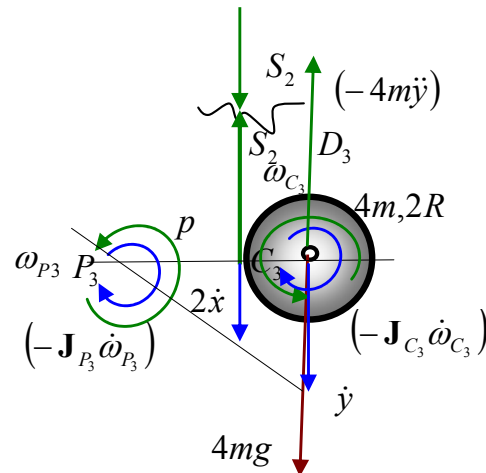




Slika 2. c*



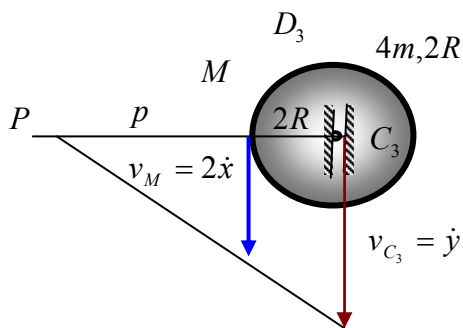
Slika 2. d*



Slika 2. e*

Sistem ima dva stepena slobode kretanja, jer disk koji se kotrlja bez klizanja po strmoj ravni, ostajući pri tome u vertikalnoj ravni ima jedan stepen slobode kretanja (detaljnije objasnjenje vidi u pocetku resenja prvog zadatka iz prethodnog ispitnog roka), a dok treci disk ima dva stepena slobode kretanja u vertikalnoj ravni, iako visi na uzetu ima dva stepena slobode kretanja, jer se uže odmotava od istog, iako su vezani nerastegljivim užerom, to znači da sistem ima samo dva stepena slobode kretanja. Disk, preko koga je prebaceno uže, ima takodje samo jedan stepen slobode kretanja-obrtanje oko zglobne veze u centru masa C_2 , alo kako uže ne klizi po njegovom obimu, već se zajedno sa njim pomera istom brzinom obima, to znači da u finalu ceo mehanički sistem ima samo dva stepena slobode kretanja. To znači da možemo izabrati samo dve generalisane koordinate, a preko njih izraziti sve ostale koordinate položaja diskova pri kretanju sistema i u proizvoljnoj dopustivoj konfiguraciji njegovih elemenata (diskova). Za generalisane koordinate izaberimo koordinate: x pomeranja centra masa prvog diska i usmerenu naviše i paralelnu strmoj ravni i u vetikalnoj ravni i koordinatu y pomeranja centra mese trecjeg diska vertikalno naniže.

Pomeranje centra mase trecjeg diska smo označili sa y i kako je uže nerastegljivo, to je brzina tačke na obimu u kojoj se uže odmotava od trecjeg diska jednaka $v_M = 2\dot{x}$, dok je brzina nejjgovog centra masa $v_{C_3} = \dot{y}$. Položj trenutnog pola P_3 brzine diska odredimo pomoću njegovog rastojanja od tačke M u pravcu njegovog horizontalnog radijusa i obeležimo sa p .



Slika 2.f* Pol brzine ravanskog kretanja trecjeg diska

Sa slike 2.c* iz slicnosti trouglova postavljamo sledeću relaciju:

$$\frac{\dot{y}}{2\dot{x}} = \frac{p - 2r}{p}$$

iz koje odredjujemo rastojanje trenutnog pola p ravanskog kretanja trecjeg diska:

$$p = \frac{4r\dot{x}}{\dot{y} - 2\dot{x}}$$

Sada je lako odrediti ugaonu brzinu ω_{C_3} obrtanja trecjeg diska oko ose kroz njegov centar masa C_3 ili pol P

$$\omega_{C_3} = \frac{v_M}{p} = \frac{\dot{y} - 2\dot{x}}{2r} = \omega_p$$

Koordinatu položaja drugog diska sa centrom u C_2 , oko koga se obrće označimo sa φ_{C_2} , a ugaonu brzinu njegovog obrtanja označimo sa $\omega_{C_2} = \dot{\varphi}_{C_2}$. Imajući u vidu da je obimna brzina tačke na obimu tog diska jednaka brzini užete to sledi da je njegova ugaona brzina jednaka:

