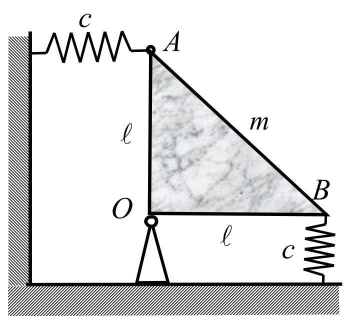
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У НИШУ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
Испитни рок: ***Мартовски рок (24. марта) 2008.***
Предметни наставник: ***Проф. др Катица (Стевановић) Хедрих***, *академик Академије наука високих школа и универзитета Украјине, академик Академије нелинеарних наука Москва, члан GAMM, Int. ASME, EuroMech и Tensor Society. члан Society for Nonlinear Dynamics in Human Factors - Аустралија. .*
Предметни асистент: ***Јулијана Симоновић***

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА
ПИСМЕНОГ ДЕЛА ИСПИТА ИЗ ПРЕДМЕТА
ЕЛАСТОДИНАМИКА
ELASTODINAMIKA

ПРВИ ЗАДАТАК: Механички осцилаторни систем, приказан на слици бр. 1. у равнотежној конфигурацији, састоји се од једне хомогене танке правоугло-једнакокраке троугаоне плочице ΔOAB, са правим углом у O, дужина катета по ℓ, масе m, која је зглобом везана у тачки O за непокретан зид и у тачки A повезана је хоризонталном опругом крутости c, параленом поду за непокретни вертикални зид, а у тачки B вертикалном опругом крутости c за под. У положају равнотеже система катете плочице су једна у хоризонталном, а друга у вертикалном правцу. Одредити услове стабилности приказане конфигурације равнотеже и сопствену кружну фреквенцију малих осцилација система око приказаног положаја равнотеже. Уведи ознаке $k = \frac{c\ell}{mg}$ и, $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$.



Слика бр. 1

ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТИ РЕШЕЊА ПРВОГ ЗАДАТКА:

Статички услови равнотеже система $cf_{st} = \frac{mg}{3}$.

Систем има један степен слободе осциловања. Генералисана координата система је: φ .

Спусштање центра маса плочице је: $h_C = \frac{\ell\sqrt{2}}{3}\left[\cos\alpha - \cos(\alpha+\varphi)\right] \approx \frac{\ell}{3}\left(\frac{\varphi^2}{2} + \varphi\right)$.

Потенцијална енергија система је: $\mathbf{E_P} = \frac{1}{2}c\left(f_{st} + \Delta x\right)^2 - \frac{1}{2}cf_{st}^2 + \frac{1}{2}c(\Delta y)^2 - mgh_C = \frac{1}{2}\frac{1}{3}mg\ell(6k-1)\varphi^2$

Кинетичка енергија система: $\mathbf{E}_k = \frac{1}{2}\mathbf{J}_O\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2$

Аксијални момент инерције плочице за осу кроз зглоб O је: $\mathbf{J}_O = \rho\left[\mathbf{I_x} + \mathbf{I}_y\right] = \rho\left[\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3}\right] = \frac{1}{3}ma^2$

Lagrange-ова једначина друге врсте је: $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{E_k}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathbf{E_k}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial \varphi} = 0$.

$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{3}mg\ell(6\kappa - 1)\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$

Квадрат сопствене кружне фреквенције је:

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}(6\kappa - 1)$$

Услов стабилности система је:

$6\kappa > 1$ или $6c\ell > mg$.

