II DOMAĆI ZADATAK IZ MATEMATIKE 2

1. Izračunati $\iint_D (xy^2 + y)\, dxdy$, gde je D pravougaonik $-1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$. (Rešenje: $I = 2$)
2. Izračunati integral $\iint_D (2x + y)\, dxdy$, ako je D oblast ograničena pravama $y = 2x$, $y = -x + 3$ i $y = 1$. Nacrtati sliku. Zadatak takođe uraditi i promenom redosleda integracije. (Rešenje: $I = \frac{11}{4}$)
3. Izračunati $\iint_D \sin(\sqrt{x^2 + y^2})\, dx\, dy$ ako je $D = \{(x, y) : \pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2\}$. (Rešenje: $I = -6\pi^2$)
4. Izračunati $\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$, gde je D krug $x^2 + y^2 \le 4$ u prvom kvadrantu. (Rešenje: $I = \frac{\pi}{4}(e^4 - 1)$)
5. Uvodeći uopštene polarne koordinate izračunati površinu elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (Rešenje: $I = ab\pi$)
6. Izračunati površinu oblasti koja je ograničena kružnicama $x^2 + y^2 \ge 1$ i $x^2 + y^2 \le 2y$. Nacrtati sliku. (Rešenje: $P = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$)
7. Izračunati $\iiint_D xy\, dx\, dy\, dz$ ako je D tetraedar ograničen ravnima $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $5x + 2y + z = 20$. (Rešenje $I = \frac{800}{3}$)
8. Izračunati $\iiint_D y\, dxdydz$ ako je oblast D deo lopte $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ u prvom oktantu ($x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$). (Rešenje: $I = \pi$)
9. Izračunati zapreminu tela ograničenog paraboloidom $y = 3 - x^2 - z^2$ i ravni $y = -1$. Skicirati sliku. (Rešenje: $I = 8\pi$)
10. Izračunati zapreminu tela ograničenog paraboloidom $x^2 + y^2 = 2 - z$ i konusom $x^2 + y^2 = z^2$. Skicirati sliku. (Rešenje: $V = \frac{5}{6}\pi$)
11. Uvodeći uopštene sferne koordinate izračunati zapreminu elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. (Rešenje: $V = \frac{4}{3}abc\pi$)
12. Neka je S deo površi paraboloida $3z = 2 + x^2 + y^2$ koji se nalazi unutar sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ i neka je D oblast koja ograničena paraboloidom i sferom. Skicirati sliku. Izračunati površinu površi S i zapreminu tela D. (Rešenje: $P = \frac{\pi}{2}(\frac{37\sqrt{37}}{9} - 3)$, $V = \frac{71}{6}\pi$.)
13. Izračunati sledeće krivolinijske integrale prve vrste
    a) $\int\limits_c xy\, ds$, ako je c kontura kruga $x^2 + y^2 + 4y = 0$ u prvom kvadrantu. (Rešenje: $I = -4$)
    b) $\int\limits_c (x^2 + y^2 + z^2) ds$, gde je c deo zavojnice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $(0 \le t \le 2\pi)$. (Rešenje: $I = \sqrt{a^2 + b^2}(2a^2\pi + \frac{8}{3}b^2\pi^3)$)
14. Izračunati dužinu luka krive $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$, $z = e^{-t}$, $(0 < t < 1)$. (Rešenje: $l = \sqrt{3}(1 - \frac{1}{e})$)
15. Izračunati krivolinijski integral druge vrste $\int\limits_{\vec{c}} (x^2 + 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy$, gde je $\vec{c}$ luk parabole $y = x^2$ od tačke $A(-1, 1)$ do tačke $B(1, 1)$. (Rešenje: $I = -\frac{14}{15}$)
16. Izračunati krivolinijski integral druge vrste $\int\limits_{\vec{c}} (x^2 + 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy$, gde je $\vec{c}$ deo prave od tačke $C(-2, -1)$ do tačke $D(3, 2)$. (Rešenje: $I = \frac{1}{2}$)
17. Primenom Grinove formule izračunati integral $\oint\limits_{\vec{c}} (x + y)\, dx - (x - y)\, dy$, ako je c pozitivno orjentisana elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (Rešenje: $I = -2ab\pi$)
18. Primenom Grinove formule izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{F} = xy\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ duž konture trougla ABC koji je pozitivno orjentisan i gde je $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(1, 2)$. (Rešenje: $I = \frac{1}{6}$)
19. Dato je vektorsko polje $\vec{F} = (y^2 + axy + 2)\vec{i} + (2xy - 2x^2 + 3y)\vec{j}$.
    a) Odrediti konstantu a tako da polje bude potencijalno, a zatim naći njegov potencijal $f(x, y)$. (Rešenje: $a = -4$, $f(x, y) = 2x + xy^2 - 2x^2y + \frac{3}{2}y^2$)
    b) Izračunati $\int\limits_{(-1,3)}^{(2,1)} \vec{F} \circ d\vec{r}$. (Rešenje: $I = 3$)
    c) Izračunati $\oint_{\vec{c}} \vec{F} \circ d\vec{r}$, ako je $\vec{c}$ pozitivno orjentisan krug $x^2 + y^2 = 9$. (Rešenje: $I = 0$)