$$\omega_{C_2} = \dot{\varphi}_{C_2} = \frac{2\dot{x}}{2r} = \frac{\dot{x}}{r}$$

Ugaona brzina ω_{C_1} obrtanja prvog diska oko ose, upravne na vertikalnu ravan i ravan diska, kroz njegov centar masa C_1 , odnosno, ugaona brzina ω_{P_1} oko paralelne ose kroz pol brzine u P_1 , oko koga se u svakom trenutku obrne disk kotrljajući se bez klizanja po strmoj ravni je

$$\omega_{P_1} = \omega_{C_1} = \frac{\dot{x}}{r}$$

Treba uočiti da se taj trenutni pol P_1 pomera po strmoj ravni, ali kako je disk osnosimetričan, a odgovarajuća tačka na konturi diska u kojoj se tokom njegovog kotrljanja bez klizanja po strmoj ravni dodiruje sa njim. To znači da se osa trenutne rotacije pomera i po konturi diska, ali je aksijalni moment inercije diska za taj sistem osa uvek isti i konstantan, pa se ta osobina može koristiti pri pisanju jednačina dinamike diska, što ne bi bio slučaj da kontura nije krug (a disk cilindrično telo sa osnom simetrijom), a disk je homogen i sa centrom masa u centru konture, kako isti smatramo i tankim.

Aksijalni moment inercije mase prvog diska za horizontalnu osu kroz centar C_1 mase diska \mathbf{J}_{C_1} , odnosno kroz trenutni pol brzine P_1 , \mathbf{J}_{P_1} , a čija je masa $4m$ i poluprečnik r , su:

$$\mathbf{J}_{C_1} = \frac{4mr^2}{2} \quad \text{i} \quad \mathbf{J}_{P_1} = \frac{12mr^2}{2}$$

Aksijalni moment inercije mase drugog diska za horizontalnu osu kroz centar C_2 mase diska \mathbf{J}_{C_2} je:

$$\mathbf{J}_{C_2} = \frac{4mr^2}{2} = 2mr^2$$

Aksijalni moment inercije mase trećeg diska za horizontalnu osu kroz centar C_3 mase diska \mathbf{J}_{C_3} je:

$$\mathbf{J}_{C_3} = \frac{4m(2r)^2}{2} = 8mr^2$$

Ukupna kinetička energija sistema jednaka je zbiru kinetičkih energija rotacije prvog diska oko njegove ose trenutne rotacije pri kotrljanju bez klizanja po strmoj ravni, kinetičke energije rotacije drugog diska oko ose kroz njegov centar masa i kinetičke energije translacije trećeg diska i kinetičke energije rotacije trećeg diska oko ose kroz njegov centar masa:

$$\mathbf{E}_k = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P_1}\omega_{P_1}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C_2}\omega_{C_2}^2 + 4m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C_3}\omega_{C_3}^2 = m(8\dot{x}^2 - 4\dot{x}\dot{y} + 3\dot{y}^2)$$

Na sistem od aktivnih sila dejstvuju sile težine diskova, ali sila težine drugog diska ne vrši nikakav rad, jer se njena napadna tačka ne pomera u vertikalnom pravcu, pa je rad nula, a promena potencijalne energije je takodje jednaka nuli. Promena potencijalne energije sistema od dejstva sile težine $4mg$ prvog diska je različita od nule, jer se napadna tačka te sile težine podiže za $x \sin \alpha$, dok se napadna tačka sile težine $4mg$ trećeg diska spišta za y , te se potencijalna energija sistema smanjuje. Ukupna promena potencijalne energije posmatranog materijalnog sistema pri kretanju i promeni konfiguracije njegovih elemenata određene izabranim generalisanim koordinatama je sada:

$$\mathbf{E}_p = 4mgx \sin \alpha - 4mgy = 4mg(x \sin \alpha - y)$$

Kako na sistem dejstvuju aktivne sile, koje su konzervativne, to je ukupna mehanička energija sistema konstantna i jednaka onoj, koju je sistem imao u početnom trenutku kretanja sistema:

$$\mathbf{E}_k + \mathbf{E}_p = \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{k0} + \mathbf{E}_{p0}$$

$$m(8\dot{x}^2 - 4\dot{x}\dot{y} + 3\dot{y}^2) + 4mg(x \sin \alpha - y) = \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{k0} + \mathbf{E}_{p0} = const$$

Ovo je i integral energije posmatranog mehaničkog konzervativnog sistema.