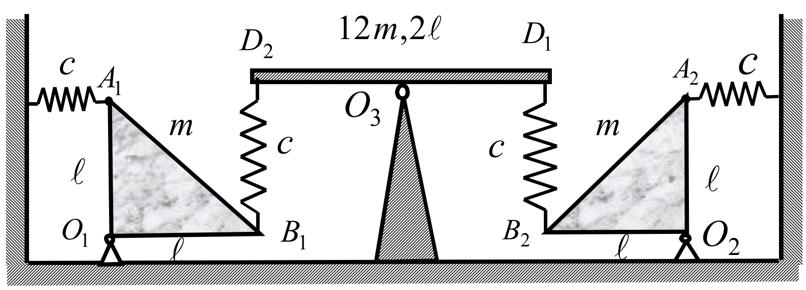
ДРУГИ ЗАДАТАК: Механички материјални осцилаторни систем, приказан на слици бр. 2. у равнотежној конфигурацији, састоји се од две једнаке хомогене танке плочице облика једнакокрако правоуганих троуглова $\Delta O_i A_i B_i$, $i = 1,2$ са правим углом у O_i, дужина катета по ℓ, маса m, и које су појединачно, својим зглобом везане у одговарајућој тачки O_i за непокретан под и у тачки A_i свака је повезана по једном хоризонталном опругом крутости c, параленом поду за непокретни зид. Штап D_1D_2, дужине 2ℓ, масе $12m$, такође пипада том систему, а у тачки O_3 на средини је зглобно везан за под, а крајевима D_1 и D_2 помоћу вертикалних опруга крутости по c, везан је за одговарајуће тачке B_1, односно B_2 за плочице $\Delta O_i A_i B_i$, $i = 1,2$. У положају равнотеже система катете плочица су по једна у вертикалном, а по једна у хоризонталном правцу, док штап заузима хоризонтални правац. Цео систем је у вертикалној равни.

а* Одредити услове стабилности назначеног положаја равнотеже.

б* Колико степени слободе осциловања има систем, а колико сопствених кружних фреквенција?

ц* Одредити сопствене кружне фреквенције малих осцилација система око положаја стабилне равнотеже.

д* Ако се штап фиксира у назначеном положају , колико степени слободе има систем? Одредити сопствене кружне фреквенције система за тај случај , као и нормалне координате система. Дај поређење својстава осцилаторног система за тај случај и претходни случај. Уведи ознаке $k = \frac{c\ell}{mg}$ и $u = \frac{\ell\omega^2}{g}$.



Слика бр. 2.

ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТИ РЕШЕЊА ДРУГОГ ЗАДАТКА: Систем има три спепени слободе кретања. За генералисане координате усвајамо: φ_i, $i = 1,2,3$.

Кинетичка ененергија система је: $\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=3}\mathbf{J}_{Oi}\dot{\varphi}_i^2 = \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\left(\dot{\varphi}_1^2 + 12\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2\right)$

Промена потенцијалне енергије система је:

$$\mathbf{E_p} = \frac{1}{2}c(f_{1s} + \Delta y_1)^2 - \frac{1}{2}cf_{1s}^2 + \frac{1}{2}c(f_{2s} + \Delta y_2)^2 - \frac{1}{2}cf_{2s}^2 + \frac{1}{2}c(\ell\varphi_1 - \ell\varphi_2)^2 + \frac{1}{2}c(\ell\varphi_2 - \ell\varphi_3)^2 - mgh_{C1} - mgh_{C2}$$

Матрице инерцијских коефицијената $\mathbf{A}$ и еластичних и квазиеластичних својстава $\mathbf{C}$ су:

$$\mathbf{A}=\frac{1}{3}m\ell^2\begin{pmatrix}1 & & \\ & 12 & \\ & & 1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}=\frac{mg\ell}{3}\begin{pmatrix}6\kappa-1 & -3\kappa & 0\\ -3\kappa & 6\kappa & -3\kappa\\ 0 & -3\kappa & 6\kappa-1\end{pmatrix}$$

Фреквентна једначина система је:

$$f\left(u=\frac{\ell\omega^2}{g}\right)=\left|\mathbf{C}-u\mathbf{A}\right|=\begin{vmatrix}6\kappa-1-u & -3\kappa & 0\\ -3\kappa & 6\kappa-12u & -3\kappa\\ 0 & -3\kappa & 6\kappa-1-u\end{vmatrix}=0$$

Даље није проблем одредити три корене претходне једначине.

Ако се штап фиксира, систем има два степена слободе кретања и тада су изрази за кинетичку и потенцијалну енергију:

$$\mathbf{E_k}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=3}\mathbf{J}_{Oi}\dot{\varphi}_i^2=\frac{1}{2}\frac{2m\ell^2}{3}\left(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_3^2\right)$$

$$\mathbf{E_p}=\frac{1}{2}c\left(f_{1s}+\Delta x_1\right)^2-\frac{1}{2}cf_{1s}^2+\frac{1}{2}c\left(f_{2s}+\Delta x_2\right)^2-\frac{1}{2}cf_{2s}^2+\frac{1}{2}c\left(\Delta y_1\right)^2+\frac{1}{2}c\left(\Delta y_3\right)^2-mgh_{C1}+mgh_{C3}$$

$$\mathbf{E_p}=\frac{1}{2}\frac{1}{3}mg\ell\left[\left(6\kappa-1\right)\left(\varphi_1^2+\varphi_3^2\right)\right]$$

