DJ KOJA RAZDVAJA PROMENLJIVE

1. $y' - \frac{2xy}{x^2-1} = 0$. *Rešenje:* $y = c(x^2-1)$.

2. Naći opšte rešenje DJ $x^2(y^3+5)\,dx + (x^3+5)y^2\,dy = 0$, a zatim naći ono partikularno rešenje koje zadovoljava početni uslov $y(0) = 1$. *Rešenje:* $(x^3+5)(y^3+5) = c$, $c = 30$.

3. Naći partikularno rešenje jednačine $(1+e^x)yy' = e^x$, koje zadovoljava početni uslov $y(0) = 1$. *Rešenje:* $y^2 = 2\ln(1+e^x) + 1 - 2\ln 2$.

HOMOGENA DJ

4. $x^3y' = y(x^2+y^2)$. *Rešenje:* $y^2 = \frac{-x^2}{2\ln|x|+c}$.

5. $y - xy' = y\ln\frac{x}{y}$, $x, y > 0$. *Rešenje:* $y = xe^{cx}$.

6. $y' = \frac{x^3+2x^2y-y^3}{x^3+x^2y}$. *Rešenje:* $y = \frac{x(x^2-c)}{x^2+c}$.

LINEARNA DJ

7. Naći opšte rešenje DJ $y' - \frac{1}{x}y = x^2$, a zatim naći partikularno rešenje koje zadovoljava uslov $y(2) = 4$. *Rešenje:* $y = \frac{x^3}{2} + cx$, $c = 0$.

8. $(x^2-1)y' - 2xy + 2x - 2x^3 = 0$. *Rešenje:* $y = |x^2-1|(c + \ln|x^2-1|)$.

9. $xy' + \frac{y}{1+x} = x$, $x > 0$. *Rešenje:* $y = \frac{x+1}{x}(c + x - \ln(x+1)$.

BERNULIJEVA DJ

10. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$. *Rešenje:* $y = x^4(c + \frac{1}{2}\ln|x|)^2$.

11. $yy' + x^3 - \frac{y^2}{x} = 0$. *Rešenje:* $y = \pm\sqrt{cx^2 - x^4}$.

12. $y' + 2xy = 2x^3y^3$. *Rešenje:* $\frac{1}{y^2} = ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$.

DJ KOJE DOPUŠTAJU SNIŽAVANJE REDA

13. $y''\cos x + y'\sin x + 1 = 0$. *Rešenje:* $y = c_1\sin x + \cos x + c_2$.

14. $yy'' = (y')^2$. *Rešenje:* $y = c_1e^{c_2x}$.

LINEARNA DJ SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

15. $y'' - 4y' + 4y = 0$ *Rešenje:* $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$.

16. $y''' - 3y' + 2y = 0$. *Rešenje:* $y = e^x(c_1 + c_2x) + c_3e^{-2x}$.

17. $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$. *Rešenje:* $y = e^x(c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x)$.

Metodom varijacije konstanata rešiti DJ (zadaci od 18. do 21.)

18. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$. *Rešenje:* $y = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2 + c_1 + c_2x\right)e^{-2x}$.

19. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$. *Rešenje:* $y = (\ln(1+e^x) + D_1)e^{-x} + (\ln(1+e^x) - e^x + D_2)e^{-2x}$.

20. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$. *Rešenje:* $y = c_1\cos x + c_2\sin x + x\sin x + \cos x\ln|\cos x|$.

21. $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x\sin x}$. *Rešenje:* $y = e^{-x}\big((c_1 - x)\cos x + (c_2 + \ln|\sin x|)\sin x\big)$.

Metodom neodređenih koeficijenata rešiti DJ (zadaci od 22. do 26.)

22. $y'' - 3y' + 2y = (x^2+x)e^{3x}$. *Rešenje:* $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}(x^2 - 2x + 2)$.

23. $y'' - 2y' = x^2 - x$. *Rešenje:* $k_1 = 0 = \alpha$, $k_2 = 2$, $y = c_1 + c_2e^{2x} - \frac{x^3}{6}$.

24. $y''' - 2y'' + y' = e^x$. *Rešenje:* $k_1 = 0$, $k_{2,3} = 1 = \alpha$, $y = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$.

25. $y'' + y = \sin x$. *Rešenje:* $k_{1,2} = \pm i = \alpha \pm i\beta$, $y = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$.

26. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 3x$. *Rešenje:* $k_{1,2} = -1 \pm 2i \neq \alpha \pm i\beta = -1 \pm 3i$, $y = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{1}{5}\sin 3x)$.

27. Rešiti Ojlerovu DJ $(x-1)^2y'' - 2(x-1)y' + 2y = (x-1)^3$. *Rešenje:* $y = c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3$.

FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH

1. Naći prve parcijalne izvode po x i po y funkcije $z = x^2y^3 + 4x - 3y + 6$ u tački $(1, 2)$.
2. Odrediti prve parcijalne izvode sledećih funkcija: $z = \cos(xy)$; $z = e^{\frac{y}{x}}$; $u = xy^2z^3$; $u = z^{xy}$.
3. Odrediti totalni diferencijal sledećih funkcija:
   $z = 2x^3 + x^2y + y$; $z = \frac{xy}{x-y}$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. Pokazati da je tačna jednakost $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$ ako je $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$.
5. Naći druge parcijalne izvode sledećih funkcija:
   $z = x^4 + 2y^3 + x^2y + 2xy^2 + 3$; $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$.
6. Ako je $u = x + \frac{x-y}{y-z}$ dokazati da je $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$.
7. Data je funkcija $z = x^2 + y^2$. Naći dz i d^2z.
8. Odrediti $\frac{dz}{dt}$ u tački $t = 0$ ako je $z = x^2 + xy$, $x = e^t$ i $y = \sin t$. *Rešenje:* $\frac{dz}{dt}\Big|_{t=0} = 3$.
9. Naći $\frac{dz}{dx}$ ako je $z = x\ln(x + 2y) + y^2$, a $y = \sin x^2$.
10. Odrediti $\frac{\partial z}{\partial v}$ ako je $z = ye^x$, $x = u^2 + v^2$, $y = uv$.
11. Naći $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ u tački $(x, y) = (2, \frac{\pi}{4})$ ako je $z = u^2 + v^2$, $u = x\cos y$ i $v = x\sin 2y$. *Rešenje:* $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,\frac{\pi}{4})} = 6$, $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(2,\frac{\pi}{4})} = -4$.
12. Naći $\frac{\partial z}{\partial u}$ i $\frac{\partial z}{\partial v}$ ako je $z = x^2\cos 4y$, $x = u^2v^3$, $y = u^3 + v^3$.
13. Ako je $x = e^u\cos v$, $y = e^u\sin v$, $z = uv$ naći $(z'_x)^2 + (z'_y)^2$.
14. Naći izvod $\frac{dy}{dx}$ funkcije $y = f(x)$ koja je implicitno zadata jednačinom $x^2\ln y - y^2\ln x = 0$. *Rešenje:* $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y\ln y - y^3}{2xy^2\ln x - x^3}$.
15. Izračunati $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ u proizvoljnoj tački i u tački $M(x, y, z) = (1, 0, 1)$ ako je funkcija $f(x, y) = z$ implicitno definisana jednačinom $z^2x - xy^2 + y^2z - x + 2y$. *Rešenje:* $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,0)} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,0)} = -1$.
16. Naći ekstremne vrednosti funkcije $z = \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + xy - 2x$.
17. Naći ekstremne vrednosti funkcije $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.
18. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$, $x, y > 0$.
19. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = e^{x-y}(x^2 - 2y)$. *Rešenje:* $z_{\min} = z(1, \frac{3}{2}) = -\frac{2}{\sqrt{e}}$.
20. Dokazati da funkcija $z = \ln(xy) - axy^2 - by$, $(a, b \in \mathbb{R},\ x, y > 0)$ nema lokalne ekstremne vrednosti. *Rešenje:* Dokazati da je stacionarna tačka $x = \frac{b^2}{a}$, $y = -\frac{1}{b}$ i da je $D = -\frac{a^2}{b^2} < 0$.
21. Naći uslovne ekstremume funkcije $z = x^2 + y^2$ ako je $xy = x + y$.
22. Naći uslovne ekstremume funkcije $z = ax + by$, $a, b > 0$ ako je $x^2 + y^2 = 1$.
23. Odrediti jednačinu tangentne ravni i normale
    a) eliptičkog paraboloida $z = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2}$ u tački $P(6, 3, 9)$
    b) konusa $z^2 = 2x^2 + y^2$ u tački $Q(2, 1, 3)$.