Diferenciranjem po vremenu izraza za ukupnu energiju sistema dobijamo diferencijalnu jednačinu kretanja u sledećem obliku:

$$\frac{d(\mathbf{E}_k + \mathbf{E}_p)}{dt} = 0$$

$$16m\dot{x}\ddot{x} - 4m\dot{y}\ddot{x} - 4m\dot{x}\ddot{y} + 6m\dot{y}\ddot{y} + 4mg\dot{x} \sin \alpha - 4mg\dot{y} = 0$$

odnosno

$$\dot{y}(-4m\ddot{x} + 6m\ddot{y} - 4mg) + \dot{x}(16m\ddot{x} - 4m\ddot{y} + 4mg \sin \alpha) = 0$$

Kako su brzine prizvoljne to iz prethodne relacije dobijamo dve obične diferencijalne jednačine u sledećem obliku:

$$16m\ddot{x} - 4m\ddot{y} = -4mg \sin \alpha$$

$$-4m\ddot{x} + 6m\ddot{y} = 4mg$$

Iz poslednjeg sistema diferencijalnih jednačina određujemo ubrzanja sistema u obliku

$$\ddot{x} = \frac{1}{10} g(2 - 3 \sin \alpha)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{5} g(4 - \sin \alpha)$$

Snaga rada neke sile, koja dejstvuje na telo se izražava pomoću skalarnog proizvoda sile i brzine kretanja materijalne tačke na koju dejstvuje ta sila, a u obliku: $P = (\vec{F}, \vec{v})$.

Snaga rada aktivnih sila, koje dejstvuju na posmatrani materijalni system pojedinačno je:

$$P_1 = -4mg\dot{x} \sin \alpha$$

$$P_2 = 2mgv_{C_2} = 0$$

$$P_3 = 4mg\dot{y}$$

Snaga rada sila inercije, koje dejstvuju na posmatrani sistem je:

$$P_{11,j} = -\mathbf{J}_{P_1} \dot{\omega}_{P_1} \omega_{P_1} = -6m\ddot{x}\dot{x} \quad \text{snaga rada sila inercije rotacije prvog diska}$$

$$P_{22,j} = -\mathbf{J}_{C_2} \dot{\omega}_{C_2} \omega_{C_2} = -2m\ddot{x}\dot{x} \quad \text{snaga rada sila inercije rotacije drugog diska}$$

$$P_{33,jT} = -4m\ddot{y}\dot{y} \quad \text{snaga rada sila inercije translacije trećeg diska}$$

$$P_{33,jR} = -\mathbf{J}_{C_3} \dot{\omega}_{C_3} \omega_{C_3} = -8mr^2 \left(\frac{\ddot{y} - 2\ddot{x}}{2r} \right) \left(\frac{\dot{y} - 2\dot{x}}{2r} \right) \quad \text{snaga rada sila inercije rotacije trećeg diska}$$

S obzirom da se radi o idealnim vezama i konzervativnom sistemu, to je snaga rada otpora idealnih veza jednaka nuli, jer su brzine u tangencijalnom pravcu na veze, a otpori idealnih veza upravni na brzine, pa je snaga rada tih sila jednaka nuli. S obzirom da je sistem konzervativan, a ukupna energija sistema konstantna, to je ukupna snaga rada svih sila sistema jednaka nuli.

$$\frac{d(\mathbf{E}_k + \mathbf{E}_p)}{dt} = P = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i, \vec{v}_i) = 0$$

$$\frac{d(\mathbf{E}_k + \mathbf{E}_p)}{dt} = P = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i, \vec{v}_i) = P_1 + P_2 + P_3 + P_{11,j} + P_{22,j} + P_{33,jT} + P_{33,jN} = 0$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_{11,j} + P_{22,j} + P_{33,j} = \dot{y}(-4m\ddot{x} + 6m\ddot{y} - 4mg) + \dot{x}(16m\ddot{x} - 4m\ddot{y} + 4mg \sin \alpha) = 0$$

Da bi smo odredili sile u užadima, napravićemo dekompoziciju sistema na sastavne proste podsisteme-diskove "presecanjem" užadi i zamenom dejstva veza užadima parovima suprotnih sila u užadima. Zatim ćemo na osnovu principa dinamičke ravnoteže za svaki od podsistema napisati jednačine ravnoteže sila uključujući i aktivne i reaktivne sile, kao i sile inercije. Iz tih jednačina određujemo nepoznate sile u užadima, kao i odgovarajuće sile inercije. Medjutim kako smo već odredili ubrzanja sistema, dovoljno je iz tih sistema jednačina dinamičke ravnoteže, koristiti samo one jednačine koje su potrebne da odredimo nepoznate sile u užadima i jos jednu kojom ćemo proveriti tačnost određenih izraza za unutrašnje sile u užadima.