Матрице инерцијских коефицијената $\mathbf{A}$ и еластичних и квазиеластичних својстава $\mathbf{C}$ су:

$$\mathbf{A}=\frac{1}{3}m\ell^2\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}=\frac{mg\ell}{3}\begin{pmatrix}6\kappa-1 & \\ & 6\kappa-1\end{pmatrix}$$

а то значи да су координате φ_1 и φ_3 главне координате система, а матрице система су дијагоналне, па се систем састоји од два независна парцијална осцилатора, који су уствари независни подсистеми назначеног система.

Фреквентна једначина система је:

$$f\left(u=\frac{\ell\omega^2}{g}\right)=\left|\mathbf{C}-u\mathbf{A}\right|=\begin{vmatrix}6\kappa-1-u & \\ & 6\kappa-1-u\end{vmatrix}=0$$

Крактеристични бројеви и квадрати сопствених кружних фреквенција су:

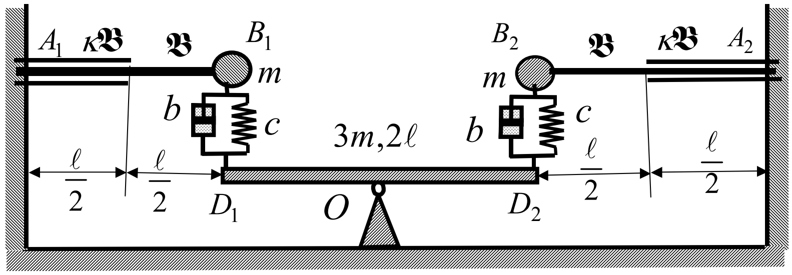
$$u_{1/2}=6\kappa-1 \qquad \omega_{1/2}^2=\frac{g}{\ell}\left(6\kappa-1\right).$$

ТРЕЋИ ЗАДАТАК: Материјални систем се састоји од две једнаке лаке конзоле A_1B_1 и A_2B_2, које су постављене у хоризонталном правцу и распона су по ℓ, савојних крутости $\kappa\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}$, на по половини распона, редом мерено од уклештења према слободним крајевима, на којима носе по једну материјалну тачку маса по m, које су једнаким опругама, постављеним у вертикалном правцу, крутости по c и једнаким пригушницама коефицијента отпорних сила по b , везане за слободне крајеве клацкалице у облику хомогеног призматичног штапа масе $3m$, дужине 2 ℓ ,зглобно везане за средиште штапа O и непокретни хоризонтални под. У положају мировања система, клацкалица је у хоризонталном положају, а опруге су ненапрегнуте.

а* Направити еквивалентни модел система и одредити број степени слободе система, као и утицајни коефицијент α_{11} померања слободног краја конзоле услед дејатва силе у истом пресеку;

; б* Написати изразе за кинетичку $\mathbf{E_k}$ и промену потенцијалне енергије $\mathbf{E_p}$ система, и функцију расипања Φ као и матрицу инерцијских $\mathbf{A}$, матрицу коефицијената еластичности и квазиеластичности $\mathbf{C}$ система и матрицу $\mathbf{B}$ коефицијената отпорних сила за случај малих осцилација система око равнотежног положаја и при томе усвоји да је једна генералисана координата $y_2=\ell\varphi$, где је φ угао заокретања клацкалице, као и ознаке $\frac{1}{c\alpha_{11}}=\widetilde{\kappa}$, $\omega_0^2=\frac{c}{m}$, $2\delta=\frac{b}{m}$ где је са α_{11} означен утицајни коефицијент померања слободног краја конзоле услед дејства силе у истом пресеку.

ц* Написати карактеристичну једначину кретања система око равнотежног положаја и оценити стабилност кретања система, као и потребне услове. Одредити бар два сопствена броја система.



Слика бр. 3.

ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТИ РЕШЕЊА ТРЕЋЕГ ЗАДАТКА:

Систем има три степени слободе кретањаи за генералисане координате усвајамо померања материјалних тачака y_1 и y_3 и угао заокретања клацкалице – штапа помножен половином његове дужине: $y_2 = \ell\varphi$.

Утицајни коефицијент α_{11} померања пресека на слободном крају конзоле услед дејства силе у том истом пресеку је: $\alpha_{11} = \dfrac{\ell^3(\kappa+7)}{2^3 \cdot 3 \cdot \kappa \cdot \mathfrak{B}} = (\kappa+7)p$.

Еквивалнтна крутост опруга којима замењујемо у моделу конзоле је једнака реципрочној вредности утицајног коефицијента α_{11} померања пресека на слободном крају конзоле услед дејства силе у том истом пресеку и износи $c_e = \dfrac{1}{\alpha_{11}}$. Како је задато да је $\dfrac{1}{c\alpha_{11}} = \tilde{\kappa}$, то за кинетичку и потенцијалну енергију можемо да пишемо следеће изразе:

$$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}\left[m\dot{y}_1^2 + m\dot{y}_3^2 + \mathbf{J}_O\dot{\varphi}^2\right] = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{i=3}\dot{y}_i^2$$

$$\mathbf{E_p} = \frac{1}{2}c_e\left(f_{1s}+y_1\right)^2 - \frac{1}{2}c_e f_{1s}^2 + \frac{1}{2}c_e\left(f_{3s}+y_3\right)^2 - \frac{1}{2}c_e f_{3s}^2 + \frac{1}{2}c\left(\ell\varphi - y_1\right)^2 + \frac{1}{2}c\left(\ell\varphi - y_3\right)^2 - mgy_1 - mgy_3$$

$$\mathbf{E_p} = \frac{1}{2}c\left[(\tilde{\kappa}+1)y_1^2 + 2y_2^2 + (\tilde{\kappa}+1)y_3^2 - 2y_1y_3 - 2y_2y_3\right]$$

Матрице, инерцијских и еластичности и квазиеластичности су:

$$\mathbf{A} = m\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = c\begin{pmatrix} (\tilde{\kappa}+1) & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & (\tilde{\kappa}+1) \end{pmatrix}$$

Функција расипања је:

$$\Phi = \frac{1}{2}b\left(\ell\dot{\varphi} - \dot{y}_1\right)^2 + \frac{1}{2}b\left(\ell\dot{\varphi} + \dot{y}_3\right)^2 = \frac{1}{2}b\left(\dot{y}_1^2 + 2\dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2 - 2\dot{y}_2\dot{y}_1 + 2\dot{y}_2\dot{y}_3\right)$$

Матрица $\mathbf{B}$ коефицијената отпорних сила (пригушења) је:

$$\mathbf{B} = b\begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Карактеристична једначина је:

$$f(\lambda) = \left|\omega_0^2\overline{\mathbf{C}} + 2\delta\lambda\overline{\mathbf{B}} + \lambda^2\overline{\mathbf{A}}\right| = \begin{vmatrix} (\tilde{\kappa}+1)\omega_0^2 + 2\delta\lambda + \lambda^2 & -2\delta\lambda - \omega_0^2 & 0 \\ -2\delta\lambda - \omega_0^2 & 2\omega_0^2 + 4\delta\lambda + \lambda^2 & 2\delta\lambda - \omega_0^2 \\ 0 & 2\delta\lambda - \omega_0^2 & (\tilde{\kappa}+1)\omega_0^2 + 2\delta\lambda + \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$f(\lambda) = \left[(\tilde{\kappa}+1)\omega_0^2 + 2\delta\lambda + \lambda^2\right]\left\{\left[(\tilde{\kappa}+1)\omega_0^2 + 2\delta\lambda + \lambda^2\right]\left[2\omega_0^2 + 4\delta\lambda + \lambda^2\right] - \left[2\delta\lambda - \omega_0^2\right]^2 - \left[2\delta\lambda + \omega_0^2\right]^2\right\} = 0$$