Primenjujući princip dinamičke ravnoteže za dinamičku ravnotežu trećeg diska, na koji dejstvuje aktivna sila težine $4mg$, sila inercije $-4m\ddot{y}$ translacije diska i moment sila inercije $\mathbf{J}_{C_3} \dot{\omega}_{C_3}$ rotacije diska oko ose kroz njegov centar masa i sila veze – sila u užetu S_2 , dobijamo sledeće dve jednačine:

$$4m\ddot{y} = 4mg - S_2$$

$$\mathbf{J}_{C_3} \dot{\omega}_{C_3} = 2rS_2$$

Iz prethodnog sistema jednačina, s obzirom da smo već ranije odredili ubrzanja sistema, a medju njima i $\ddot{y} = \frac{1}{5} g(4 - \sin \alpha)$, nije teško dobiti unutrašnju silu u delu užeta, koje namotano na treći disk i dinamički "nosi" taj disk koji se po njemu odmotava, kao i proveriti tačnost dobijenog analitičkog izraza:

$$S_2 = 4mg - 4m\ddot{y} = 4mg - 4m \frac{1}{5} g(4 - \sin \alpha)$$

$$S_2 = \frac{4}{5}mg(1 + \sin \alpha)$$

$$S_2 = \frac{1}{2r} \mathbf{J}_{C_2} \dot{\omega}_{C_2} = \frac{1}{2r} 8mr^2 \frac{\ddot{y} - 2\ddot{x}}{2r} = 2m \left[\frac{1}{5}g(4 - \sin \alpha) - 2 \frac{1}{10}g(2 - 3 \sin \alpha) \right] = \frac{4}{5}mg(1 + \sin \alpha)$$

Primenjujući princip dinamičke ravnoteže za dinamičku ravnotežu drugog diska, koji se obrće oko svog centra masa C_2 , a na koji dejstvuju dve obimne sile S_1 i S_2 u delovima užadi čineći momente obrtanja, kao i sile inercije koje redukovane na centar masa C_2 , takodje čine jedan spreg momenta $-\mathbf{J}_{C_2} \ddot{\varphi}_{C_2}$, kao i sila težine i sila otpora zgloba u C_2 , koje proćaze kroz isti, pa je njihov moment jednak nuli, možemo da napišemo sledeću jednačinu dinamičke ravnoteže momenata oko ose kroz centar masa C_2 tog diska:

$$\mathbf{J}_{C_2} \ddot{\varphi}_{C_2} = (S_2 - S_1)2r$$

Iz prethodne jednaćine, a kako smo već odredili unutrašnju silu u drugom delu užeta $S_2 = \frac{4}{5}mg(1 + \sin \alpha)$, nije teško odrediti unutrašnju silu S_1 u prvom delu nerastegljivog užeta u sledećem obliku:

$$S_1 = \frac{1}{10}mg(6 + 11 \sin \alpha)$$

Time smo odredili obe nepoznate sile u pojedinim delovima užadi. Ostaje nam još da proverimo taćnost, dobijenih izraza, a to možemo uraditi primenom principa dinamićke ravnoteže na dinamićku ravnotežu prvog diska. Na prvi disk koji je kotrlja bez klizanja po stmoj ravni dejstvuju sledeće sile: sula težine $4mg$, sila u prvom delu užeta S_1 , sila otpora strme ravni F_{N1} , sila otpora kotrljanju bez klizanja F_{k1} diska po strmoj ravni i sile inercije od translacije i rotacije tog diska, koje kada se redukuju na trenutni pol P_1 brzina (rotacije diska oko trenutne ose rotacije) cine spreg momenta $-\mathbf{J}_{P_1} \dot{\omega}_{P_1}$. Sila F_{N1} otpora strme ravni i sila F_{k1} otpora kotrljanju diska bez klizanja prolaze kroz tu taćku, pa je njihov moment sila za tu taćku P_1 jednak nuli. Jednaćina dinamićke ravnoteže momenata nabrijanih sila sistema za prenutni pol P_1 daje sledeću jednaćinu:

$$\mathbf{J}_{P_1} \dot{\omega}_{P_1} = S_1 \cdot 2r - 4mg \sin \alpha \cdot r$$

A, kako je $\ddot{x} = \frac{1}{10}g(2 - 3 \sin \alpha)$, iz prethodne jednaćine dobijamo da je:

$$S_1 = \frac{\mathbf{J}_{P_1} \dot{\omega}_{P_1} + 4mg \sin \alpha \cdot r}{2r} = 6mr^2 \frac{\ddot{x}}{r} \frac{1}{2r} + 2mg \sin \alpha = 3m \frac{1}{10}g(2 - 3 \sin \alpha) + 2mg \sin \alpha = \frac{1}{10}mg(6 + 11 \sin \alpha)$$

$$S_1 = \frac{1}{10}mg(6 + 11 \sin \alpha)$$

ćime smo potvrdili taćnost prethodno dobijenih izraza za sile u užadima i ubrzanja sistema.