Два од шест сопствених бројева система су:

$$\lambda_{1/2} = -\delta \mp \sqrt{\delta^2 - 4(\tilde{\kappa}+1)\omega_0^2}$$

Остала четири сопствена броја система се добијају као корени следеће једначине:

$$\left\{\left[(\tilde{\kappa}+1)\omega_0^2 + 2\delta\lambda + \lambda^2\right]\left[2\omega_0^2 + 4\delta\lambda + \lambda^2\right] - \left[2\delta\lambda - \omega_0^2\right]^2 - \left[2\delta\lambda + \omega_0^2\right]^2\right\} = 0$$

$$2(\tilde{\kappa}+1)\omega_0^4 + 4\delta\lambda\omega_0^2 + 2\lambda^2\omega_0^2 + 4\delta\lambda(\tilde{\kappa}+1)\omega_0^2 + 8\delta^2\lambda^2 + \lambda^4 + (\tilde{\kappa}+1)\omega_0^2\lambda^2 + 4\delta\lambda^3 + \lambda^4 - 8\delta^2\lambda^2 - 2\omega_0^4 = 0$$

$$2\tilde{\kappa}\omega_0^4 + 4\lambda\delta(\tilde{\kappa}+3)\omega_0^2 + \lambda^2\left\{\omega_0^2(\tilde{\kappa}+3)\right\} + 4\delta\lambda^3 + \lambda^4 = 0$$

Да би смо испитали стабилност система користимо Routh-Hurwitz-ов критеријум и формирамо следећу детерминанту коефицијената карактеристичне једначине:

$$2\tilde{\kappa}\omega_0^4 + 4\lambda\delta(\tilde{\kappa}+3)\omega_0^2 + \lambda^2\left\{\omega_0^2(\tilde{\kappa}+3)\right\} + 4\delta\lambda^3 + \lambda^4 = 0$$

$$2\tilde{\kappa}\omega_0^4 + \lambda\left\{\omega_0^2(\tilde{\kappa}+3)\right\}(4\delta+\lambda) + \lambda^3(4\delta+\lambda) = 2\tilde{\kappa}\omega_0^4 + \lambda(4\delta+\lambda)\left\{\omega_0^2(\tilde{\kappa}+3) + \lambda^2\right\} = 0$$

$$2\tilde{\kappa}\omega_0^4 + 4\lambda\delta(\tilde{\kappa}+3)\omega_0^2 + \lambda^2\left\{\omega_0^2(\tilde{\kappa}+3)\right\} + 4\delta\lambda^3 + \lambda^4 = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_3 & A_1 & 0 \\ A_4 & A_2 & A_0 \\ 0 & A_3 & A_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\delta & 4\delta(\tilde{\kappa}+3)\omega_0^2 & 0 \\ 1 & \left\{\omega_0^2(\tilde{\kappa}+3)\right\} & 2\tilde{\kappa}\omega_0^4 \\ 0 & 4\delta & 4\delta(\tilde{\kappa}+3)\omega_0^2 \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4\delta & 4\delta(\tilde{\kappa}+3)\omega_0^2 \\ 1 & \left\{\omega_0^2(\tilde{\kappa}+3)\right\} \end{vmatrix} = 4\delta\left\{\omega_0^2(\tilde{\kappa}+3)\right\} - 4\delta(\tilde{\kappa}+3)\omega_0^2 = 0$$

за $\tilde{\kappa} = 1$ карактеристична једначина је облика

Карактеристична једначина је:

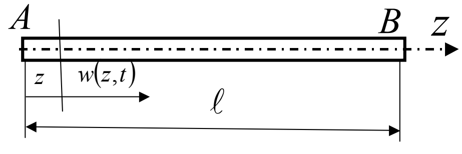
$$f(\lambda) = \left|\omega_0^2\overline{\mathbf{C}} + 2\delta\lambda\overline{\mathbf{B}} + \lambda^2\overline{\mathbf{A}}\right| = \begin{vmatrix} 2\omega_0^2 + 2\delta\lambda + \lambda^2 & -2\delta\lambda - \omega_0^2 & 0 \\ -2\delta\lambda - \omega_0^2 & 2\omega_0^2 + 4\delta\lambda + \lambda^2 & 2\delta\lambda - \omega_0^2 \\ 0 & 2\delta\lambda - \omega_0^2 & 2\omega_0^2 + 2\delta\lambda + \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$f(\lambda) = \left(2\omega_0^2 + 2\delta\lambda + \lambda^2\right)\left\{\left(2\omega_0^2 + 2\delta\lambda + \lambda^2\right)\left(2\omega_0^2 + 4\delta\lambda + \lambda^2\right) - \left(2\delta\lambda - \omega_0^2\right)^2 - \left(2\delta\lambda + \omega_0^2\right)^2\right\} = 0$$

$$f(\lambda) = \left(2\omega_0^2 + 2\delta\lambda + \lambda^2\right)\left\{2\omega_0^4 + 16\delta\lambda\omega_0^2 + 4\lambda^2\omega_0^2 + 4\delta\lambda^3 + \lambda^4\right\} = 0$$

ЧЕТВРТИ ЗАДАТАК: Тачке попречних пресека аксијално напрегнуте, слободне на крајевима челичне греде $\overline{AB}$, распона ℓ, кружног попречног пресека пречника d, модула еластичности $\mathbf{E}$ и модула клизања $\mathbf{G}$, густине материјала ρ, у почетном тренутку су добиле уздужна померања $w(z,0)$ и саопштене су им уздужне брзине $\left.\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\right|_{t=0}$ које се мењају дуж распона ℓ греде по законима: $w(z,0) = \sum_{p=1}^{5} v_0 \cos\left[(2p-1)\frac{\pi z}{\ell}\right]$ и $\left.\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{p=1}^{10} w_0\omega_0 \cos\left(2p\frac{\pi z}{\ell}\right)$, где је $\omega_0 = \frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

a* Одредити закон сопствених лонгитудиналних осцилација, слободне на крајевима, греде које настају поремећајем природног стања равнитеже греде, напрезањем у аксијалном правцу, за задате почетне услове. Којим фреквенцијама за задате почетне услове греда стварно лонгитудинално осцилује? Колико се хармоника осциловања јавља у закону лонгитудиналних осцилација побуђених у греди за задате почетне услове.



Слика бр. 4.

ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТИ РЕШЕЊА ЧЕТВРТОГ ЗАДАТКА: Диференцијална једначина лонгитудиналних осцилација греде кружног попречног пресека је:

$$\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}$$

где је $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $w(z,t)$ угао заокретања попречних пресека штапа.

Према Beornoulli-јевој методи партикуларних интеграла решење се може претпоставити у облику:

$$w(z,t) = \mathbf{Z}(z)\mathbf{T}(t)$$

где су:

$$\mathbf{Z}(z) = C_1 \cos \lambda z + C_2 \sin \lambda z$$

$$\mathbf{T}(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\omega = \lambda \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

За задате граничне услове, крајеви греде су слободни, па су напони за тачке слободних основа на крајевима једнаки нули, односно први извод сопствене функције $\mathbf{Z}'(z)$ треба да је једнак нули у тим пресецима на крајевима греде.

Нормални напон у тачкама попречног пресека је:

$$\sigma_z(z,t) = E\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} = E\mathbf{Z}(z)\mathbf{T}(t) = E\mathbf{T}(t)\lambda\left[-C_1 \sin \lambda z + C_2 \cos \lambda z\right].$$

па леди да је:

$$\sigma_z(z,t)\Big|_{z=0} = E\frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z}\Bigg|_{z=0} = E\mathbf{Z}(z)\mathbf{T}(t)\Big|_{z=0} = E\mathbf{T}(t)\lambda\left[-C_1 \sin \lambda z + C_2 \cos \lambda z\right]_{z=0} = 0$$

$$\sigma_z(z,t)\Big|_{z=\ell} = E\frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z}\Bigg|_{z=\ell} = E\mathbf{Z}(z)\mathbf{T}(t)\Big|_{z=\ell} = E\mathbf{T}(t)\lambda\left[-C_1 \sin \lambda z + C_2 \cos \lambda z\right]_{z=\ell} = 0$$

Одатле следи да је:

$C_2 = 0$ $\qquad$ $C_1 \sin \lambda \ell = 0$ односно $\lambda_k = \frac{k\pi}{\ell}$, $k = 1,2,3,4,....,\infty$ ...

Те је сопствена амплитудна функција:

$$\mathbf{Z}_k(z) = \cos\frac{k\pi z}{\ell}$$

$$\omega_k = k\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = k\omega_0$$

Општи закон лонгитудиналних осцилација је сада у облику тригонометријског реда:

$$w(z,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{Z}_k(z)\mathbf{T}_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos\frac{k\pi z}{\ell}\left[A_k \cos k\omega_0 t + B_k \sin k\omega_0 t\right]$$

са непознатим коефицијентима A_k и B_k Које одређујемо из задатих почетних услова:

$$w(z,0) = \sum_{p=1}^{5} w_0 \cos\left[(2p-1)\frac{\pi z}{\ell}\right]$$

$$\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \sum_{p=1}^{10} w_0 \omega_0 \cos\left(2p\frac{\pi z}{\ell}\right),$$