TREĆI ZADATAK. Na slici 3. prikazana je homogena tanka ploćica, mace M , konture $AECDBKLMHPQRSTU$, a oblika slova M i dimanzija izraženih preko parametra dućine a i konture kao na slici i prikazano. Težište cele ploćice je u temenu C konture ploćice, koje je ne udaljenju $h = ?$ od ose vratila. Ploćica je kruto ućvršćena na lakom vratilu, tako da je osa vratila na istom pravcu kao i deo konturne ivice ploćice. Vratilo je sa lećištima, nepokretnim u A i cilindrićnim u B , na mećusobnom rastojanju $4a$. Odrediti:

a* period oscilovanja ploćice oko ose vratila, kada je ta osa horizontalna.

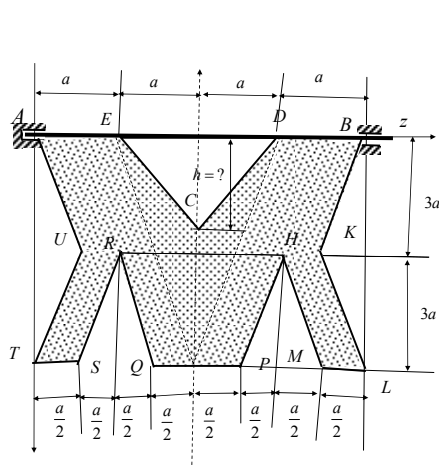
b* kolika treba da je masa materijalnih taćaka m , koje treba dodati na lakim krutim štapovima zanemarljive mase, dućine ℓ da bi ploćica oko horizontalne ose vratila bila uravnotežena, slika 3.b *? Da li dućina štapa-prepusta ℓ treba da zadovoljava neki uslov? Da li bi ploćica bila uravnotežena ako bi se obrtala oko ose vratila, koja nije horizontalna,? Obrazloći odgovor!

c* vektor momenta inercije mase tela za osu rotacije i pol u nepokretnom lećištu A ;

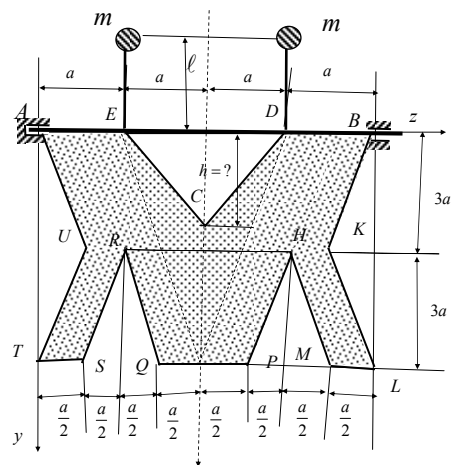
d* kinetićke pritiske na lećišta vratila za slućaj rotacije ploćice slućaj rotacije ploćice jenakoubrazano oko horizontalne ose (na slici 3. a*) poćetnom ugaonom brzinom ω_0 i ugaonim ubrzanjem ε_0 ;

e* devijacioni spreg koji desjtvuje na lećišta vratila za slućaj jenakoubrazanog obrtanja oko horizontalne ose (na slici 3. a*);

f* intenzitet vektora rotatora za taj slućaj.



Slika 3. a*

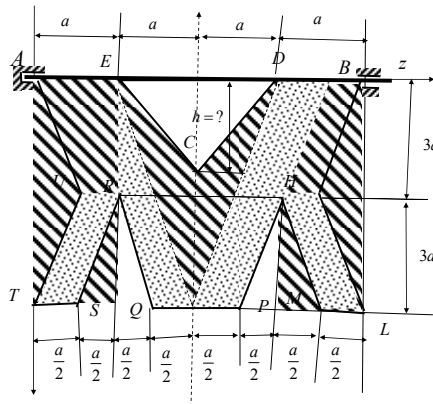


Slika 3. b*

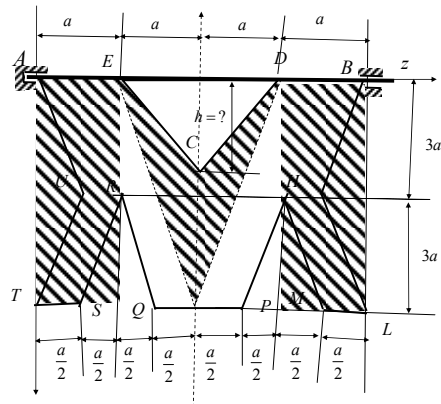
Pre nego što predjemo na rešavanje konkretnog zadatka, potrebno je odrediti visinu $h = ?$ izvadjenog trougla iz uslova da je težište posmatrane pločice u temenu tog trougla, odnosno da je $y_C = h = ?$. S obzirom da je pločica tanka i homogena, možemo prethodni zadatak rešiti koristeći srednju površinu pločice, smatrajući je "materijalnom" površinom sa homogenom površinskom gustinom i koordinate težišta površine odrediti pomoću sledećeg izraza:

$$y_C = h = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = h$$

Da bi smo zatak pojednostavili napravićemo analizu moguće dekompozivije srednje površine pločice, koristeći osobinu da se statički moment površine za neku osu ne menja, ako delove te površine pomeramo paralelno toj osi, ne menjajući rastojanje težišta delova te površine od ose. Na slikama 3.c* i d* prikazano je kako se translacijom može površina pločice u odnosu na osu oscilovanja pločice transformisati u dva jednaka pravougaonika i dva trougla od čega je manji izvadjen iz većeg. Tako transformisana površina pločice omogućava nam da jednostavnijom "računicom" (jednostavnijim izrazima) odredimo rastojanje težišta pločice od ose rotacije, kao i njen aksijalni moment inercije za tu osu, a kako ovom translacijom nismo promenili položaj težišta pločice u odnosu na dve ose osu rotacije i na nju upravnu kroz nepokretno ležište vratila, a ni osu simetrije to i devijacioni moment masa nije teško odrediti.



Slika 3. c*



Slika 3. d*

Na osnovu prethodne analize možemo da napišemo sledeće relacije za određivanje rastojanja težišta od ose oscilovanja, odnosno rotacije pločice:

$$y_C = h = \frac{\sum_{i=1}^4 A_i y_i}{\sum_{i=1}^4 A_i} = \frac{6a^2 2a - ah \frac{h}{3} + 2 \cdot 6a^2 3a}{6a^2 - ah + 2 \cdot 6a^2} = h$$

$$h(18a^2 - ah) = 48a^2a - ah\frac{h}{3}$$

$$3h(18a - h) = 144a^2 - h^2$$

$$54ah - 3h^2 - 144a^2 + h^2 = 0$$

$$54ah - 2h^2 - 144a^2 = 0$$

$$2h^2 - 54ah + 144a^2 = 0$$

odakle dobijamo sledeću kvadratnu jednačinu po nepoznatoj visini $h = ?$ manjeg trougla:

$$2h^2 - 54ah + 144a^2 = 0$$

$$h^2 - 27ah + 72a^2 = 0$$

Koreni te kvadratne jednačine su:

$$h_{1,2} = \frac{27a \mp a\sqrt{27^2 - 4 \cdot 72}}{2} = \frac{27a \mp a\sqrt{3^2 9^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3^2}}{2} = \frac{27a \mp 3a\sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{27a \mp 3a\sqrt{49}}{2}$$

$$h_{1,2} = \frac{27}{2}a \mp \frac{21}{2}a = \begin{cases} 3a \\ 24a \end{cases}$$

Od dva dobijena korena, vidimo da prvi, manji koren odgovara realno pločici, dok drugi koren predstavlja degeneraciju pločice menjanjem njenog oblika koture, pa nije za naš slučaj prihvatljivo, ali i neupotrebljivo za nas postavljen zadatak. Promenilo bi konturu pločice.

Da bi smo odredili period oscilovanja pločice potrebno je da odredimo aksijalni moment inercije pločice za osu oscilovanja. Koristimo transformisanu pločicu, pa je lako odrediti taj traženi aksijalni moment inercije mase pločice koristeći aksijalni moment inercije masa delova: za dva pravougaonika i za osu kroz njihovu osnovicu i za dva trougla i osu kroz njihovu zajedničku osnovicu. Kako oba konturna trougla pločice imaju osnovice na zajedničkoj osi oscilovanja pločice, kao fizičkog klatna, pa je lako odrediti aksijalni moment inercije mase pločice, koisteći aksijalne momente inercije površina trouglova za te ose koje prolaze pravcem osnovice trougla i dobijeni rezultat pomnožiti površinskom gustinom homogene pločice.

Površina pločice je sada:

$$A = 2 \cdot 6a^2 + 6a^2 - 3a^2 = 15a^2$$

Površinska gustina pločice je:

$$\rho = \frac{M}{A} = \frac{M}{15a^2}$$

$$\mathbf{J}_u = \rho(2I_u^{\text{Pr}} + I_u^{\Delta_1} - I_u^{\Delta_2}) = \frac{M}{15a^2} \left\{ \frac{1}{3} 2a(6a)^3 + \frac{1}{12} [2a(6a)^3 - 2a(3a)^3] \right\}$$

$$\mathbf{J}_u = \rho \frac{35a^4}{2} = \frac{35Ma^2}{30} = \frac{7Ma^2}{6}$$

Redukovana dužina fizičkog klatna je:

$$\ell_r = \frac{\mathbf{J}_u}{My_C} = \frac{7a}{18}$$

Kružna frekvencija malih oscilacija pločice oko ose u oscilovanja je:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell_r}} = \sqrt{\frac{18g}{7a}}$$

dok je period oscilovanja za male elongacije:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{7a}{18g}} = \frac{2}{3} \pi \sqrt{\frac{7a}{2g}}$$

Vektor $\vec{\mathfrak{S}}_A^{(\vec{u})}$ momenta inercije mase pločice za pol u nepokretnom ležištu A vratila i osu rotacije pločice i vratila orjentisanu jediničnim vektorom \vec{u} ima kolinearni deo sa osom \vec{u} , koji je jednak aksijalnom momentu inercije \mathbf{J}_u mase pločice za tu osu i devijacioni deo koji je upravan na osu i leži u devijacionoj ravni za tu pločicu i osu i pol u nepokretnom lištu, a jednak je centrifugalnom momentu mase pločice za par osa od kojih je jedna osa rotacije orjentisana jediničnim vektorom \vec{u} , a druga osa upravna na istu a kroz nepokretno ležište i u ravni pločice. S obzirom da smo postavili ravan pločice u ravni $u - v$, to treba odrediti centrifugalni moment pločice za te dve ose. Imajući u vidu da pločica ima jednu osu aksijalne simetrije, koja prolazi kroz centar masa pločice (težište) to je centrifugalni moment masa pločice za centralne ose jednak nuli, pa je za određivanje

devijacionog dela vektora momenta inercije mase pločice za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu dovoljno odrediti položajni deo, koji je jednak proizvodu mase pločice i koordinata njenog težišta u odnosu na taj sistem koordinata. Na osnovu toga pišemo:

$$\mathbf{J}_{Auv} = \mathbf{J}_{Cuv} + My_C u_C = 6Ma^2$$

Vektor momenta inercije mase pločice za osu rotacije orjentisanu jediničnim vektorom \vec{u} i pol u nepokretnom ležištu A je sada:

$$\vec{\mathfrak{J}}_A^{(\vec{u})} = \mathbf{J}_u \vec{u} + \mathbf{D}_{uv} \vec{v} = \frac{7}{6} Ma^2 \vec{u} + 6Ma^2 \vec{v} = \mathbf{J}_u \vec{u} + \vec{\mathfrak{J}}_A^{(\vec{u})}$$

Devijacioni deo vektora momenta inercije mase pločice za pol u nepokretnom ležištu A vratila i osu rotacije, orjentisanu jediničnim vektorom \vec{u} je:

$$\vec{\mathfrak{J}}_A^{(\vec{u})} = 6Ma^2 \vec{v}$$

Prema teoriji uz korišćenje vektora momenata masa dobili smo (vidi predavanja) da su komponente kinetičkih pritisaka na ležišta vratila:

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_{A(dev)} = \frac{1}{r_{AB}} \left| \vec{\mathfrak{J}}_A^{(\vec{u})} \right| \mathfrak{M} \vec{\mathfrak{n}}_{01} = \frac{1}{r_{AB}} \left| \vec{\mathfrak{J}}_A^{(\vec{u})} \right| \mathfrak{M}_{01} \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}$$

$$\vec{F}_{A(S-dev)} = \left| \vec{\mathfrak{E}}_A^{(\vec{u})} \right| \mathfrak{M} \vec{\mathfrak{n}}_{02} = \left| \vec{\mathfrak{E}}_A^{(\vec{u})} \right| \mathfrak{M}_{02} \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}$$

dok je devijacioni spreg intenziteta

$$\mathfrak{M}_{dev} = \left| \vec{\mathfrak{J}}_A^{(\vec{u})} \right| \mathfrak{M} = \left| \vec{\mathfrak{J}}_A^{(\vec{u})} \right| \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}$$

Kako je zadato da se vratilo i pločica obrću jednoliko ubrzano početnom ugaonom brzinom ω_0 i ugaonim ubrzwem ε_0 , to nije teško dobiti kinetičke pritiske i devijacioni spreg, koji dejstvuju na ležišta vratila pločice. Za posmatrani slučaj kinetički pritisaci na ležišta vratila:

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_{A(dev)} = \frac{3}{2} Ma \sqrt{\varepsilon_0^2 + (\varepsilon_0 t + \omega_0)^4} \vec{\mathfrak{n}}_{01}$$

$$\vec{F}_{A(S-dev)} = 3Ma \sqrt{\varepsilon_0^2 + (\varepsilon_0 t + \omega_0)^4} \vec{\mathfrak{n}}_{02}$$

dok je devijacioni spreg intenziteta

$$\mathfrak{M}_{dev} = 6Ma^2 \sqrt{\varepsilon_0^2 + (\varepsilon_0 t + \omega_0)^4}$$

Uslov da je materijalni sistem, koji se sastoji od prethodno definisane pločice i dve dodate materijalne tačke na lakim prepistima, uravnotežen, je da je centar masa pločice na osi rotacije, i da je osa rotacije glavna osa inercije za pol u nepokretnom ležištu, odnosno da je centrifugalni devijacioni deo vektora momenta inercije mase materijalnog tela za osu rotacije i pol u nepokretnom ležištu kolinearan sa osom, odnosno da je devijacioni deo jednak nuli.

Na osnovu ovoga pišemo tri uslova od kojih se dva svode na isti uslov za slučaj da je ceo sistem u jednoj ravni, uključujući i osu rotacije.

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i y_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} = 0$$

$$\mathbf{D}_{uv} = 0$$

$$\mathbf{J}_{u1}^{\ell} = \mathbf{J}_{u2}^d$$

Za naš konkretni zadatak dobijamo sledeća dva uslova:

$$2m\ell = 3Ma$$

$$2m\ell^2 = \frac{7}{6} Ma^2$$

Na osnovu tih uslova dobijamo da je uslov uravnoteženja posmatranog materijalnog objekta da je zadovoljen sledeći odnos kinetičko-geometrijskih parametara posmatranog rotora:

$$m = \frac{27}{7} M$$

$$\ell = \frac{7}{18} a$$

Centar udara C_u pločice ima koordinate $C_u(y_{C_u}, u_{C_u})$:

$$y_{C_u} = \ell_r = \frac{J_u}{My_C} = \frac{7}{8}a,$$

$$u_{C_u} = \frac{J_{uv}}{My_C} = 2a$$

Напомена: Писмени део испита траје 4 сата. Дозвољено је коришћење само штампане литературе (учбеник и таблице). Студенти који имају одложен усмени део испита дужни су да то видно означи на корицама писменог задатка, заједно са бројем поена, као и подацима о испитном року у коме су стекли то право. Такође, **НАПОМИЊЕМО** да је студент који има одложен усмени део испита **обавезан да ради писмени део испита и у испитном року у коме ће полагати усмени део испита** и да се труди да исти што боље уради.

Писмени део испита је елиминаторан. Студент остварује право на полагање усменог дела испита и позитивну оцену писменог дела испита ако оствари најмање 18 поена од укупно 30 поена (три задатка по десет поена) или ако тачно реши и уради најмање два цела испитна задатка. Студент који оствари право «условно позван на усмени део испита» **као доквалификацију** за остварење права на усмени део испита ради један теоријски задатак у трајању од једног часа и без коришћења литературе.

Резултати писменог дела испита биће саопштени у писменом облику на огласној табли факултета до 12 часова, један дан по одржаном писменом делу испита, ако дежурни асистент или наставник не саопшти другачије. Студенти који желе да добију објашњење у вези са оценом писменог дела испита или да поново виде свој писмени рад, потребно је да се обрате предметном наставнику, или асистенту у време редовних консултација са студентима. То право треба искористити до термина одржавања усменог дела испита. Ако студент није искористио то право до почетка усменог дела испита сматраће се није хтео да коридити то право. Термини консултација наставника су: понедељак 10-12 h, и петак 10-12 h у кабинету 221. Консултације асистента су у кабинету 307: понедељком 10-12 h, средом 10-12 h.

Термин за полагање усменог дела испита по правилу први понедељак после писменог дела испита, а са почетком у 8,00 часова, ако студенти не изразе другачији захтев и договоре се са предметним наставником. На усменом делу испита није дозвољено коришћење литературе нити прибележака. За успешнију припрему испита из Механике III – Динамике пожељно је да су студенти положили испите из претходне године.

Резултате писменог дела испита, текстове испитних задатака и огледне примере решених испитних задатака из претходних испитних рокова, студенти могу наћи на **WEB** презентацији предмета Механика III – Динамика, а на адреси www.masfak.ni.ac.yu или интернет страници <http://www.hm.co.yu/mehanika>.