где је $\omega_0 = \frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

На основу претходног пишемо:

$$w(z,0) = \sum_{p=1}^{5} w_0 \cos\left[(2p-1)\frac{\pi z}{\ell}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\frac{k\pi z}{\ell}$$

$$\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \sum_{p=1}^{10} w_0 \omega_0 \cos\left(2p\frac{\pi z}{\ell}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \omega_k \cos\frac{k\pi z}{\ell}$$

На основу претходног је:

$A_{2p-1} = w_0$ за $p = 1,2,3,4,5$

$A_{2p} = 0$ за $p = 1,2,3,....,\infty$

$A_{2p-1} = 0 \quad p = 6,7,8,......,\infty$

$B_{2p} = \dfrac{w_0}{2p}$ за $p = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.$

$B_{2p-1} = 0 \quad p = 1,2....,\infty$

$B_{2p} = 0 \quad p > 10$

Закон лонгитудиналних осцилација за задате почетне услове је:

$$w(z,t) = \sum_{p=1}^{5} \theta_0 \cos\left[(2p-1)\frac{kz}{\ell}\right]\sin(2p-1)\omega_0 t + \sum_{p=1}^{10} \frac{\theta_0}{2p}\cos\left[2p\frac{kz}{\ell}\right]\cos 2p\omega_0 t \ ,$$

где је $\omega_k = k\dfrac{\pi}{\ell}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}} = k\omega_0$.

Систем торзијски осцилује у 15-то фреквентном режиму осциловања, са фрекцвенцијама:

$\omega_{2p-1} = (2p-1)\omega_0 = (2p-1)\dfrac{\pi}{\ell}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ за $p = 1,2,3,4,5$, а то су редом $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_9$. укупно пет

$\omega_{2p} = 2p\omega_0 = 2p\dfrac{\pi}{\ell}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ за $p = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.$, а то су редом $\omega_2, \omega_4, ...\omega_{10}, \omega_{12}, \omega_{14}, ..., \omega_{20}$ укупно десет.

Напомена: *Писмени део испита траје 4 сата. Дозвољено је коришћење само штампане литературе. Студенти који имају одложен усмени део испита дужни су да то видно означе на корицама писменог задатка, заједно са пројем поена, као и подацима о испитном року у коме су стекли то право. Такође је обавезно да раде писмени део испита у испитном року у коме ће плагати усмени део испита и да се труде да исти што боље ураде.*

Писмени део испита је елиминаторан. Студент остварује право на полагање усменог дела испита и позитивну оцену писменог дела испита ако оствари најмање 22 поена од укупно 40 поена (четири задатка по десет поена) или ако тачно реши и уради најмање два цела испитна задатка. Студент који оствари право *«условно позван на усмени део испита»* ***као доквалификацију*** за остварење права на усмени део испита ради један теоријски задатак у трајању од једног часа и бес коришћења литературе.

Резултати писменог дела испита биће саопштени у писменом облику на огласној табли факултета до 12 часова. један дан по одржаном писменом делу испита, ако дежурни асистент или наставник не саопшти другачије. Студенти који желе да добију објашњење у вези са оценом писменог дела испита или да поново виде свој писмени рад, потребно је да се обрате предметном наставнику, или асистенту у време редовних консултација са студентима. Термини консултација наставника су: понедељак 10-12 h, и петак 10-12 hу кабинету 221. Консултације асистента ***мр Драгана Јовановића*** у кабинету 502 уторак 12-14 h, среда 12-14 h.

Термин за полагање усменог дела испита по правилу први понедељак после писменог дела испита, а са почетком у 8,00 часова, ако студенти не изразе другачије захтев и договоре се са предметним наставником. На усменом делу испита није дозвољено коришћење литературе нити прибележака. На усменом делу испита прво се полаже усмени део испита из Теорије еластичности, па затим део из Теорије осцилација. За успешнију припрему испита из Еластодинамике пожељно је да су студенти положили испите из претходне године.

Резултате писменог дела испита, текстове испитних задатака и огледне примере решених испитних задатака из претходних испитних рокова, осим на огласној табли факултета, студенти могу наћи на **WEB** презентацији предмета Еластодинамика, а на адреси **www.masfak.ni.ac.yu** - студије - заједнички предмети треће године - Еластодинамика.